

**Міністерство освіти та науки України  
Університет митної справи та фінансів**

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ  
ПОСІБНИК ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ  
РОБОТИ –  
ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ  
З ДИСЦИПЛІНИ  
“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ”  
ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТУ  
“ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ”**

**Спеціальності: “Комп’ютерні науки” (F3) і  
“Інженерія програмного забезпечення” (F2)**

Укладачі: Трофімов О. В., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;  
Мормуль М. Ф., кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерних наук та інженерії програмного забезпечення Університету митної справи та фінансів;  
Щитов О. М., кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач НВК-Ліцей № 100;  
Щитов Д. М., кандидат економічних наук, докторант Університету митної справи та фінансів.

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ.....                                                                                                                                  | 4  |
| Вимоги до оформлення звіту.....                                                                                                             | 6  |
| Лабораторна робота № 1.<br>Тема. Теорія похибок.....                                                                                        | 8  |
| Лабораторна робота № 2.<br>Тема. Розв'язання нелінійних рівнянь.....                                                                        | 14 |
| Лабораторна робота № 3.<br>Тема. Норми векторів і матриць. Обумовленість задачі розв'язання системи лінійних рівнянь.....                   | 24 |
| Лабораторна робота № 4.<br>Тема. Розв'язання системи лінійних рішень прямими методами.....                                                  | 32 |
| Лабораторна робота № 5.<br>Тема. Розв'язання системи лінійних рішень ітераційними методами.....                                             | 41 |
| Лабораторна робота № 6.<br>Тема. Наближення функцій за методом інтерполяцій. Інтерполяційні поліноми у формі Лагранжа і Ньютона.....        | 46 |
| Лабораторна робота № 7.<br>Тема. Інтерполяція функцій сплайнами. Наближення функцій за методом апроксимації. Метод найменших квадратів..... | 53 |
| Лабораторна робота № 8.<br>Тема. Наближене обчислення похідних і інтегралів.....                                                            | 65 |
| Лабораторна робота № 9.<br>Тема. Наближене розв'язання задачі Коші.....                                                                     | 81 |
| Література.....                                                                                                                             | 87 |

## ВСТУП

Метою виконання лабораторних робіт (далі – л. р.) є поглиблення та закріплення теоретичних знань, а також набуття практичних умінь і навичок зі здійснення чисельних досліджень, що можуть виникати в реальній діяльності установ та організацій.

Навчально-методичний посібник для самостійної роботи (лабораторного практикуму) містить основні теоретичні відомості, формулювання завдань, вихідні дані, приклади розв'язання типових задач до кожної л. р., а також вимоги до оформлення звітної документації.

Тематика лабораторних робіт охоплює такі розділи:

- теорія похибок;
- розв'язання нелінійних рівнянь;
- норми векторів і матриць, обумовленість задачі розв'язання системи лінійних рівнянь;
- розв'язання системи лінійних рішень прямими методами;
- розв'язання системи лінійних рішень ітераційними методами;
- наближення функцій за методом інтерполяції, інтерполяційні поліноми у формі Лагранжа і Ньютона;
- інтерполяція функцій сплайнами, наближення функцій за методом апроксимації, метод найменших квадратів;
- наближене обчислення похідних і інтегралів;
- наближене розв'язання задачі Коші.

Загальний порядок виконання кожної лабораторної роботи:

- 1) ознайомитися з основними теоретичними положеннями теми;
- 2) обрати або самостійно сформулювати варіант вихідних даних, номер якого відповідає порядковому номеру студента у журналі академічної групи поточного семестру;
- 3) сформулювати задачу та виконати роботу відповідно до поданого прикладу;
- 4) оформити звіт згідно з установленними вимогами;
- 5) підготувати відповіді на теоретичні запитання для захисту лабораторної роботи.

До кожної лабораторної роботи складається звіт відповідно до визначених вимог. У разі їх недотримання звіт підлягає доопрацюванню.

Звіт має містити:

1. Номер, тему і мету л. р., а також номер варіанта вихідних даних.
2. Основні теоретичні відомості, необхідні для виконання л. р.
3. Відповідно до наведеного прикладу: а) постановку задачі з вихідними даними; б) хід виконання л. р., тобто розв'язування поставленої задачі; в) висновки.

Для виконання та оформлення л. р. використовувати Excel та Word.

При захисті кожної л. р. виконавець повинен: показати знання основних термінів, визначень, понять, формул та умінь оперувати ними;

уміти пояснити й обґрунтувати всі свої дії щодо виконання роботи та зроблених висновків; знати відповіді на теоретичні запитання.

Основна теоретична інформація, наведена в кожній л. р., не містить усіх необхідних відомостей з теми, що вивчається, тому виконання і захист л. р. передбачає попереднє детальне вивчення даної теми за підручниками, посібниками, конспектами лекцій тощо.

### ВИМОГИ ДО ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ

Усі таблиці, графіки, схеми, діаграми та інші графічні ілюстрації повинні бути пронумеровані та підписані. Таблиці оформлюються за відповідними вимогами до оформлення розрахункових таблиць.

Аркуші звіту нумеруються, починаючи з титульного. Номер вказується в правому верхньому куті кожного аркуша, крім титульного. Титульний аркуш повинен мати такий вигляд:

|                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Міністерство освіти та науки України<br>Університет митної справи та фінансів                                         |
| Кафедра комп'ютерних наук та<br>інженерії програмного забезпечення                                                    |
| Лабораторна робота № (номер роботи)<br>з дисципліни “Чисельні методи”<br>варіант №<br>(номер варіанта вихідних даних) |
| Роботу виконав<br>студент групи (номер групи)<br>Прізвище, ім'я, по батькові (повністю)                               |
| Роботу перевірів<br>(посада, прізвище та ініціали викладача)                                                          |
| Дніпро<br>Рік                                                                                                         |

Кожна сторінка звіту має такі параметри: верхнє, нижнє та ліве поля – 20 мм, праве – 10 мм.

Текст звіту треба писати без будь-яких скорочень слів, крім загальноприйнятих аббревіатур. Для оформлення таблиць, графіків, діаграм та інших ілюстрацій дозволяється використання будь-яких інших кольорів, крім червоного та його відтінків.

Заголовки структурних елементів звіту розташовуються посередині рядка без переносів слів та крапки в кінці, але підкреслюються. Між заголовком, попереднім і наступним текстом має бути один порожній рядок. Після заголовку на тій самій сторінці має бути не менше одного рядка подальшого тексту. Абзацний відступ має бути однаковим у всьому тексті звіту.

Формули, рівняння та інші математичні вирази розташовуються посередині окремого рядка. Безпосередньо під ними необхідно наводити пояснення до всіх позначень, що входять до цього виразу.

Переноси математичних виразів на наступний рядок небажані, але за необхідності це можна робити тільки на знаках арифметичних операцій або знаку рівності, повторюючи цей знак на початку наступного рядка. При цьому для позначення операції множення застосовується знак “×”.

Обчислення за формулами треба оформляти так:

|              |                |                         |   |            |
|--------------|----------------|-------------------------|---|------------|
| Позначення   |                | Формула з               |   | Результат  |
| величини, що |                |                         |   |            |
| обчислюється | = (Формула ) = | підставленими числовими | = | обчислення |
|              |                | значеннями змінних      |   |            |

Звіт оформлюється за таким планом (починаючи з початку другої сторінки):

**Тема:** (тема роботи).

**Мета роботи:** (мета роботи).

### **Основна теоретична інформація**

(Наводиться інформація, безпосередньо необхідна для виконання даної роботи).

### **Постановка задачі**

(Зазначається: постановка задачі (з типового прикладу до кожної лабораторної роботи); вихідні дані для відповідного варіанта, що визначені в кожній лабораторній роботі).

### **Розв’язування задачі**

(Проводиться відповідно до наведеного в кожній лабораторній роботі типового прикладу).

### **Висновки**

(Наводяться детальні висновки, аналіз одержаних результатів, необхідні на погляд виконавця інші відомості).

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1. ТЕОРІЯ ПОХИБОК

**Мета роботи.** Засвоїти поняття абсолютної та відносної похибок. Навчитись виписувати значущі та вірні цифри числа. Навчитись знаходити похибки обчислень виразів та значень функції.

**Теоретичний матеріал.** Нехай  $a$  - точне значення,  $a^*$  - наближене значення деякої величини. *Абсолютною похибкою* наближеного значення  $a^*$  називається величина  $\Delta(a^*)$ , про яку відомо, що

$$|a - a^*| \leq \Delta(a^*).$$

*Відносною похибкою* значення  $a^*$  (при  $a \neq 0$ ) називається величина  $\delta(a^*)$ , про яку відомо, що

$$\left| \frac{a - a^*}{a^*} \right| \leq \delta(a^*).$$

Відносна похибка часто визначається у відсотках.

Доволі часто інформація про деяку величину задається межами її зміни:

$a_1 \leq a \leq a_2$ , наприклад  $1,119 \leq a \leq 1,127$ . Прийнято записувати ці межі з однаковим числом знаків після коми.

Інформацію про те, що  $a^*$  є наближеним значенням числа  $a$  з абсолютною похибкою, інколи зручно записувати у вигляді:  $a = a^* \pm \Delta(a^*)$ ; числа  $a^*$  та  $\Delta(a^*)$  прийнято записувати з однаковим числом знаків після коми. Наприклад, записи

$$a = 1,123 \pm 0,004,$$

$$a = 1,123 \pm 4 \cdot 10^{-3}$$

означають, що

$$1,123 - 0,004 \leq a \leq 1,123 + 0,004.$$

Відповідно, інформацію, що  $a^*$  є наближеним значенням числа  $a$  з відносною похибкою  $\delta(a^*)$ , записують у вигляді

$$a = a^* (1 \pm \delta(a^*)).$$

Наприклад, записи

$$a = 1,123(1 \pm 0,003),$$

$$a = 1,123(1 \pm 3 \cdot 10^{-3}),$$

$$a = 1,123(1 \pm 0,3\%)$$

означають, що

$$1,123(1 - 0,003) \leq a \leq 1,123(1 + 0,003).$$

*Значущими цифрами* числа  $a^*$  називають всі цифри в його записі, починаючи з першої ненульової зліва.

*Значущу цифру* числа  $a^*$  називають *вірною*, якщо абсолютна похибка числа не перевершує одиниці розряду, відповідного цій цифрі. Якщо всі цифри у запису числа є вірними, то кажуть, що число записано з *усіма вірними цифрами*.

**Завдання 1.** Число  $a$  задане межами його зміни:  $a_1 \leq a \leq a_2$ . Запишіть число  $a$  у формах  $a = a^* \pm \Delta(a^*)$  та  $a = a^* (1 \pm \delta(a^*))$ . Визначте наближене значення числа  $a^*$ , його абсолютну та відносну похибку.

## Варіанти завдань

| №  | $a_1$   | $a_2$   | №  | $a_1$  | $a_2$  |
|----|---------|---------|----|--------|--------|
| 1  | 0.0125  | 0.0283  | 16 | 4.41   | 8.55   |
| 2  | 14.29   | 15.81   | 17 | 16.5   | 17.7   |
| 3  | 12.28   | 13.22   | 18 | 52.31  | 53.95  |
| 4  | 0.328   | 0.582   | 19 | 4.81   | 4.92   |
| 5  | 14.85   | 15.49   | 20 | 16.21  | 16.48  |
| 6  | 0.0348  | 0.0352  | 21 | 0.121  | 0.127  |
| 7  | 1213.45 | 1218.97 | 22 | 25.18  | 27.98  |
| 8  | 0.456   | 0.642   | 23 | 3.1415 | 3.1419 |
| 9  | 1.245   | 1.249   | 24 | 3.14   | 4.52   |
| 10 | 13.12   | 18.11   | 25 | 14.85  | 15.49  |
| 11 | 0.643   | 0.987   | 26 | 16.92  | 17.61  |
| 12 | 0.3575  | 0.6359  | 27 | 0.534  | 0.789  |
| 13 | 14.91   | 17.45   | 28 | 5.85   | 8.14   |
| 14 | 16.5    | 28.7    | 29 | 0.213  | 0.721  |
| 15 | 5.21    | 5.33    | 30 | 0.0534 | 0.0647 |

Приклад розв'язання завдання. Дано:  $a_1=1.456$ ,  $a_2=1.472$ . Маємо:

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2} = (1.456 + 1.472)/2 = 1.464; \Delta(a^*) = \frac{a_2 - a_1}{2} = 0.008 = 8 \cdot 10^{-3}.$$

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} = 0.008/1.464 = 0.006 = 6 \cdot 10^{-3} = 0.6\%.$$

**Завдання 2.** Для даних наближених значень  $a^*$  і  $b^*$  та їх абсолютних похибок  $\Delta(a^*)$  і  $\Delta(b^*)$  чисел  $a$  і  $b$  визначити кількість значущих та вірних цифр у запису цих чисел. Підкреслити всі вірні цифри у запису чисел.

## Варіанти завдань

| № | $a^*, b^*, \Delta(a^*), \Delta(b^*)$                                                           | №  | $a^*, b^*, \Delta(a^*), \Delta(b^*)$                                                           |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $a^* = 0.012501 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 0.00023400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$ | 16 | $a^* = 3.12505 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 0.023400 \quad \Delta(b^*) = 0.0001$     |
| 2 | $a^* = 2.012501 \quad \Delta(a^*) = 0.0001$<br>$b^* = 0.034200 \quad \Delta(b^*) = 0.00005$    | 17 | $a^* = 56.0501 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 0.0003480 \quad \Delta(b^*) = 0.000001$    |
| 3 | $a^* = 345.011 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 0.00237 \quad \Delta(b^*) = 0.000009$      | 18 | $a^* = 0.07281 \quad \Delta(a^*) = 0.0003$<br>$b^* = 0.00002340 \quad \Delta(b^*) = 0.00006$   |
| 4 | $a^* = 0.00012 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 234.02300 \quad \Delta(b^*) = 0.0008$      | 19 | $a^* = 0.062501 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 7.0002340 \quad \Delta(b^*) = 0.000001$   |
| 5 | $a^* = 0.00501 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 4.00063400 \quad \Delta(b^*) = 0.0001$   | 20 | $a^* = 0.92891 \quad \Delta(a^*) = 0.00006$<br>$b^* = 57.234001 \quad \Delta(b^*) = 0.01$      |
| 6 | $a^* = 0.216501 \quad \Delta(a^*) = 0.000003$<br>$b^* = 55.027400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$ | 21 | $a^* = 5.9201 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 0.0006740 \quad \Delta(b^*) = 0.0000001$  |
| 7 | $a^* = 0.0100000 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 6.4523400 \quad \Delta(b^*) = 0.01$    | 22 | $a^* = 0.072501 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 0.00093400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$ |
| 8 | $a^* = 0.052501 \quad \Delta(a^*) = 0.00009$                                                   | 23 | $a^* = 0.092501 \quad \Delta(a^*) = 0.002$                                                     |

|    |                                                                                                 |    |                                                                                                |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | $b^* = 0.0063400 \quad \Delta(b^*) = 0.00007$                                                   |    | $b^* = 0.0093400 \quad \Delta(b^*) = 0.0009$                                                   |
| 9  | $a^* = 0.018501 \quad \Delta(a^*) = 0.008$<br>$b^* = 0.002300 \quad \Delta(b^*) = 0.0001$       | 24 | $a^* = 7.012501 \quad \Delta(a^*) = 0.00009$<br>$b^* = 0.0078401 \quad \Delta(b^*) = 0.00006$  |
| 10 | $a^* = 567.501 \quad \Delta(a^*) = 0.03$<br>$b^* = 0.023600 \quad \Delta(b^*) = 0.0007$         | 25 | $a^* = 0.082501 \quad \Delta(a^*) = 0.00007$<br>$b^* = 0.0284001 \quad \Delta(b^*) = 0.00005$  |
| 11 | $a^* = 4.06201 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 0.0043600 \quad \Delta(b^*) = 0.0004$       | 26 | $a^* = 0.037501 \quad \Delta(a^*) = 0.00004$<br>$b^* = 0.00043200 \quad \Delta(b^*) = 0.00002$ |
| 12 | $a^* = 45.0501 \quad \Delta(a^*) = 0.0009$<br>$b^* = 0.00073400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$    | 27 | $a^* = 0.04503 \quad \Delta(a^*) = 0.00002$<br>$b^* = 5.00536400 \quad \Delta(b^*) = 0.0003$   |
| 13 | $a^* = 700.01201 \quad \Delta(a^*) = 0.00003$<br>$b^* = 0.00623400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$ | 28 | $a^* = 756.834 \quad \Delta(a^*) = 0.02$<br>$b^* = 0.345700 \quad \Delta(b^*) = 0.0005$        |
| 14 | $a^* = 6.072501 \quad \Delta(a^*) = 0.000008$<br>$b^* = 67.234000 \quad \Delta(b^*) = 0.00009$  | 29 | $a^* = 8.304 \quad \Delta(a^*) = 0.002$<br>$b^* = 5.32165300 \quad \Delta(b^*) = 0.00003$      |
| 15 | $a^* = 5.101 \quad \Delta(a^*) = 0.003$<br>$b^* = 7.11123400 \quad \Delta(b^*) = 0.00001$       | 30 | $a^* = 0.73652 \quad \Delta(a^*) = 0.00005$<br>$b^* = 68.463402 \quad \Delta(b^*) = 0.02$      |

Приклад розв'язання завдання. Дано:  $a=0.005435$ ,  $\Delta(a^*)=0.000003$ .

Значущими цифрами числа є всі цифри, починаючи з першої ненульової зліва, тобто цифри 5435 (всього 4 значущі цифри). Оскільки  $\Delta(a^*)=0.000003=3 \cdot 10^{-6}$ , то останньою вірною буде цифра, що відповідає розряду  $10^{-5}$ , тобто цифра "3". Всього значущих цифр буде 3. Остаточного отримаємо запис числа з підкресленими вірними цифрами:  $a=0.005435$ .

**Теоретичний матеріал.** Для оцінки похибок арифметичних операцій варто використовувати наступні твердження:

Абсолютна похибка алгебраїчної суми (суми або різниці) не перевершує суми абсолютних похибок доданків, тобто

$$\Delta(a^* \pm b^*) \leq \Delta(a^*) + \Delta(b^*).$$

Якщо  $a$  й  $b$  - ненульові числа одного знаку, то справедливі нерівності:

$$\delta(a^* + b^*) \leq \delta_{\max}, \quad \delta(a^* - b^*) \leq \nu \delta_{\max},$$

де

$$\delta_{\max} = \max\{\delta(a^*), \delta(b^*)\}, \quad \nu = \frac{|a + b|}{|a - b|}.$$

Для відносних похибок добутку й частки наближених чисел вірні оцінки:

$$\delta(a^* \cdot b^*) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*), \quad \delta\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \leq \delta(a^*) + \delta(b^*).$$

Нехай  $y = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  – функція  $n$  змінних, що має частинні похідні по усім змінним в області  $G$ , і обчислення якої виконується при наближено заданих значеннях аргументів  $(a^*_1, a^*_2, \dots, a^*_n)$ . Область  $G$  (паралелепіпед у  $n$ -вимірному просторі) задається системою нерівностей

$$|a_j - a^*_j| \leq \Delta(a^*_j), \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Тоді для абсолютної похибки функції  $y^* = f(a^*_1, a^*_2, \dots, a^*_n)$  справедлива наступна оцінка

$$\Delta(y^*) \leq A_0(y^*) = \sum_{j=1}^n B_j \Delta(a^*_j), \quad (1)$$

де

$$B_j = \max_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \left| \frac{\partial f}{\partial a_j}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right|.$$

Для відносної похибки обчислення функції справедлива наступна наближена рівність

$$\delta(y^*) \approx \sum_{j=1}^n \nu_j^* \delta(a_j^*), \quad (2)$$

де

$$\nu_j^* = \frac{|a_j^*| B_j}{|f(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)|}.$$

**Завдання 3.** Дана функція  $f(a, b, c)$ . Значення змінних вказані у варіантах з усіма вірними цифрами. Оцінити похибку результату, використовуючи

- оцінки похибок для арифметичних операцій;
- загальні формули абсолютної та відносної похибок при обчисленні значення функції.

Результат представити у двох формах запису: 1) з явним позначенням похибки; 2) з урахуванням вірних цифр.

#### Варіанти завдань

| №  | $f(a, b, c)$                 | $a^*$  | $b^*$  | $c^*$  | №  | $f(a, b, c)$                | $a^*$  | $b^*$  | $c^*$  |
|----|------------------------------|--------|--------|--------|----|-----------------------------|--------|--------|--------|
| 1  | $\frac{a}{a^2 + bc}$         | 0.0125 | 0.283  | 0.0187 | 16 | $\frac{a + b^2}{a^2 - b}$   | 4.41   | 18.5   |        |
| 2  | $\frac{a - b}{a^2 + bc}$     | 14.29  | 13.81  | 10.98  | 17 | $\frac{a - b^2}{a^2 + b}$   | 16.5   | 4.2    |        |
| 3  | $\frac{a^2}{ab - bc}$        | 12.28  | 13.21  | 12.19  | 18 | $\frac{a + b}{b - c}$       | 52.31  | 48.95  | 47.81  |
| 4  | $\frac{a + b}{a^2 + bc}$     | 0.328  | 0.781  | 0.0129 | 19 | $\frac{ac + bc}{a^2 - b^2}$ | 4.81   | 4.52   | 9.28   |
| 5  | $\frac{a + b}{a^2 - b^2}$    | 14.85  | 15.49  |        | 20 | $\frac{ac - bc}{a^2 + b^2}$ | 16.21  | 16.18  | 21.23  |
| 6  | $\frac{ab}{a^2 + bc}$        | 12.31  | 0.0352 | 10.82  | 21 | $\frac{a^2 + b^2}{abc}$     | 121    | 0.324  | 1.25   |
| 7  | $\frac{a - b}{a^2 + b^2}$    | 12.45  | 11.98  |        | 22 | $\frac{a^2 + b^2}{a - b}$   | 25.18  | 24.98  |        |
| 8  | $\frac{a^2 b}{c}$            | 3.456  | 0.642  | 7.12   | 23 | $\frac{c}{a^2 - b^2}$       | 3.1415 | 3.1411 | 10.91  |
| 9  | $\frac{a^3 b}{c}$            | 1.245  | 0.121  | 2.34   | 24 | $\frac{ab^2}{c}$            | 3.14   | 1.57   | 0.0921 |
| 10 | $\frac{ab + b^2}{a^2 + c^2}$ | 13.12  | 0.145  | 15.18  | 25 | $\frac{ab}{a^2 - b^2}$      | 14.85  | 15.49  |        |

|    |                          |        |       |       |    |                       |        |       |        |
|----|--------------------------|--------|-------|-------|----|-----------------------|--------|-------|--------|
| 11 | $\frac{ab^3}{c}$         | 0.643  | 2.17  | 5.843 | 26 | $\frac{ac+b}{ac-b}$   | 5.325  | 5.152 | 5.481  |
| 12 | $\frac{ab}{c^2}$         | 0.3575 | 2.63  | 0.854 | 27 | $\frac{a+c}{a^2+b^2}$ | 71.4   | 4.82  | 49.5   |
| 13 | $\frac{ab+b^2}{a^2-c^2}$ | 14.91  | 0.485 | 14.18 | 28 | $\frac{a^2+b}{c}$     | 4.356  | 4.32  | 0.246  |
| 14 | $\frac{ac}{a-b^2}$       | 16.5   | 4.12  | 0.198 | 29 | $\frac{a^3-b}{c}$     | 3.42   | 5.124 | 0.221  |
| 15 | $\frac{c^2}{a^2+b}$      | 5.21   | 14.9  | 0.295 | 30 | $\frac{ab}{c^3}$      | 0.5761 | 3.622 | 0.0685 |

Приклад розв'язання завдання. Дано:  $f(a,b,c) = \frac{a^2+b}{c}$ ,  $a^* = 4.356$ ,  $b^* = 4.32$ ,  $c^* = 0.246$ . Оцінити похибку результату.

Оскільки значення змінних написані з усіма вірними цифрами, то  $\Delta(a^*) = 0.001$ ,  $\Delta(b^*) = 0.01$ ,  $\Delta(c^*) = 0.001$ .

Відносні похибки дорівнюють:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{a^*} = \frac{0.001}{4.356} \approx 0.00023,$$

$$\delta(b^*) = \frac{\Delta(b^*)}{b^*} = \frac{0.01}{4.32} \approx 0.0024,$$

$$\delta(c^*) = \frac{\Delta(c^*)}{c^*} = \frac{0.001}{0.246} \approx 0.0041.$$

1. Оцінимо похибку, використовуючи формулу для оцінки похибки арифметичних операцій.

Спочатку обчислимо величину  $a^2$  та оцінимо похибку. Маємо:  $a^* \cdot a^* = 4.356 \cdot 4.356 = 18.974736$ . Відносна похибка добутку не перевищує суми відносних похибок множників, тобто

$$\delta(a^{*2}) = \delta(a^*) + \delta(a^*) = 2\delta(a^*) = 0.00023 + 0.00023 = 0.00046;$$

$$\Delta(a^{*2}) = \delta(a^{*2}) \cdot a^{*2} = 0.00046 \cdot 18.974736 = 0.0088.$$

Далі обчислимо абсолютну похибку суми  $a^2 + b$ . Маємо  $a^{*2} + b^* = 23.294736$ .

Абсолютна похибка суми не перевищує суми абсолютних похибок доданків, тобто

$$\Delta(a^{*2} + b^*) = \Delta(a^{*2}) + \Delta(b^*) = 0.0088 + 0.01 = 0.0188,$$

$$\delta(a^{*2} + b^*) = \frac{\Delta(a^{*2} + b^*)}{a^{*2} + b^*} = 0.0188 / 23.294736 = 0.00081.$$

Заключна операція – операція ділення  $\frac{a^2+b}{c}$ . Маємо:

$$\frac{a^{*2} + b^*}{c^*} = \frac{23.294736}{0.246} = 94.69404878.$$

Як і для множення, відносна похибка результату не перевищує суми відносних похибок чисельника та знаменника, тобто

$$\delta \frac{a^{*2} + b^*}{c^*} = \delta(a^{*2} + b^*) + \delta(c^*) = 0.00081 + 0.0041 \leq 0.005 = 0.5\%.$$

$$\Delta \frac{a^{*2} + b^*}{c^*} = \delta \frac{a^{*2} + b^*}{c^*} = \frac{a^{*2} + b^*}{c^*} \cdot 0.005 \cdot 94.69404878 \leq 0.48.$$

Таким чином,  $\frac{a^2 + b}{c} = 94.69404878 \pm 0.48$ . Вірними є тільки цифри перед

десятьковою комою, тобто, з урахуванням вірних цифр,  $\frac{a^2 + b}{c} = 94$ .

2. Оцінимо похибку, використовуючи формулу для оцінки похибки обчислення функції. Знайдемо частинні похідні функції  $f(a, b, c)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2a}{c}; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{c}; \quad \frac{\partial f}{\partial c} = -\frac{a^2 + b}{c^2}.$$

Виділимо межі зміни аргументів для визначення максимуму похідних:

$$4.355 \leq a \leq 4.357;$$

$$4.31 \leq b \leq 4.33;$$

$$0.245 \leq c \leq 0.247.$$

Обчислюємо максимальні значення похідних на вказаних проміжках:

$$B_1 = \max \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| = \frac{2 \cdot 4.357}{0.245} = 35.57;$$

$$B_2 = \max \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| = \frac{1}{0.245} = 4.09;$$

$$B_3 = \max \left| \frac{\partial f}{\partial c} \right| = \frac{4.357^2 + 4.33}{0.245^2} = 388.4.$$

Підставляємо отримані значення і дані абсолютні похибки у формулу (1) для абсолютної похибки обчислення функції

$$\Delta(f(a^*, b^*, c^*)) \leq B_1 \Delta(a^*) + B_2 \Delta(b^*) + B_3 \Delta(c^*)$$

$$\leq 35.57 \cdot 0.001 + 4.09 \cdot 0.01 + 388.4 \cdot 0.001 \leq 0.47.$$

Відносно похибку обчислення значення функції отримаємо за формулою (2)

$$\delta(f(a^*, b^*, c^*)) = \frac{|a^*| B_1 \delta(a^*) + |b^*| B_2 \delta(b^*) + |c^*| B_3 \delta(c^*)}{|f(a^*, b^*, c^*)|} \leq \frac{4.356 \cdot 35.57 \cdot 0.00023 + 4.32 \cdot 4.09 \cdot 0.0024 + 0.246 \cdot 388.4 \cdot 0.0041}{94.69404878} \leq 0.005 = 0.5\%.$$

Таким чином, оцінюючи похибку другим способом, отримаємо  $\frac{a^2 + b}{c} = 94.69404878 \pm 0.47$ . Вірними є тільки цифри перед десятковою комою, тобто, з

урахуванням вірних цифр,  $\frac{a^2 + b}{c} = 94$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2. РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

**Мета роботи.** Засвоїти основні методи знаходження коренів рівняння  $f(x)=0$ : метод бісекції, простої ітерації, Ньютона. Навчитись оцінювати необхідне число ітерацій для знаходження значення кореня із заданою точністю. Навчитись знаходити оптимальне значення ітераційного параметру в методі простої ітерації. Засвоїти поняття про обумовленість задачі знаходження кореня. Навчитись знаходити інтервал невизначеності кореня.

### Теоретичний матеріал.

Нехай розглядається рівняння  $f(x)=0$ . Коренем рівняння називається значення  $x$ , при якому  $f(x)=0$ . Корінь  $x$  називається простим, якщо  $f'(x) \neq 0$ , у противному випадку корінь називається кратним. Ціле число  $m$  називається кратністю кореня  $x$ , якщо  $f^{(k)}(x)=0$  для  $k=1,2,3,\dots,m-1$  і  $f^{(m)}(x) \neq 0$ .

### Постановка задачі обчислення наближеного значення кореня з точністю $\varepsilon$ :

знайти таке значення  $x$ , що  $|x - x^*| < \varepsilon$ .

Розв'язання задачі розбивається на два етапи: на першому етапі здійснюють локалізацію коренів, на другому етапі роблять ітераційне уточнення кореня. На етапі локалізації кореня знаходять досить вузькі відрізки (або відрізок, якщо корінь єдиний), які містять один і тільки один корінь рівняння  $f(x)=0$ . На другому етапі обчислюють наближене значення кореня із заданою точністю. Часто замість відрізка локалізації досить указати початкове наближення до кореня.

**Метод бісекції.** Нехай  $[a,b]$  – відрізок локалізації. Припустимо, що функція  $f(x)$  неперервна на  $[a,b]$  і на кінцях приймає значення різних знаків  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

Алгоритм методу бісекції складається в побудові послідовності вкладених відрізків, на кінцях яких функція приймає значення різних знаків. Кожний наступний відрізок отримують діленням навпіл попереднього. Опишемо один крок ітерацій методу. Нехай на  $k$ -ому кроці знайдений відрізок  $[a^{(k)}, b^{(k)}]$  такий, що  $f(a^{(k)}) \cdot f(b^{(k)}) < 0$ . Знайдемо середину відрізка **Ошибка!**. Якщо  $f(c^{(k)})=0$ , то  $c^{(k)}$  – корінь і задача розв'язана. Якщо ні, то з двох половин відрізка вибираємо ту, на кінцях якої функція має протилежні знаки:

$$a^{(k+1)} = a^{(k)}, b^{(k+1)} = c^{(k)}, \text{ якщо } f(a^{(k)}) \cdot f(c^{(k)}) < 0; \quad (1)$$

$$a^{(k+1)} = c^{(k)}, b^{(k+1)} = b^{(k)}, \text{ якщо } f(a^{(k)}) \cdot f(c^{(k)}) > 0. \quad (2)$$

Критерій закінчення ітераційного процесу: якщо довжина відрізка локалізації менше  $2\varepsilon$ , то ітерації припиняють і за значення кореня із заданою точністю приймають середину відрізка.

Теорема про збіжність методу бісекції. Нехай функція  $f(x)$  неперервна на  $[a,b]$  і на кінцях приймає значення різних знаків  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тоді метод збігається й справедлива оцінка похибки:

$$\text{Ошибка!} \quad (3)$$

**Метод простої ітерації (метод послідовних повторень).** Для застосування методу простої ітерації треба початкове рівняння  $f(x)=0$  перетворити до вигляду, зручного для ітерацій:  $x=\varphi(x)$ . Це перетворення можна виконати різними способами.

Функція  $\varphi(x)$  називається ітераційною функцією. Розрахункова формула методу простої ітерації має вигляд:

$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)}).$$

Теорема про збіжність методу простої ітерації. Нехай у певному  $\sigma$ -околі кореня  $\bar{x}$  функція  $\varphi(x)$  має похідну й задовольняє нерівності  $|\varphi'(x^{(n)})| \leq q$ , де  $0 \leq q < 1$  - стала. Тоді незалежно від вибору початкового наближення зі вказаного  $\sigma$ -околу ітераційна послідовність не виходить із цього околу, метод збігається зі швидкістю геометричної прогресії й справедлива оцінка похибки:

$$|x^{(n)} - \bar{x}| \leq q^n |x^{(0)} - \bar{x}|, \quad n \geq 1.$$

Якщо відомо, що початкове наближення  $x^{(0)}$  має точність  $\varepsilon_0$ , тобто  $|x^{(0)} - \bar{x}| \leq \varepsilon_0$ , то для досягнення заданої точності  $\varepsilon$  необхідно провести

$$\text{Ошибки!} \quad (4)$$

ітерацій.

Критерій закінчення ітераційного процесу. При заданій точності  $\varepsilon > 0$  обчислення слід проводити доти, поки не буде виконуватись нерівність

**Ошибки!.**

Якщо величина  $0 \leq q < 0.5$ , то можна використовувати більш простий критерій закінчення ітерацій:

$$|x^{(n)} - x^{(n-1)}| < \varepsilon. \quad (5)$$

Ключовий момент у застосуванні методу простої ітерації полягає в еквівалентному перетворенні рівняння. Спосіб, за якого виконана умова збіжності методу простої ітерації, полягає в наступному: початкове рівняння  $f(x)=0$  зводиться до вигляду  $x = \varphi(x)$ . Припустимо додатково, що похідна  $f'(x)$  є знакосталою й  $m \leq f'(x) \leq M$  на відрізку  $[a, b]$ . Тоді при виборі ітераційного параметра **Ошибки!** метод збігається й значення

$$\text{Ошибки!}. \quad (6)$$

**Завдання 1.** Методом бісекції знайти розв'язок нелінійного рівняння на відрізку  $[a, b]$  з точністю  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Вибравши отриманий розв'язок як початкове наближення, знайти розв'язок методом простої ітерації з точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Для методу простої ітерації обґрунтувати збіжність і оцінити достатнє для досягнення заданої точності число ітерацій.

*Варіанти завдань*

| № | Рівняння                      | $[a, b]$       | №  | Рівняння                       | $[a, b]$     |
|---|-------------------------------|----------------|----|--------------------------------|--------------|
| 1 | $\ln x = \operatorname{tg} x$ | $[3.5, 4.5]$   | 16 | $2^x = 2 - x^2$                | $[0.5, 0.8]$ |
| 2 | $\ln(x + 2.5) = x^2 - 1$      | $[-1.3, -0.7]$ | 17 | $\sin x = 1/(1 + x^2)$         | $[0.5, 1]$   |
| 3 | $x \cos x + \sin x = 0$       | $[1.8, 2.2]$   | 18 | $\ln(1 + \sqrt{x}) = \cos x$   | $[0.3, 1.3]$ |
| 4 | $x \sin x + \cos x = 0$       | $[2.7, 2.9]$   | 19 | $x^2 = \operatorname{ctg} x$   | $[0.5, 1]$   |
| 5 | $e^{-x} = \sin x$             | $[0, 0.6]$     | 20 | $x + 1/x = 2 + \cos(x - 1)$    | $[1.8, 2.3]$ |
| 6 | $\ln x = 4 - x^2$             | $[1.5, 2]$     | 21 | $e^x + e^{-x} = 3 + \sqrt{x}$  | $[1, 1.5]$   |
| 7 | $\sqrt{x} + x^2 = 10$         | $[2.6, 3]$     | 22 | $\sin x = \cos(x^2)$           | $[0.7, 1]$   |
| 8 | $x^5 + 2x - 8 = 0$            | $[1, 1.5]$     | 23 | $\cos x = \sin(x^2)$           | $[1.5, 2]$   |
| 9 | $\sqrt{x} - \cos x = 0$       | $[0.5, 0.7]$   | 24 | $\operatorname{tg} x = e^{-x}$ | $[3, 3.3]$   |

|    |                               |              |    |                         |              |
|----|-------------------------------|--------------|----|-------------------------|--------------|
| 10 | $e^{-x^2} = x^2 - 2x$         | $[-1, -0.5]$ | 25 | $xe^x = 3$              | $[1, 1.5]$   |
| 11 | $e^x = 1/\sqrt{x}$            | $[0.3, 0.8]$ | 26 | $e^{2\sin x} = x$       | $[2.5, 3]$   |
| 12 | $\sqrt{\cos x} = x^2$         | $[0.5, 1]$   | 27 | $\sqrt{x} = x^3 - 1$    | $[1, 1.5]$   |
| 13 | $\ln(2+x) = \sqrt{x}$         | $[1.4, 2]$   | 28 | $x^4 - x^3 - 1 = 0$     | $[-1, -0.5]$ |
| 14 | $\ln(x+1) = \sqrt{4-x^2}$     | $[1, 2]$     | 29 | $e^{-x^2/4} = 2x - x^2$ | $[1.5, 2]$   |
| 15 | $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = 0.5$ | $[0.2, 1]$   | 30 | $\ln x = \cos x$        | $[1, 1.5]$   |

Приклад розв'язання завдання. Дано рівняння  $\ln x = \cos x$ , тобто  $\ln x - \cos x = 0$ . Знайти корінь, що знаходиться у проміжку  $[1, 1.5]$ .

Спочатку впевнимось, що на заданому проміжку існує єдиний корінь рівняння  $f(x) = \ln x - \cos x = 0$ . Для цього на аркуші електронної таблиці побудуємо графік функції  $y=f(x)$ . Створимо таблицю значень функції з кроком  $h$ , як показано на рис. 1, і побудуємо точкову діаграму на основі цієї таблиці.

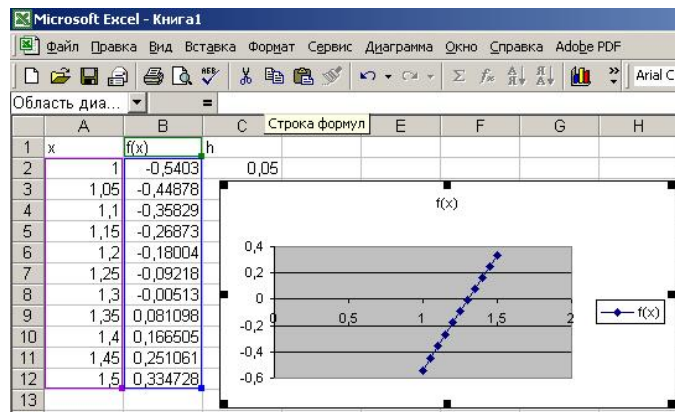


Рис. 1. Побудова таблиці значень і графіка функції  $y=f(x)$ .

Дані на аркуші електронної таблиці розташуємо таким чином: в першому стовбці будемо зберігати значення незалежної змінної  $x$ , у другому – відповідні значення функції; крок зміни аргументу  $h$  розмістимо в комірці C2. Заповнимо даними стовпець значень  $x$ .

В комірку A2 внесемо початкове значення  $a$  аргументу (в даному випадку  $a=1$ ), а в комірці A3 введемо формулу  $=A2+\$C\$2$  (див. рис. 2); після завершення введення Excel обчислить в цій комірці значення  $x=a+h$ . Скопіюємо вміст комірки A3 в комірки A4, A5, ..., поки значення  $x$  не досягне  $b$ .

|         |            |      |   |            |
|---------|------------|------|---|------------|
| ДЕНЬНЕД | ✖          | ✓    | = | =A2+\$C\$2 |
| x       | f(x)       | h    |   |            |
| 1       |            |      |   |            |
| 2       | 1          | 0.05 |   |            |
| 3       | =A2+\$C\$2 |      |   |            |

Рис. 2. Заповнення стовпця значень аргументу.

|         |                 |   |   |                 |
|---------|-----------------|---|---|-----------------|
| ДЕНЬНЕД | ✖               | ✓ | = | =LN(A2)-COS(A2) |
| x       | f(x)            | h |   |                 |
| 1       |                 |   |   |                 |
| 2       | =LN(A2)-COS(A2) |   |   |                 |
| 3       | 1.05            |   |   |                 |
| 4       | 1.1             |   |   |                 |

Рис. 3. Заповнення стовпця значень функції.

Подібна схема обчислення значень аргументу дозволяє варіювати значення  $h$ , не змінюючи при цьому формул у комірках для  $x$ .

Для заповнення значеннями у другого стовпця табличного документу спочатку введемо у комірку B2 формулу  $=LN(A2)-COS(A2)$  (рис. 3). Табличний процесор обчислить у цій комірці значення  $f(a)$ . Скопіюємо вміст комірки B2 у комірки B3, B4, ...; при цьому стовпець B заповниться значеннями функції  $f(x)$  відповідно до значень аргументу  $x$  у стовпці A. Таблиця значень функції побудована.

На базі побудованої таблиці будемо точкову діаграму. З цієї діаграми видно (див. рис. 1), що рівняння  $f(x)=0$  дійсно має єдиний корінь на відрізку  $[1, 1.5]$ .

Проведемо уточнення значення кореня на вказаному відрізку методом бісекції (поділу відрізка навпіл). Обчислення організуємо на окремому аркуші електронної таблиці (рис. 4).

|   | A                                 | B      | C        | D        |
|---|-----------------------------------|--------|----------|----------|
| 1 | Уточнення кореня методом бісекції |        |          |          |
| 2 | a                                 | b      | c        | Δ        |
| 3 | 1                                 | 1,5    | 1,25     | 0,25     |
| 4 | 1,25                              | 1,5    | 1,375    | 0,125    |
| 5 | 1,25                              | 1,375  | 1,3125   | 0,0625   |
| 6 | 1,25                              | 1,3125 | 1,28125  | 0,03125  |
| 7 | 1,28125                           | 1,3125 | 1,296875 | 0,015625 |
| 8 | 1,296875                          | 1,3125 | 1,304688 | 0,007813 |

Рис. 4. Уточнення кореня методом бісекції.

Обчислення виконаємо згідно до формул (1), (2). В перших трьох стовпцях електронного аркуша розмістимо значення  $a^{(k)}$ ,  $b^{(k)}$ ,  $c^{(k)}$ ; в четвертому стовпці будемо обчислювати величину  $\Delta^{(k)}$  з формули (3), яка слугує оцінкою похибки обчислення кореня.

В комірках A3 та B3 введемо початкові значення кінців відрізка локалізації кореня  $a$  і  $b$  ( $a = 1$ ,  $b = 1.5$ ). В комірку C3 введемо формулу для  $c^{(k)} = (A3+B3)/2$ , а в комірку D3 - формулу для  $\Delta^{(k)} = (B3-A3)/2$ .

В наступному рядку електронного аркуша введемо формули для обчислень нових значень  $a^{(k)}$ ,  $b^{(k)}$ ,  $c^{(k)}$ ,  $\Delta^{(k)}$  згідно до формул (1), (2), (3). Для обчислення значень  $a^{(k)}$  та  $b^{(k)}$  використаємо логічну функцію ЕСЛИ (рис. 5, 6).

ЕСЛИ

Логическое\_выражение:  $(\text{LN}(\text{A3})-\text{COS}(\text{A3})) * (\text{LN}(\text{C3})-\text{COS}(\text{C3})) < 0$  = ЛОЖЬ

Значение\_если\_истина: A3 = 1

Значение\_если\_ложь: C3 = 1,25

Возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другое, если оно ложно.

Логическое\_выражение: любое значение или выражение, которое при вычислении дает значение ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Значение: 1,25

OK Отмена

Рис. 5. Введення формули для обчислення  $a^{(k)}$  в комірці A4.

ЕСЛИ

Логическое\_выражение:  $(\text{LN}(\text{A3})-\text{COS}(\text{A3})) * (\text{LN}(\text{C3})-\text{COS}(\text{C3})) < 0$  = ЛОЖЬ

Значение\_если\_истина: C3 = 1,25

Значение\_если\_ложь: B3 = 1,5

Возвращает одно значение, если указанное условие истинно, и другое, если оно ложно.

Логическое\_выражение: любое значение или выражение, которое при вычислении дает значение ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Значение: 1,5

OK Отмена

Рис. 6. Введення формули для обчислення  $b^{(k)}$  в комірці B4.

Отже, в комірку A4 для обчислення  $a^{(k)}$  введемо формулу  $=\text{ЕСЛИ}((\text{LN}(\text{A3})-\text{COS}(\text{A3})) * (\text{LN}(\text{C3})-\text{COS}(\text{C3})) < 0; \text{A3}; \text{C3})$ , а в комірку B4 для обчислення  $b^{(k)}$  - формулу  $=\text{ЕСЛИ}((\text{LN}(\text{A3})-\text{COS}(\text{A3})) * (\text{LN}(\text{C3})-\text{COS}(\text{C3})) < 0; \text{C3}; \text{B3})$ . Формули для  $c^{(k)}$ ,  $\Delta^{(k)}$  залишаються незмінними; скопіюємо їх в комірки C4, D4 з комірок C3, D3.

Таким чином, всі обчислення для проведення першої ітерації метода бісекції виконані в діапазоні A4:D4. Для виконання наступних ітерацій просто скопіюємо вміст комірок цього діапазону у розташовані нижче рядки (рис. 4).

Обчислення припиняються, коли досягається задана точність, тобто значення  $\Delta^{(k)}$  у стовпці D не перевищує  $\varepsilon=10^{-2}$ . Для контролю досягнення точності зручно використовувати умовне форматування комірок, де зберігаються значення  $\Delta^{(k)}$  (тобто комірок D3, D4, ...). Діалогова панель для встановлення такого формату показана на рис. 7.

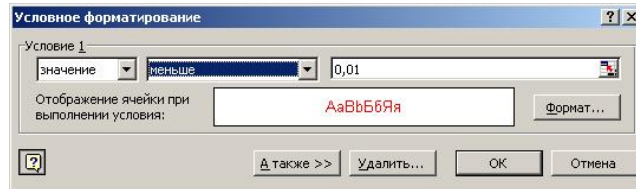


Рис. 7. Умове форматування комірок D3, D4, ... для контролю досягання заданої точності.

Значення  $\Delta^{(k)}$  менші за  $10^{-2}$  відобразяться у відповідних комірках червоним кольором.

Отже, для досягання точності  $10^{-2}$  нам вистачило п'яти ітерацій метода бісекції; наближене значення кореня знаходиться у комірці C8 і дорівнює 1,3046875 (перші три цифри у запису результату є вірними). Обчислення за методом бісекції закінчено.

Відповідь:  $x = 1,30 \pm 10^{-2}$ .

Проведемо подальше уточнення кореня методом простої ітерації.

Для цього перетворимо початкове рівняння  $f(x)=0$  до вигляду  $x = x - \alpha f(x)$ . Для визначення оптимального параметру  $\alpha$  необхідно дослідити поведінку похідної

**Ошибки!**

на відрізок локалізації кореня. На окремому аркуші електронного документу будемо графік похідної (рис. 8).

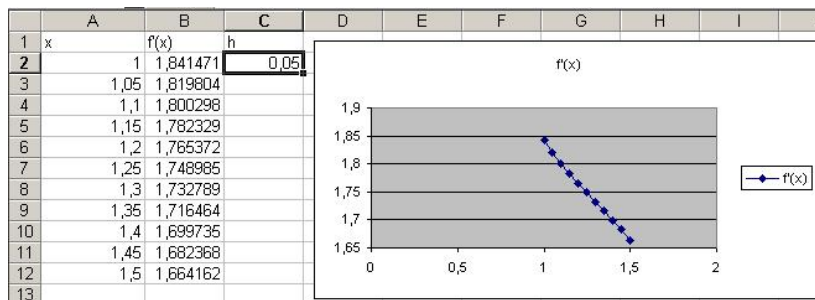


Рис. 8. Побудова графіка похідної  $f'(x)$ .

З графіка видно, що похідна  $f'(x)$  на відрізок локалізації знакостала (додатна); максимальне і мінімальне значення похідної дорівнюють відповідно

$$M = \max(f'(x)) = f'(1) = 1,841470985,$$

$$m = \min(f'(x)) = f'(1,5) = 1,664162.$$

Оптимальне значення параметру  $\alpha$  розрахуємо згідно з формулою

**Ошибки!.**

Значення  $\alpha$  розмістимо на аркуші електронної таблиці в комірці A18.

Відповідне значення параметру  $q$  згідно з формулою (6) дорівнює

**Ошибки!.**

Оскільки  $q < 1$ , то метод простої ітерації є збіжним. Оскільки в якості початкового наближення ми використовуємо величину, яку ми отримали з методу бісекції з

точністю  $\varepsilon_0=10^{-2}$ , то для досягання точності  $\varepsilon=10^{-4}$  необхідно виконати, згідно з формулою (4),  $n = \frac{\ln(\varepsilon/\varepsilon_0)}{\ln q}$  ітерацій.

Обчислення за методом простої ітерації розташуємо на електронному аркуші (рис. 9).

|    |                        |             |               |                 |          |
|----|------------------------|-------------|---------------|-----------------|----------|
| 17 | $\alpha$               | $q$         | $\varepsilon$ | $\varepsilon_0$ | $n$      |
| 18 | 0,570510435            | 0,050578412 | 1,00E-04      | 1,00E-02        | 2,00E+00 |
| 19 |                        |             |               |                 |          |
| 20 | Метод простої ітерації |             |               |                 |          |
| 21 | $x$                    | $\Delta$    |               |                 |          |
| 22 | 1,3046875              |             |               |                 |          |
| 23 | 1,302984914            | 0,001702586 |               |                 |          |
| 24 | 1,302964252            | 2,0662E-05  |               |                 |          |
| 25 | 1,302964004            | 2,47451E-07 |               |                 |          |
| 26 | 1,302964001            | 2,96304E-09 |               |                 |          |

Рис. 9. Розташування даних і формул для обчислень за методом простої ітерації.

В якості критерію закінчення ітерацій будемо використовувати формулу (5), оскільки в даному випадку  $q = 0,050578412 < 0,5$ . Для цього в другому стовпці таблиці розмістимо формули для обчислення параметру  $\Delta^{(n)} = |x^{(n)} - x^{(n-1)}|$ . В першому стовпці розмістимо значення  $x^{(n)}$  на кожній ітерації.

В комірку A22 перенесемо значення початкового наближення  $x^{(0)}$ , яке візьмемо з комірки C8 електронного аркуша з обчисленнями за методом бісекції (див. рис. 4). Далі в комірку A23 для  $x^{(1)}$  введемо формулу  $=A22-\$A\$18*(LN(A22)-COS(A22))$  (рис. 10). В комірку B23 введемо формулу  $=ABS(A23-A22)$  для обчислення параметру  $\Delta^{(1)}$  (рис. 11).

|    |                                   |             |               |
|----|-----------------------------------|-------------|---------------|
| 17 | $\alpha$                          | $q$         | $\varepsilon$ |
| 18 | 0,570510435                       | 0,050578412 | 1,00E-04      |
| 19 |                                   |             |               |
| 20 | Метод простої ітерації            |             |               |
| 21 | $x$                               | $\Delta$    |               |
| 22 | 1,3046875                         |             |               |
| 23 | $=A22-\$A\$18*(LN(A22)-COS(A22))$ |             |               |

Рис. 10. Обчислення величини

$x^{(1)}$ .

|    |                        |                 |
|----|------------------------|-----------------|
| 20 | Метод простої ітерації |                 |
| 21 | $x$                    | $\Delta$        |
| 22 | 1,3046875              |                 |
| 23 | 1,302984914            | $=ABS(A23-A22)$ |

Рис. 11. Обчислення величини  $\Delta^{(1)}$ .

Як і під час реалізації методу бісекції, зручно застосувати умовне форматування для комірок зі значеннями  $\Delta^{(n)}$  для визначення моменту закінчення обчислень.

Скопіюємо вміст комірок A23, B23 у відповідні комірки розташованих нижче рядків (рис. 9). З рисунка видно, що вже на другій ітерації ми отримаємо значення  $x = 1,302964252$  з належною точністю  $\varepsilon=10^{-4}$  (п'ять старших цифр у запису числа є вірними). Ця кількість ітерацій узгоджується з теоретичною оцінкою, отриманою за формулою (4). Розрахунки за методом простої ітерації закінчено.

Відповідь:  $x = 1,3029 \pm 10^{-4}$ .

**Метод Ньютона (метод дотичних).** Розрахункова формула методу Ньютона має вигляд:

**Ошибка!.**

Геометрично метод Ньютона означає, що наступним наближенням до кореня  $x^{(n+1)}$  є точка перетину з віссю Oх дотичної, проведеної до графіка функції  $y=f(x)$  у точці **Ошибка!.**

Теорема про збіжність методу Ньютона. Нехай  $x$  – простий корінь рівняння  $f(x)=0$ , у деякому околі якого функція має другу неперервну похідну. Тоді знайдеться такий малий  $\sigma$  – окіл кореня  $x$ , що при довільному виборі початкового наближення  $x^{(0)}$

із цього околу ітераційна послідовність методу Ньютона не виходить за межі околу й справедлива оцінка

$$\left| x^{(n+1)} - \bar{x} \right| \leq C \left| x^{(n)} - \bar{x} \right|^2, \text{ де } n \geq 0, C = \sigma^{-1}.$$

Критерій закінчення ітераційного процесу. При заданій точності  $\varepsilon > 0$  обчислення варто проводити доти, поки не буде виконуватись нерівність

$$\left| x^{(n)} - x^{(n-1)} \right| < \varepsilon. \quad (7)$$

Як зазначено в теоремі, метод Ньютона має локальну збіжність, тобто областю його збіжності є малий окіл кореня  $\bar{x}$ . Невдалий вибір початкового наближення може дати розбіжну ітераційну послідовність.

**Обумовленість задачі обчислення кореня.** Під обумовленістю обчислювальної задачі розуміють чутливість її розв'язку до малих похибок вхідних даних.

Нехай встановлена нерівність  $\Delta(y^*) \leq v_{\Delta} \cdot \Delta(x^*)$ , де  $\Delta(x^*)$  - абсолютна похибка вхідних даних, а  $\Delta(y^*)$  - абсолютна похибка розв'язку. Тоді  $v_{\Delta}$  - називається абсолютним числом обумовленості задачі. Якщо ж встановлена нерівність  $\delta(y^*) \leq v_{\delta} \cdot \delta(x^*)$  між відносними похибками даних і розв'язку, то  $v_{\delta}$  називають відносним числом обумовленості задачі.

Зазвичай під числом обумовленості  $v$  розуміють відносне число обумовленості. Якщо  $v \gg 1$ , то задачу називають погано обумовленою.

Нехай  $\bar{x}$  - корінь, що підлягає визначенню. Будемо вважати, що вхідними даними для задачі обчислення кореня є значення функції  $f(x)$ . Оскільки  $f(x)$  обчислюється неточно, то позначимо функцію, отриману в дійсності, через  $f^*(x)$ . Припустимо, що в малому околі кореня виконується нерівність:  $\left| f(x) - f^*(x) \right| < \Delta(f^*)$ .

Для близьких до  $\bar{x}$  значень  $x$  справедлива рівність  $f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$ , отже,

**Ошибка!.**

Це означає, що число обумовленості задачі знаходження кореня дорівнює

**Ошибка!.**

З останньої формули випливає, що чим менше значення похідної функції в точці кореня, тим задача гірше обумовлена. Зокрема, задача знаходження кратного кореня має число обумовленості - нескінченність.

**Інтервал невизначеності кореня.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна, то знайдеться такий малий окіл **Ошибка!** кореня  $\bar{x}$ , що має радіус  $\varepsilon$ , у якому буде виконуватись нерівність  $\left| f(x) \right| < \Delta(f^*)$ . Це означає, що, якщо **Ошибка!**, то знак обчисленого значення  $f^*(x)$ , взагалі кажучи не зобов'язаний збігатися зі знаком  $f(x)$  і, отже, стає неможливим визначити, яке саме значення  $x$  з інтервалу **Ошибка!** обертає функцію  $f$  в нуль. Цей інтервал називається інтервалом невизначеності кореня. Очевидно, що радіус інтервалу невизначеності для простого кореня дорівнює

$$\text{Ошибка!} \quad (8)$$

Аналогічно можна показати, що для кратного кореня

**Ошибка!.**

Це означає, що для простого кореня радіус інтервалу невизначеності прямо пропорційний похибці обчислення функції  $\Delta(f^*)$ , а для кратного кореня - пропорційний **Ошибка!**.

**Завдання 2.** Даний многочлен третьої степені:  $P(x) = x^3 + bx + c$ . Знайти дійсний корінь многочлена, розташований на інтервалі  $(-3, 0)$ , з точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$  методом Ньютона. Припустимо, що абсолютна похибка у завданні коефіцієнта  $b$  складає

$\Delta(b^*) = 1 \cdot 10^{-3}$  (коефіцієнт  $c$  задається точно). Дослідити вплив похибки в завданні коефіцієнта  $b$  на розв'язок задачі: отримати теоретичну оцінку інтервалу невизначеності кореня і виконати обчислювальний експеримент.

| № | $b$ | $c$ | №  | $b$ | $c$ | №  | $b$ | $c$ | №  | $b$ | $c$ | №  | $b$ | $c$ |
|---|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 1 | 1   | 10  | 7  | 7   | 14  | 13 | 13  | 18  | 19 | 19  | 12  | 25 | 25  | 6   |
| 2 | 2   | 9   | 8  | 8   | 13  | 14 | 14  | 17  | 20 | 20  | 11  | 26 | 26  | 5   |
| 3 | 3   | 8   | 9  | 9   | 12  | 15 | 15  | 16  | 21 | 21  | 10  | 27 | 27  | 4   |
| 4 | 4   | 7   | 10 | 10  | 11  | 16 | 16  | 15  | 22 | 22  | 9   | 28 | 28  | 3   |
| 5 | 5   | 6   | 11 | 11  | 10  | 17 | 17  | 14  | 23 | 23  | 8   | 29 | 29  | 2   |
| 6 | 6   | 5   | 12 | 12  | 19  | 18 | 18  | 13  | 24 | 24  | 7   | 30 | 31  | 1   |

*Приклад розв'язання завдання.* Дано:  $b = 31$ ,  $c = 1$ .

Побудуємо графік функції  $P(x)$  та впевнимось, що на відрізку  $[-3,0]$  ця функція дійсно має єдиний корінь (рис. 12).

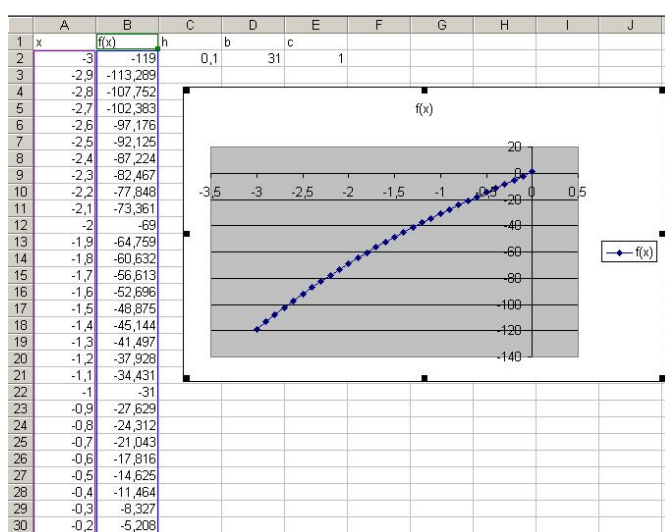


Рис. 12. Побудова графіка функції  $P(x) = x^3 + bx + c$ .

Похідна функції  $P(x)$  визначається так:  $P'(x) = 3x^2 + b$ , отже, розрахункова формула метода Ньютона має вигляд

$$\text{Ошибка!} \quad (9)$$

Обчислення реалізуємо на окремому робочому аркуші електронної таблиці (рис. 13).

|   | A             | B        | C | D  | E |
|---|---------------|----------|---|----|---|
| 1 | Метод Ньютона |          |   | b  | c |
| 2 | x             | Δ        |   | 31 | 1 |
| 3 | -3            |          |   |    |   |
| 4 | -0,948275862  | 2,051724 |   |    |   |
| 5 | -0,080285367  | 0,86799  |   |    |   |
| 6 | -0,032271321  | 0,048014 |   |    |   |
| 7 | -0,032256982  | 1,43E-05 |   |    |   |
| 8 | -0,032256982  | 6,42E-13 |   |    |   |
| 9 |               |          |   |    |   |

Рис. 13. Розташування даних та формул для обчислень за методом Ньютона.

В комірку A3 введемо значення початкового наближення  $x^{(0)} = -3$ . В комірку A4 введемо формулу для першого наближення  $x^{(1)}$  за методом Ньютона згідно до формули (9) (рис. 14).

|                                                                                                    |                                                 |   |   |    |   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---|---|----|---|
| СУММ <span>✖</span> <span>✓</span> <span>fx</span> $=A3-(A3^3+\$D\$2*A3+\$E\$2)/(\$3*A3^2+\$D\$2)$ |                                                 |   |   |    |   |
|                                                                                                    | A                                               | B | C | D  | E |
| 1                                                                                                  | Метод Ньютона                                   |   |   | b  | c |
| 2                                                                                                  | x                                               | Δ |   | 31 | 1 |
| 3                                                                                                  | -3                                              |   |   |    |   |
| 4                                                                                                  | $=A3-(A3^3+\$D\$2*A3+\$E\$2)/(\$3*A3^2+\$D\$2)$ |   |   |    |   |
| 5                                                                                                  |                                                 |   |   |    |   |

Рис. 14. Введення формули для обчислення  $x^{(1)}$ 

|   | A             | B           |
|---|---------------|-------------|
| 1 | Метод Ньютона |             |
| 2 | x             | Δ           |
| 3 |               | -3          |
| 4 | -0,948259513  | =ABS(A4-A3) |
| 5 |               |             |

Рис. 15. Введення формули для обчислення  $|x^{(1)} - x^{(0)}|$ .

В комірку B4 введемо формулу для обчислення величини  $|x^{(1)} - x^{(0)}|$  (рис. 15). Ці величини, як і в методі простої ітерації, використовуються для перевірки критерію (7) закінчення ітерацій. Аналогічно оформлюється умовне форматування комірок для обчислення  $|x^{(n)} - x^{(n-1)}|$ .

Скопіюємо вміст комірок A4, B4 у комірки нижче розташованих рядків. Таким чином, ми отримаємо результати обчислень на кожній ітерації метода Ньютона (рис. 13). З рисунка видно, що вже на п'ятій ітерації ми отримаємо наближене значення кореня  $x = -0,032256982$  з необхідною точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$  (вірні цифри у запису числа підкреслені).

Відповідь:  $x = -0,032256 \pm 10^{-6}$ .

Нехай тепер коефіцієнт  $b$  обчислюється з абсолютною похибкою  $\Delta(b^*) = 1 \cdot 10^{-3}$ . Отримаємо за допомогою метода Ньютона розв'язки рівняння з коефіцієнтами  $b^- = b - \Delta(b^*) = 31 - 0,001 = 30,999$  та  $b^+ = b + \Delta(b^*) = 31 + 0,001 = 31,001$ . Отримаємо відповідні розв'язки  $x^- = x(b^-) = -0,0322580222893352$  та  $x^+ = x(b^+) = -0,0322559414032666$ . Будемо вважати, що функція  $x = x(b)$  змінюється монотонно в малому околі точки  $b$ . Тоді відрізок  $[x^+, x^-]$  і буде відрізком невизначеності кореня  $x$ . Довжина цього відрізка дорівнює

$$|x^- - x^+| = 0,0000020808860686 \approx 2,1 \cdot 10^{-6}. \quad (10)$$

Це експериментальна оцінка інтервалу невизначеності. Для отримання теоретичної оцінки інтервалу невизначеності скористуємось формулою (8). Маємо:

Ошибка!,  
Ошибка!,  
Ошибка!.

Отримане значення  $\varepsilon$  - це радіус інтервалу невизначеності; отже, теоретична оцінка діаметру невизначеності в 2 рази більша і дорівнює 0,0000020808860664, що з високим ступенем точності збігається з експериментальною оцінкою (формула (10)).

### ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3. НОРМИ ВЕКТОРІВ І МАТРИЦЬ. ОБУМОВЛЕНІСТЬ ЗАДАЧІ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

**Мета роботи.** Засвоїти поняття норми вектору та відповідної норми матриці, абсолютної та відносної похибки вектору та матриці. Навчитись обчислювати норми векторів і матриць. Засвоїти поняття про обумовленість задачі розв'язання системи лінійних рівнянь. Навчитись знаходити число обумовленості матриці, а також оцінювати похибку розв'язку системи лінійних рівнянь в залежності від похибки матриці системи та її правої частини.

#### Теоретичний матеріал.

##### 3.1 Норми векторів і матриць.

Для системи лінійних рівнянь

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2; \dots\} \quad (1)$$

використовується скорочений запис

$$Ax = b; \quad (2)$$

де

$$A = (a_{11}; a_{21}; \dots; a_{m1}; a_{12}; a_{22}; \dots; a_{m2}; \dots; \dots; \dots; a_{1m}; a_{2m}; \dots; a_{mm}) -$$

матриця системи;

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_m) = (x_1; x_2; \dots; x_m)^T - \text{розв'язок системи (вектор}$$

невідомих),

$$b = (b_1; b_2; \dots; b_m) = (b_1; b_2; \dots; b_m)^T - \text{вектор правих частин.}$$

Нехай  $\mathbf{x} = (x_1; x_2; \dots; x_m)^T$  – точний розв’язок системи, а  $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \dots; x_m^*)^T$  – її наближений розв’язок. Для кількісної характеристики вектору похибки  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* = (x_1 - x_1^*; x_2 - x_2^*; \dots; x_m - x_m^*)^T$  введемо поняття норми.

Нормою вектора  $\mathbf{x}$  називається число  $\|\mathbf{x}\|$ , що задовольняє трьом аксіомам:

- 1)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  причому  $\|\mathbf{x}\| = 0$  тоді й тільки тоді, коли  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- 2)  $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$  для будь-якого вектору  $\mathbf{x}$  й будь-якого числа  $\alpha$ ;
- 3)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  для будь-яких векторів  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{y}$ .

Найбільш вживаними є такі три норми:

**Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!**

Абсолютна й відносна похибки вектора вводяться за допомогою формул:

$$\Delta(\mathbf{x}^*) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \text{ та Ошибка!.} \quad (3)$$

Нормою матриці  $A$  називається величина

**Ошибка!**

Введена норма має властивості, аналогічними властивостям норми вектору:

- 1)  $\|A\| \geq 0$  причому  $\|A\| = 0$  тоді й тільки тоді, коли  $A = \mathbf{0}$ ;
- 2)  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$  для будь-якої матриці  $A$  і будь-якого числа  $\alpha$ ;
- 3)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  для будь-яких матриць  $A$  і  $B$ ;
- 4)  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

Кожний з векторних норм відповідає своя підпорядкована норма матриці:

$$\text{Ошибка!} \quad (4)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)}, \quad (5)$$

$$\text{Ошибка!} \quad (6)$$

У виразі для норми  $\|A\|_2$  позначено  $\lambda_{\max}(AA^T)$  – максимальне власне число матриці  $AA^T$ .

В оцінках замість норми  $\|A\|_2$  використовується евклідова норма матриці

$$\text{Ошибка!} \quad (7)$$

тому що для будь-якої матриці  $A$  виконується нерівність

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_e.$$

Абсолютна й відносна похибки матриці вводяться аналогічно похибкам вектору за допомогою формул:

$$\Delta(A^*) = \|A - A^*\|, \quad (8)$$

$$\text{Ошибка!} \quad (9)$$

**Завдання 1.** Задані наближені значення матриці  $A^*$  та вектора  $\mathbf{x}^*$ . Коефіцієнти матриці та компоненти вектора задані з усіма вірними цифрами. Обчислити абсолютну та відносну похибки матриці й вектора у відповідних нормах  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  та  $\|\cdot\|_\infty$  (для обчислення похибок матриці замість норми  $\|\cdot\|_2$  використати евклідову норму  $\|\cdot\|_e$ ).

#### Варіанти завдань

| №  | $A^*$                              | $\mathbf{x}^*$                | №  | $A^*$                            | $\mathbf{x}^*$                |
|----|------------------------------------|-------------------------------|----|----------------------------------|-------------------------------|
| 1  | (1.21;-2.1;3.45;4.1;-5.34;-6.1)    | (1.34;2.3;3.6;4.5;5.8;7.2)    | 16 | (-2.5;-1.44;13.2;-5.1;-7.8;11.5) | (-7.4;-5.3;-0.2;1.1;2.3;3.5)  |
| 2  | (-3.2;-5.1;7.85;9.98;-0.34;-1.2)   | (4.4;-3.41;0.7;1.5;2.8;4.1)   | 17 | (-4.52;-2.7;10.5;0.02;-1.3;2.1)  | (0.24;-0.3;-0.1;0.5;0.8;1.2)  |
| 3  | (-0.2;7.1;8.5;-9.21;-4.4;11.5)     | (-3.55;6.56;-1.2;2.3;3.7;5.1) | 18 | (0.54;-0.2;8.5;13.7;-2.1;4.8)    | (4.4;7.2;-6.1;1.5;2.8;4.1)    |
| 4  | (-5.12;-8.71;9.95;0.08;-8.4;1.2)   | (0.4;-5.66;8.5;-1.2;2.3;3.7)  | 19 | (-1.4;-6.2;8.95;11.01;-1.3;2.1)  | (1.3;11.2;22.5;-0.2;0.5;0.8)  |
| 5  | (-1.3;-2.4;3.4;-4.15;-9.34;-6.1)   | (0.4;2.31;7.8;1.5;2.8;4.1)    | 20 | (3.32;-6.1;7.51;6.2;-7.8;11.5)   | (6.34;-0.3;-4.1;1.5;2.8;4.1)  |
| 6  | (3.6;-0.1;7.5;10.8;-1.2;-1.2)      | (-0.74;8.12;-1.2;2.3;3.7;5.1) | 21 | (-8.3;-9.2;2.7;13.11;-1.3;2.1)   | (-3.4;-0.3;12.5;-0.2;0.5;0.8) |
| 7  | (-4.2;-9.1;-7.51;0.1;-5.3;-0.2)    | (-5.4;5.12;-7.8;1.5;2.8;4.1)  | 22 | (7.6;-0.2;8.6;9.7;-2.1;4.8)      | (-2.55;12.3;-0.2;1.1;2.3;3.5) |
| 8  | (-6.2;-8.1;9.8;10.81;-1.3;-0.2)    | (2.4;-2.11;8.5;-1.2;2.3;3.7)  | 23 | (6.1;-7.14;-3.6;0.32;-1.3;2.1)   | (0.22;-3.2;0.5;0.8;1.2;2.5)   |
| 9  | (-3.2;11.2;-3.5;-0.21;-0.4;0.7)    | (2.8;5.91;0.7;1.5;2.8;4.1)    | 24 | (-4.2;-9.1;-7.51;0.1;-5.3;-0.2)  | (-8.4;9.12;-1.2;2.3;3.7;5.1)  |
| 10 | (-6.42;-9.41;11.05;-5.08;-0.2;0.5) | (0.34;-0.03;1.1;2.3;3.7;5.1)  | 25 | (-3.4;-5.1;8.7;11.45;-1.3;2.1)   | (0.31;-0.03;1.1;2.3;3.7;5.1)  |

|    |                                    |                   |    |                                |                    |
|----|------------------------------------|-------------------|----|--------------------------------|--------------------|
| 11 | (2.4;-0.4;1.41;-6.5;0.34;-0.12)    | (5.34;-4.3;0.12)  | 26 | (-7.1;-4.51;-9.12;0.4;-0.12)   | (0.21;-6.43;-0.12) |
| 12 | (5.1;-2.15;-3.5;0.41;-0.04;-0.12)  | (5.43;0.1;1.12)   | 27 | (4.2;-6.17;-5.4;0.23;-0.12)    | (-0.23;1.5;5.12)   |
| 13 | (-7.55;-2.12;9.88;-1.1;-2.3;-0.12) | (7.65;-5.01;1.12) | 28 | (-4.32;-3.27;8.99;-2.3;-0.12)  | (9.64;1.6;4.12)    |
| 14 | (-0.4;8.1;3.5;-4.11;-6.41;1.12)    | (-0.45;2.65;1.12) | 29 | (5.5;-1.2;6.4;9.7;-0.2;-0.12)  | (0.4;8.2;6.12)     |
| 15 | (-3.2;-8.1;-6.31;0.3;-0.3;-0.12)   | (-1.4;0.3;-8.12)  | 30 | (3.5;-0.6;3.72;-8.4;0.3;-0.12) | (2.3;0.34;-0.12)   |

*Приклад розв'язання завдання. Дано:*

$$A^* = (-7.12; -3.17; 3.21; -4.3; -13.2; -0.12; 1.01; -0.4; -5.5), \mathbf{x}^* = (7.41; 3.6; -6.8).$$

Обчислимо норми вектору  $\mathbf{x}^*$  та його абсолютну й відносну похибки у кожній з цих норм. Маємо (в даному випадку  $m=3$ ):

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

Оскільки компоненти вектора задані з усіма вірними цифрами, то компоненти вектору похибки  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$  оцінюються так:

$$|e_1| = \Delta(x_1^*) = 0.01, |e_2| = \Delta(x_2^*) = 0.1, |e_3| = \Delta(x_3^*) = 0.1.$$

Обчислимо норми вектору похибки  $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ , які й будуть оцінками його абсолютної похибки. Маємо:

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

Відносні похибки вектора в різних нормах обчислимо за допомогою формули (3):

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

Перейдемо до знаходження похибок матриці  $A^*$ . Обчислення зручно організувати на аркуші електронної таблиці (рис. 1).

|    | A                 | B     | C     | D | E                    | F                   | G          | H    | I     |
|----|-------------------|-------|-------|---|----------------------|---------------------|------------|------|-------|
| 1  | Початкова матриця |       |       |   |                      | Матриця модулів     |            |      | Сума  |
| 2  | -7,12             | -3,17 | 3,21  |   |                      | 7,12                | 3,17       | 3,21 | 13,5  |
| 3  | -4,3              | -13,2 | -0,12 |   |                      | 4,3                 | 13,2       | 0,12 | 17,62 |
| 4  | 1,01              | -0,4  | -5,5  |   |                      | 1,01                | 0,4        | 5,5  | 6,91  |
| 5  |                   |       |       |   | Сума                 | 12,43               | 16,77      | 8,83 |       |
| 6  |                   |       |       |   | Норми матриці        |                     |            |      |       |
| 7  |                   |       |       |   | $\ A\ _1$            | $\ A\ _e$           | $\ A\ _3$  |      |       |
| 8  |                   |       |       |   | 16,77                | 17,18202            | 17,62      |      |       |
| 9  |                   |       |       |   |                      |                     |            |      |       |
| 10 |                   |       |       |   |                      | Матриця погіршень E |            |      | Сума  |
| 11 |                   |       |       |   |                      | 0,01                | 0,01       | 0,01 | 0,03  |
| 12 |                   |       |       |   |                      | 0,1                 | 0,1        | 0,01 | 0,21  |
| 13 |                   |       |       |   |                      | 0,01                | 0,1        | 0,1  | 0,21  |
| 14 |                   |       |       |   | Сума                 | 0,12                | 0,21       | 0,12 |       |
| 15 |                   |       |       |   | Абсолютні погіршення |                     |            |      |       |
| 16 |                   |       |       |   | $\ E\ _1$            | $\ E\ _e$           | $\ E\ _3$  |      |       |
| 17 |                   |       |       |   | 0,21                 | 0,201246            | 0,21       |      |       |
| 18 |                   |       |       |   |                      |                     |            |      |       |
| 19 |                   |       |       |   | Відносні погіршення  |                     |            |      |       |
| 20 |                   |       |       |   | $\delta_1$           | $\delta_e$          | $\delta_3$ |      |       |
| 21 |                   |       |       |   | 0,012522             | 0,011713            | 0,011918   |      |       |
| 22 |                   |       |       |   | 1,252%               | 1,171%              | 1,192%     |      |       |

Рис. 1. Організація обчислень похибок на листі електронної таблиці.

Елементи початкової матриці розмістимо в діапазоні комірок A2:C4. Нам знадобиться також допоміжна матриця, що складається з модулів елементів матриці  $A^*$ . Розмістимо її у діапазоні F2:H4, для чого введемо в комірку F2 формулу  $=ABS(A2)$  та скопіємо вміст комірки на весь діапазон F2:H4. Для обчислення норм матриці  $\|\cdot\|_1$  та  $\|\cdot\|_\infty$  необхідно отримати значення сум модулів елементів матриці по стовпцях та рядках. Щоб отримати суми модулів елементів по стовпцях, введемо в комірку F5 формулу  $=СУММ(F2:F4)$  та скопіємо вміст комірки у діапазон F5:H5. Аналогічно для обчислення суми модулів елементів по

рядках введемо формулу =СУММ(F2:H2) у комірку I2 та скопіюємо вміст цієї комірки у діапазон I2:I4.

Все підготовлене для обчислення норм матриці  $A^*$ , значення яких розраховуватимемо у комірках E8 – G8. У комірку E8 введемо формулу =МАКС(F5:H5) для обчислення норми  $\|A^*\|_1$  згідно з формулою (4) (максимум з сум модулів елементів по стовпцях; рис. 2).

| E             | F               | G         | H    | I     |
|---------------|-----------------|-----------|------|-------|
|               | Матриця модулів |           |      | Сума  |
|               | 7,12            | 3,17      | 3,21 | 13,5  |
|               | 4,3             | 13,2      | 0,12 | 17,62 |
|               | 1,01            | 0,4       | 5,5  | 6,91  |
| Сума          | 12,43           | 16,77     | 8,83 |       |
| Норми матриці |                 |           |      |       |
| $\ A\ _1$     | $\ A\ _e$       | $\ A\ _3$ |      |       |
| =МАКС(F5:H5)  |                 | 17,62     |      |       |

Рис.2. Обчислення норми  $\|A^*\|_1$

| E             | F               | G            | H    | I     |
|---------------|-----------------|--------------|------|-------|
|               | Матриця модулів |              |      | Сума  |
|               | 7,12            | 3,17         | 3,21 | 13,5  |
|               | 4,3             | 13,2         | 0,12 | 17,62 |
|               | 1,01            | 0,4          | 5,5  | 6,91  |
| Сума          | 12,43           | 16,77        | 8,83 |       |
| Норми матриці |                 |              |      |       |
| $\ A\ _1$     | $\ A\ _e$       | $\ A\ _3$    |      |       |
| 16,77         | 17,18202        | =МАКС(I2:I4) |      |       |

Рис. 4. Обчислення норми  $\|A^*\|_\infty$

| E             | F                      | G         | H    | I     |
|---------------|------------------------|-----------|------|-------|
|               | Матриця модулів        |           |      | Сума  |
|               | 7,12                   | 3,17      | 3,21 | 13,5  |
|               | 4,3                    | 13,2      | 0,12 | 17,62 |
|               | 1,01                   | 0,4       | 5,5  | 6,91  |
| Сума          | 12,43                  | 16,77     | 8,83 |       |
| Норми матриці |                        |           |      |       |
| $\ A\ _1$     | $\ A\ _e$              | $\ A\ _3$ |      |       |
| 16,77         | =КОРЕНЬ(СУММКВ(F2:H4)) |           |      |       |

Рис. 3. Обчислення норми  $\|A^*\|_e$

У комірку F8 введемо формулу =КОРЕНЬ(СУММКВ(F2:H4)) для обчислення норми  $\|A^*\|_e$  згідно з формулою (7) (рис. 3). Для обчислення норми  $\|A^*\|_\infty$  в комірку G8 введемо формулу =МАКС(I2:I4) згідно з формулою (6) (максимум з суми модулів елементів по рядках). В результаті норми матимуть такі значення:

$$\|A^*\|_1 = 16.77; \quad \|A^*\|_e = 17.18202258; \quad \|A^*\|_\infty = 17.62.$$

Тепер оцінимо абсолютну похибку матриці, тобто величину  $\Delta(A^*) = \|A - A^*\|$ . Для цього треба обчислити норму матриці, що складається з абсолютних похибок елементів початкової матриці  $A^*$ . Оскільки елементи початкової матриці задані з усіма вірними цифрами, то матриця абсолютних похибок буде мати вигляд

$$E = (0.01; 0.01; 0.01; 0.1; 0.1; 0.01; 0.01; 0.1; 0.1 \quad ).$$

Обчислення норм цієї матриці організуємо аналогічно розрахункам норм матриці  $A^*$  (див. рис. 1). У комірках E17 – G17 отримаємо такі значення абсолютних похибок матриці  $A^*$  згідно з формулою (8) у різних нормах:

$$\Delta_1(A^*) = \|A - A^*\|_1 = \|E\|_1 = 0.21;$$

$$\Delta_e(A^*) = \|A - A^*\|_e = \|E\|_e = 0.201246118;$$

$$\Delta_\infty(A^*) = \|A - A^*\|_\infty = \|E\|_\infty = 0.21.$$

Відносну похибку матриці розрахуємо згідно з формулою (9):

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

### 3.2. Обумовленість задачі розв'язання системи лінійних рівнянь.

Будемо припускати, що матриця системи  $A$  задана і є невинродженою. Відомо, що в цьому випадку розв'язок системи існує, єдиний і стійкий за вхідними даними.

Обумовленість задачі. Так само як і інші задачі, задача обчислення розв'язку системи може бути як добре обумовленою, так і погано обумовленою.

#### Теорема про оцінку похибки розв'язку за похибками вхідних даних.

Нехай  $x$  – розв'язок системи  $Ax = b$ , а  $x^*$  – розв'язок системи  $A^*x^* = b^*$ ; тоді

$$\delta(\mathbf{x}^*) \leq \text{cond}(A) \cdot (\delta(\mathbf{b}^*) + \delta(A^*)), \quad (10)$$

де

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (11)$$

– відносне число обумовленості системи.

Якщо число обумовленості більше 10, то система є погано обумовленою, оскільки можливе сильне зростання похибки результату.

**Завдання 2.** Задана система рівнянь

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\}$$

Вважатимемо, що коефіцієнти  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $b_2$  задані точно. Для формування коефіцієнтів  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_1$  слід обчислити значення стандартних функцій.

1. Розв'язати систему (будь-яким методом), обчисливши значення  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_1$  з якомога більшою точністю.

2. Сформувати нову систему рівнянь, округливши значення стандартних функцій під час обчислення коефіцієнтів  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $b_1$  до двох знаків після коми. Розв'язати отриману («наближену») систему рівнянь.

3. Знайти абсолютну та відносну похибки отриманого наближеного розв'язку у нормі  $\|\cdot\|_\infty$ , порівнюючи його з розв'язком «точної» системи.

4. Обчислити число обумовленості матриці системи у нормі  $\|\cdot\|_\infty$  за формулою (11).

5. Отримати теоретичну оцінку відносної та абсолютної похибок наближеного розв'язку з урахуванням числа обумовленості за формулою (10).

6. Порівняти отриману теоретичну оцінку похибки наближеного розв'язку з «експериментальною» (обчисленою в п. 3).

### Варіанти завдань

| №  | $(a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22})$         | $(b_1; b_2)$          | №  | $(a_{11}; a_{12}; a_{21}; a_{22})$      | $(b_1; b_2)$           |
|----|--------------------------------------------|-----------------------|----|-----------------------------------------|------------------------|
| 1  | $(\sqrt{3}; \sqrt{3.005}; 1.732; 1.733)$   | $(e^{0.8}; 4.81)$     | 16 | $(e^{1.2}; \sin(1.5); 3.320; 0.997)$    | $(\sqrt{20}; 2.87)$    |
| 2  | $(\sqrt{5}; \sqrt{5.005}; 2.236; 2.238)$   | $(e^{1.1}; 1.95)$     | 17 | $(e^{0.8}; \sin(1.4); 2.225; 0.985)$    | $(\sqrt{3}; 30; 2.25)$ |
| 3  | $(\sqrt{7}; \sqrt{7.005}; 2.645; 2.647)$   | $(-\sqrt{3.8}; 5.76)$ | 18 | $(e^{1.3}; \sin(0.8); 3.669; 0.717)$    | $(\ln(30); 4.29)$      |
| 4  | $(\sqrt{9.1}; \sqrt{9.005}; 3.017; 3.000)$ | $(e^{2.3}; -1.75)$    | 19 | $(e^{1.5}; \sin(0.7); 4.481; 0.644)$    | $(e^{2.2}; 4.29)$      |
| 5  | $(\sqrt{3}; \sqrt{27}; 1.732; 5.190)$      | $(e^{2.3}; 0.923)$    | 20 | $(\ln(4); \sqrt{7.005}; 1.386; 2.647)$  | $(\sqrt{3}; 80; -0.5)$ |
| 6  | $(\sqrt{3}; \sqrt{19}; 1.732; 4.359)$      | $(e^{2.4}; 0.827)$    | 21 | $(\sqrt{3}; 5; e^{1.2}; 1.710; 3.320)$  | $(\sin(1.5); 10)$      |
| 7  | $(\sqrt{3}; \sqrt{17}; 1.732; 4.122)$      | $(e^{2.3}; 1.293)$    | 22 | $(\sqrt{3}; 6; e^{0.8}; 1.817; 2.225)$  | $(\cos(0.1); 7.2)$     |
| 8  | $(\ln(5); \sqrt{3}; 1.609; 1.732)$         | $(e^2; 0.929)$        | 23 | $(\sqrt{3}; 7; e^{1.3}; 1.913; 3.669)$  | $(\ln(55); 7.21)$      |
| 9  | $(\ln(4); \sqrt{17}; 1.386; 4.122)$        | $(e^2; 0.929)$        | 24 | $(\sqrt{3}; 9; e^{1.5}; 2.080; 4.481)$  | $(\ln(65); 7.21)$      |
| 10 | $(\ln(5); \sqrt{19}; 1.609; 4.359)$        | $(e^2; 0.929)$        | 25 | $(\sqrt{3}; 10; e^{1.7}; 2.154; 5.474)$ | $(\sin(1.6); 8.7)$     |
| 11 | $(\ln(6); \sqrt{27}; 1.791; 5.190)$        | $(\sqrt{15}; 0.321)$  | 26 | $(\sqrt{17}; e^{1.2}; 4.122; 3.320)$    | $(\ln(50); 4.29)$      |
| 12 | $(\sqrt{27}; \sin(1.5); 5.190; 0.997)$     | $(\sqrt{51}; -0.731)$ | 27 | $(\sqrt{5}; \sin(1.5); 2.236; 0.997)$   | $(e^{2.2}; 0.929)$     |
| 13 | $(\sqrt{19}; \sin(1.4); 4.359; 0.985)$     | $(\ln(50); -0.5)$     | 28 | $(\ln(5); \sqrt{27}; 1.609; 5.190)$     | $(e^{2.8}; 10.81)$     |
| 14 | $(\ln(10); \sqrt{3}; 2.302; 1.732)$        | $(e^2; -0.731)$       | 29 | $(e^{1.3}; \sin(0.8); 3.669; 0.717)$    | $(\sqrt{10}; 2.87)$    |
| 15 | $(\sqrt{17}; \sin(0.8); 4.122; 0.717)$     | $(e^{0.8}; -0.532)$   | 30 | $(\ln(3); \sqrt{19}; 1.609; 4.359)$     | $(e^{2.1}; 0.929)$     |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

$$A = (\ln(5); \sqrt{3}; 1.609; 1.732), \quad \mathbf{b} = (\sin(0.6); 0.929).$$

Обчислення зручно організувати на аркуші електронної таблиці (рис. 5).

|    | A                               | B          | C    | D        | E    | F                                   | G        | H        | I         | J | K        |
|----|---------------------------------|------------|------|----------|------|-------------------------------------|----------|----------|-----------|---|----------|
| 1  | A                               |            |      | b        |      | A*                                  |          |          | b*        |   | b*       |
| 2  | 1,60943791                      | 1,73205081 |      | 0,564642 |      | 1,61                                | 1,73     |          | 0,56      |   | 0,929    |
| 3  | 1,609                           | 1,732      |      | 0,929    |      | 1,609                               | 1,732    |          | 0,929     |   |          |
| 4  |                                 |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 5  | A <sup>-1</sup>                 |            |      | x        |      | A <sup>*-1</sup>                    |          |          | x*        |   | x*       |
| 6  | 2559,42326                      | -2559,4983 |      | -932,615 |      | 349,899                             | -349,495 |          | -128,7374 |   | 128,7374 |
| 7  | -2377,66283                     | 2378,30994 |      | 866,9205 |      | -325,051                            | 325,2525 |          | 120,1313  |   |          |
| 8  |                                 |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 9  | A                               |            | ΔA*  |          |      | Експериментальна оцінка погрішності |          |          |           |   |          |
| 10 | 3,34148872                      |            | 0,01 | 0,01     |      | x-x*                                |          | Δx*      | δx*       |   |          |
| 11 |                                 |            | 0    | 0        |      | -803,878                            |          | 803,8775 | 6,244321  |   |          |
| 12 |                                 |            |      |          |      | 746,7892                            |          |          | 624,432%  |   |          |
| 13 | A <sup>-1</sup>                 |            | ΔA*  | δA*      |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 14 | 5118,92159                      |            | 0,02 | 0,005985 |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 15 |                                 |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 16 | cond(A)=  A  *  A <sup>-1</sup> |            | Δb*  |          | Δb*  | δb*                                 |          |          |           |   |          |
| 17 | 17104,8188                      |            | 0,01 |          | 0,01 | 0,010764                            |          |          |           |   |          |
| 18 |                                 |            | 0    |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 19 | Теоретична оцінка погрішності   |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 20 | δx*                             |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 21 | 286,499193                      |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |
| 22 | 28649,919%                      |            |      |          |      |                                     |          |          |           |   |          |

Рис. 5. Організація обчислень числа обумовленості та оцінок похибок наближеного розв'язку.

"Точну" матрицю A розмістимо у діапазоні A2:B3, "Наближену" матрицю A\* – у діапазоні F2:G2. Відповідно "точний" вектор правих частин розмістимо у діапазоні D2:D3, а наближений – у діапазоні I2:I3. Систему будемо розв'язувати матричним методом. Для цього у діапазоні A6:B7 обчислимо обернену матрицю до матриці A, а в діапазоні F6:G7 – обернену до "наближеної" матриці A\*. Для отримання оберненої матриці спочаку виділимо діапазон A6:B7 та введемо формулу =МОБР(A2:B3). Для завершення введення натиснемо комбінацію клавіш Shift-Enter, щоб застосувати введену формулу до всіх комірок діапазону. Аналогічні дії зробимо, щоб отримати у діапазоні F6:G7 обернену до "наближеної" матриці A\*. Вектор розв'язків системи отримаємо за формулою

$$x = A^{-1} \cdot b,$$

тобто взявши добуток оберненої матриці та вектора правих частин. Для цього, виділивши діапазон D6:D7, введемо формулу =МУМНОЖ(A6:B7;D2:D3), і також завершимо введення натисненням Shift-Enter. Аналогічно вектор розв'язків "наближеної" системи отримаємо у діапазоні I6:I7.

Для отримання оцінок похибок нам необхідно обчислити норми векторів розв'язків, правих частин, похибок, а також норми початкової та оберненої матриць. Будемо використовувати норму  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Для знаходження норми вектору  $b^*$  ("наближеної" правої частини) у комірку K2 введемо формулу =МАКС(ABS(I2);ABS(I3)). Аналогічну формулу введемо в комірку K6 для обчислення норми вектора розв'язків  $x^*$ . В діапазоні F11:F12 розмістимо формули для компонент вектору похибок наближеного розв'язку, ввівши у комірку F11 формулу =D6-I6 і скопіювавши її вміст у комірку F12. Норму вектору похибок (абсолютну похибку наближеного розв'язку) знайдемо у комірці H11 за допомогою формули =МАКС(ABS(F11);ABS(F12)), а відносну похибку – у комірці I11 (формула =H11/K6). Отримаємо таке значення відносної похибки:

$$\delta_{\infty}(x^*) = 6.244321125 \leq 6.25 = 625\%.$$

Тепер отримаємо теоретичну оцінку відносної похибки наближеного розв'язку. Для цього обчислимо норми початкової та оберненої матриць у нормі  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Для обчислення норми початкової матриці у комірку A10 введемо формулу =МАКС(ABS(A2)+ABS(B2);ABS(A3)+ABS(B3)), а норми оберненої матриці – аналогічну формулу =МАКС(ABS(A6)+ABS(B6);ABS(A7)+ABS(B7)) у комірку A14. Число обумовленості обчислюється в комірці A17 як добуток отриманих норм прямої та оберненої матриць.

Знайдемо абсолютні похибки матриці та вектору правих частин. Для цього у комірках C10:D11 сформуємо матрицю похибок, а у діапазоні C17:C18 – компоненти вектору похибок правих частин. Відповідні норми обчислимо у комірках C14 (формула =МАКС(ABS(C10)+ABS(D10);ABS(C11)+ABS(D11))) та E17 (формула =МАКС(ABS(C17);ABS(C18))). Відносні похибки матриці та вектора правих частин отримаємо у комірках D14 та F17, розділивши отримані абсолютні похибки на відповідні норми матриці та вектору правих частин.

Теоретичну оцінку відносної похибки отримаємо за формулою (10) у комірці A21, ввівши формулу =A17\*(D14+F17). Отримаємо таку оцінку відносної похибки:

$$\delta_{\infty}^{\text{теор}}(\mathbf{x}^*) = 286.4991935 \leq 286.5 = 28650\%,$$

тобто набагато більше, ніж отримана експериментальна оцінка.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПРЯМИМИ МЕТОДАМИ

**Мета роботи.** Навчитись розкладати матрицю системи на нижню та верхню трикутні. Засвоїти метод розв'язання системи лінійних рівнянь за схемою Холецького. Засвоїти метод розв'язання системи лінійних рівнянь з трьохдіагональною матрицею – метод прогонки.

### Теоретичний матеріал.

#### 4.1 Загальна класифікація методів розв'язання систем лінійних рівнянь.

Для розв'язання системи лінійних рівнянь

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2; \dots\} \quad (1)$$

або, у скороченому вигляді,

$$Ax = b, \quad (2)$$

використовуються дві основні групи методів: *прямі* та *ітераційні*. У *прямих* методах розв'язок отримують за скінченне число кроків обчислень, яке залежить тільки від порядку  $m$  системи. Теоретично, якби обчислення проводились з нескінченною кількістю десяткових знаків, ці методи дозволяють отримати "точний" розв'язок, але обмеження на величину розрядної сітки у комірках пам'яті комп'ютера завжди призводять до округлень під час обчислень; таким чином, користуючись прямими методами, ми завжди отримуємо наближений розв'язок. В *ітераційних* методах задається початкове наближення до розв'язку, яке потім уточнюється в процесі обчислень. При цьому необхідне число ітерацій залежить як від заданої точності обчислення розв'язку, так і від структури і вмісту матриці системи та її вектору правих частин.

В свою чергу, прямі та ітераційні методи підрозділяються на загальні, розраховані на системи рівнянь з матрицею загального вигляду, і спеціалізовані, які враховують спеціальну структуру матриці системи (розріджені, стрічкові, трьохдіагональні матриці тощо).

#### 4.2 Метод LU-розкладу матриці системи (метод Холецького).

Найбільш поширеним загальним прямим методом розв'язання систем лінійних рівнянь є метод Гауса (послідовного виключення невідомих). За майже двісті років застосування цього методу розроблено чимало різноманітних його модифікацій та схем організації обчислень. Доволі популярною залишається схема реалізації метода Гауса, запропонована французьким вченим Андре-Луї Холецьким на початку XX століття.

Метод Холецького заснований на наступній теоремі.

Теорема про LU-розклад. Нехай усі кутові мінори матриці  $A$  відмінні від нуля. Тоді матрицю  $A$  можна представити (єдиним способом) у вигляді добутку

$$A = LU, \quad ,$$

де

$$L = (l_{11}; 0; \dots; 0; 0; l_{21}; l_{22}; \dots; 0; 0; l_{31}; l_{32}; l_{33}; 0; 0; \dots; \dots; \dots; \dots; l_{m1}; l_{m2}; l_{m3}; \dots; \dots)$$

– нижня трикутна матриця (від англійського lower - нижній) з ненульовими діагональними елементами та

$$U = (1; u_{12}; \dots; u_{1m-1}; u_{1m}; 0; 1; \dots; u_{2m-1}; u_{2m}; 0; 0; 1; u_{3m-1}; u_{3m}; \dots; \dots; \dots; \dots; 0; \dots)$$

– верхня трикутна матриця (від англійського upper - верхній) з одиничною діагоналлю.

Можна довести, що матриця  $L$  – це матриця, до якої перетворюється матриця системи після проведення «прямого ходу» метода Гауса; матриця  $U$  складається з множників відповідного рядка в процесі Гаусова виключення.

Коефіцієнти матриць  $L$  та  $U$  обчислюються послідовно за формулами:

Ошибка! (6)

та

Ошибка! (7)

Знаходженням коефіцієнтів матриць  $L$  та  $U$  завершується «прямий хід» методу Холецкого. «Зворотний хід» полягає у розв'язанні ланцюга рівнянь

$$Ly = b, \quad Ux = y. \quad (5)$$

Оскільки матриці  $L$  та  $U$  є трикутними, то системи (5) легко розв'язуються, а саме:

Ошибка! (6)

та

Ошибка! (7)

Зауважимо, що схему Холецкого вигідно використовувати у випадках, коли необхідно розв'язати декілька систем рівнянь з однакою матрицею  $A$  та з різними правими частинами  $b$  (наприклад, для обчислення коефіцієнтів оберненої матриці). В цьому випадку треба один раз провести процедуру  $LU$ -розкладу (так звану «факторизацію» матриці  $A$ ), яка займає лівову частку всієї обчислювальної роботи, а потім провести необхідну кількість разів обчислення «зворотного ходу» для кожної правої частини за формулами (6), (7).

**Завдання 1.** Знайти розклад даної матриці  $A$  на добуток нижньої та верхньої трикутних матриць. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $Ax = b$  за схемою Холецкого.

*Варіанти завдань*

| №  | $A$                            | $b$            | №  | $A$                             | $b$           |
|----|--------------------------------|----------------|----|---------------------------------|---------------|
| 1  | (-1;-4;4;-4;-4;-11;36;-6;5;1)  | (-7;127;-49;)  | 16 | (-1;4;4;-6;6;-25;-26;39;0;4;1)  | (28;-178;88;  |
| 2  | (1;0;-1;4;-3;-5;-7;-17;2;-5;-) | (-22;86;-4;4)  | 17 | (-1;-7;-5;-5;-1;-3;-1;-17;0;7;) | (-42;-30;41;  |
| 3  | (-1;-4;0;5;-1;1;-20;-10;-3;-)  | (23;18;64;-4)  | 18 | (1;1;-1;4;-4;-7;10;-37;-4;-5;1) | (-18;165;-7;  |
| 4  | (-1;-2;-2;-5;2;3;4;11;3;8;3;)  | (-1;6;-14;-24) | 19 | (1;-5;4;-4;3;-13;18;-20;4;-17)  | (36;156;171)  |
| 5  | (1;1;-1;1;-1;1;1;-1;-3;2;2;-7) | (-5;1;-16;-96) | 20 | (1;3;-2;-4;-2;-5;6;6;-2;-4;3;-) | (43;-77;-13;  |
| 6  | (-1;2;-1;2;-4;7;-7;5;-4;5;-8;) | (4;5;-32;15)   | 21 | (-1;-5;1;-3;-4;-13;-10;-19;0;6) | (-19;-97;-18) |
| 7  | (1;5;1;5;-5;-23;-15;-27;-5;-)  | (-1;61;-14;3)  | 22 | (1;5;0;-3;-4;-15;-15;17;-4;-2)  | (-33;222;23;  |
| 8  | (-1;-4;-3;-3;3;16;13;17;3;1)   | (-46;206;70;   | 23 | (1;-2;-1;1;7;-19;-42;27;0;1;9)  | (-11;-182;89; |
| 9  | (-1;4;0;2;4;-21;20;-23;-5;2)   | (12;-168;93;   | 24 | (-1;5;3;3;2;-15;-11;-16;6;-32)  | (23;-91;-156; |
| 10 | (1;3;0;7;-2;1;7;-21;4;9;-6;4)  | (-65;144;-32)  | 25 | (1;4;7;2;4;15;21;10;4;21;61;    | (42;133;331)  |
| 11 | (-1;2;7;-4;-7;19;14;-3;-6;10)  | (26;102;233)   | 26 | (1;2;6;2;-2;-3;-17;-7;1;4;0;8;  | (69;-190;77;  |
| 12 | (1;5;1;2;0;6;30;-30;-1;-9;-1)  | (25;246;-35)   | 27 | (-1;-5;-3;4;5;22;9;-41;1;6;5;1) | (-30;57;61;5; |
| 13 | (-1;-6;-2;5;5;28;0;-27;-5;-3)  | (-4;-36;-79;4) | 28 | (-1;-1;0;-7;0;7;7;21;-4;1;7;-3) | (-45;126;-42; |
| 14 | (-1;5;3;5;-3;16;14;14;5;-24)   | (37;116;-10;   | 29 | (1;-5;-1;3;-2;11;-2;-4;7;-30;-) | (-9;27;-78;4; |
| 15 | (1;-3;5;2;-3;10;-19;-5;-5;11)  | (-23;93;-11;   | 30 | (1;3;-5;1;2;1;-15;2;7;20;-40;   | (-31;-47;-20; |

*Приклад розв'язання завдання.* Дано:

$$A = (1;6;5;-4;5;28;23;-32;3;13;17;-49;6;32;31;-56), \quad b = (17;27;-136;-56).$$

Обчислення зручно організувати у вигляді таблиці (див. табл. 1). Вона складається з двох частин. У лівій половині дається схема запису результатів обчислень. Права половина містить результати обчислень згідно вказаної схеми.

Таблиця 1. Організація обчислень за схемою Холецкого.

| Розділ | $x_1$    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$    |       | $\Sigma$      | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |      | $\Sigma$ |
|--------|----------|----------|----------|----------|-------|---------------|-------|-------|-------|-------|------|----------|
| I      | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $b_1$ | $a_{1\Sigma}$ | 1     | 6     | 5     | -4    | 17   | 25       |
|        | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $b_2$ | $a_{2\Sigma}$ | 5     | 28    | 23    | -32   | 27   | 51       |
|        | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ | $a_{34}$ | $b_3$ | $a_{3\Sigma}$ | 3     | 13    | 17    | -49   | -136 | -152     |
|        | $a_{41}$ | $a_{42}$ | $a_{43}$ | $a_{44}$ | $b_4$ | $a_{4\Sigma}$ | 6     | 32    | 31    | -56   | -56  | -43      |

|     |          |   |          |          |          |          |               |               |               |               |    |    |    |    |    |    |
|-----|----------|---|----------|----------|----------|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|----|----|----|----|----|----|
| II  | $l_{11}$ | 1 | $u_{12}$ | $u_{13}$ | $u_{14}$ | $u_{15}$ | $u_{1\Sigma}$ | 1             | 1             | 6             | 5  | -4 | 17 | 25 |    |    |
|     | $l_{21}$ |   | $l_{22}$ | 1        | $u_{23}$ | $u_{24}$ | $u_{25}$      | $u_{2\Sigma}$ | 5             | -2            | 1  | 1  | 6  | 29 | 37 |    |
|     | $l_{31}$ |   | $l_{32}$ |          | $l_{33}$ | 1        | $u_{34}$      | $u_{35}$      | $u_{3\Sigma}$ | 3             | -5 | 7  | 1  | -1 | -6 | -6 |
|     | $l_{41}$ |   | $l_{42}$ |          | $l_{43}$ |          | $l_{44}$      | 1             | $u_{45}$      | $u_{4\Sigma}$ | 6  | -4 | 5  | -3 | 1  | 4  |
| III |          |   |          |          |          | $y_1$    | $x_1$         |               |               |               |    |    |    | 17 | 1  |    |
|     |          |   |          |          |          | $y_2$    | $x_2$         |               |               |               |    |    |    | 29 | 7  |    |
|     |          |   |          |          |          | $y_3$    | $x_3$         |               |               |               |    |    |    | -6 | -2 |    |
|     |          |   |          |          |          | $y_4$    | $x_4$         |               |               |               |    |    |    | 4  | 4  |    |

### Порядок заповнення таблиці.

1. В перший розділ таблиці I вписуємо матрицю коефіцієнтів системи, компоненти вектора вільних членів та контрольні суми.

2. Елементи стовпця  $x_1$  з розділу I переносимо у стовпець  $x_1$  розділу II, оскільки за формулами (3)  $l_{i1} = a_{i1}$ ,  $i=1,2,3,4$ .

3. Обчислюємо елементи першого рядка розділу II. Для цього, згідно з формулами (3), всі елементи першого рядка розділу I ділимо на елемент  $a_{11}=l_{11}$ , тобто, в даному випадку, на 1:

**Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!.**

4. Заповнюємо стовпець  $x_2$  розділу II, починаючи з другого рядка. Користуючись формулами (3), визначаємо  $l_{22}$ ,  $l_{32}$ ,  $l_{42}$ :

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 28 - 5 \cdot 6 = 28 - 30 = -2,$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 13 - 3 \cdot 6 = 13 - 18 = -5,$$

$$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = 32 - 6 \cdot 6 = 32 - 36 = -4.$$

5. Заповнюємо другий рядок розділу II, визначаючи  $u_{23}$ ,  $u_{24}$ ,  $u_{25}$ ,  $u_{2\Sigma}$  за формулами (4):

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

6. Заповнюємо стовпець  $x_3$  розділу II, обчислюючи його елементи  $l_{33}$ ,  $l_{43}$  за формулами (3):

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 17 - 3 \cdot 5 - (-5) \cdot 1 = 17 - 15 + 5 = 7,$$

$$l_{43} = a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} = 31 - 6 \cdot 5 - (-4) \cdot 1 = 31 - 30 + 4 = 5.$$

7. Заповнюємо третій рядок розділу II, визначаючи  $u_{34}$ ,  $u_{35}$ ,  $u_{3\Sigma}$  за формулами (4):

**Ошибка!**

**Ошибка!**

**Ошибка!**

8. Продовжуємо процес аналогічно, доки не буде заповнено весь розділ II.

Таким чином, заповнення розділу II відбувається способом "ялинки": стовпець – рядок, стовпець – рядок і т. ін.

9. Визначаємо компоненти векторів  $y$  та  $x$  за формулами (6), (7) та заносимо їх у розділ III:

**Ошибка!**

**Ошибка!,**

**Ошибка!,**

**Ошибка!,**

$$x_4 = y_4 = 4,$$

$$x_3 = y_3 - u_{34}x_4 = -6 - (-1) \cdot 4 = -2,$$

$$x_2 = y_2 - u_{23}x_3 - u_{24}x_4 = 29 - 1 \cdot (-2) - 6 \cdot 4 = 7,$$

$$x_1 = y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - u_{14}x_4 = 17 - 6 \cdot 7 - 5 \cdot (-2) - (-4) \cdot 4 = 1.$$

10. Поточний контроль здійснюємо за допомогою стовпця  $\Sigma$ , над яким виконуємо ті ж самі дії, що й над стовпцем вільних членів.

Відповідь:

$$L = (1; 0; 0; 0; 5; -2; 0; 0; 3; -5; 7; 0; 6; -4; 5; -3),$$

$$U = (1; 6; 5; -4; 0; 1; 1; 6; 0; 0; 1; -1; 0; 0; 0; 1), \mathbf{x} = (1; 7; -2; 4).$$

### 4.3 Метод прогонки.

Якщо матриця системи рівнянь є розрідженою, тобто містить велику кількість нульових елементів, то часто застосовують різні модифікації методу Гауса, що враховують таку специфічну структуру матриці і дозволяють значно скоротити обсяг обчислювальної роботи порівняно із загальною схемою метода Гауса. Зокрема, для систем з трьохдіагональною матрицею

$$\{b_1x_1+c_1x_2 \qquad \qquad \qquad =d_1;a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3 \qquad \qquad \qquad =d_2;.....\}$$

застосовується метод прогонки.

Перетворимо перше рівняння до вигляду

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1, \quad (9)$$

де

$$\text{Ошибка!}, \text{Ошибка!}. \quad (10)$$

Підставимо отриманий вираз (9) у друге рівняння (8) та виразимо з нього  $x_2$ :

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2,$$

і т. ін. На  $i$ -му кроці  $i$ -те рівняння системи (8) перетворюється до вигляду

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad (11)$$

де

$$\text{Ошибка!}, \text{Ошибка!}, \quad i=2,3,\dots,m-1. \quad (12)$$

На  $m$ -му кроці отримаємо значення лише коефіцієнта  $\beta_m$ :

**Ошибка!.** (13)

На цьому завершується «прямий хід» прогонки. На першому кроці «зворотного ходу» спочатку обчислюють

$$x_m = \beta_m, \quad (14)$$

а значення інших невідомих послідовно знаходяться за формулами

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, \quad i=m-1, m-2, \dots, 1. \quad (15)$$

**Завдання 2.** Методом прогонки розв'язати систему лінійних рівнянь з трьохдіагональною матрицею  $A$ .

## Варіанти завдань

| №  | $A$                          | $b$           | №  | $A$                            | $b$           |
|----|------------------------------|---------------|----|--------------------------------|---------------|
| 1  | (8;-1;0;0;0;-1;5;2;0;0;0;-3; | (-4;22;-15;-2 | 16 | (8;-1;0;0;0;-1;9;-3;0;0;0;1;7; | (-37;37;31;-  |
| 2  | (5;-1;0;0;0;2;5;3;0;0;0;-3;5 | (-7;-7;-23;-7 | 17 | (4;4;0;0;0;2;9;1;0;0;0;-2;6;3  | (-20;-16;8;-4 |
| 3  | (6;2;0;0;0;2;5;1;0;0;0;4;8;- | (30;20;-18;9  | 18 | (7;1;0;0;0;1;9;3;0;0;0;-1;5;-2 | (-31;-37;-9;  |
| 4  | (4;-1;0;0;0;2;8;3;0;0;0;-1;8 | (-5;-25;2;21  | 19 | (8;-3;0;0;0;-1;8;1;0;0;0;-1;8; | (-20;29;-35;  |
| 5  | (8;3;0;0;0;1;5;1;0;0;0;-2;7; | (21;-7;-37;-1 | 20 | (5;-2;0;0;0;-2;8;3;0;0;0;-2;6; | (30;-51;7;15  |
| 6  | (5;-2;0;0;0;-1;5;1;0;0;0;-3; | (-13;1;22;23  | 21 | (6;1;0;0;0;3;6;4;0;0;0;-2;7;3  | (-8;-35;-31;  |
| 7  | (7;-1;0;0;0;2;7;-3;0;0;0;2;4 | (1;-1;-18;26  | 22 | (6;2;0;0;0;-2;5;1;0;0;0;-1;5;2 | (4;9;3;53;-1  |
| 8  | (7;-1;0;0;0;2;9;-3;0;0;0;4;4 | (28;20;-15;7  | 23 | (9;4;0;0;0;2;8;3;0;0;0;-3;5;-2 | (-25;-43;-13  |
| 9  | (7;-1;0;0;0;3;5;-1;0;0;0;-2; | (-5;-16;29;1  | 24 | (5;-3;0;0;0;-1;6;-3;0;0;0;3;6; | (8;5;-33;-21  |
| 10 | (7;2;0;0;0;-3;8;-2;0;0;0;2;6 | (34;14;3;-10  | 25 | (6;1;0;0;0;-1;6;-1;0;0;0;-1;7; | (-22;-25;30;  |
| 11 | (6;3;0;0;0;2;7;2;0;0;0;4;7;- | (-21;19;34;1  | 26 | (9;-2;0;0;0;-3;6;1;0;0;0;1;6;2 | (-6;21;23;4;  |
| 12 | (5;-3;0;0;0;3;4;1;0;0;0;3;4; | (-21;-5;-12;- | 27 | (8;2;0;0;0;1;5;-2;0;0;0;-4;4;3 | (20;4;23;40;  |
| 13 | (5;-3;0;0;0;4;7;-3;0;0;0;1;7 | (17;-36;21;1  | 28 | (8;1;0;0;0;1;7;3;0;0;0;-1;6;-4 | (3;9;-31;22;  |
| 14 | (8;2;0;0;0;1;6;-3;0;0;0;-3;8 | (20;-21;44;-  | 29 | (5;2;0;0;0;4;5;2;0;0;0;3;7;-2  | (11;9;-36;52  |
| 15 | (9;3;0;0;0;2;7;4;0;0;0;3;5;4 | (-6;-17;13;-1 | 30 | (7;-2;0;0;0;-2;6;-1;0;0;0;-2;5 | (-8;21;7;8;-1 |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

$A = (6; -2; 0; 0; 0; -3; 6; -1; 0; 0; 0; 2; 5; 2; 0; 0; -2; 8; -3; 0; 0; 0; 3; 7)$ ,  $b = (2; 28; -14; -17; 15)$ .

У наших позначеннях маємо:  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = -2$ ,  $a_5 = 3$ ;  $b_1 = 6$ ,  $b_2 = 6$ ,  $b_3 = 5$ ,  $b_4 = 8$ ,  $b_5 = 7$ ;  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = -1$ ,  $c_3 = 2$ ,  $c_4 = -3$ ;  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 28$ ,  $d_3 = -14$ ,  $d_4 = -17$ ,  $d_5 = 15$ .

Згідно з формулами (10) знаходимо  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ :

Ошибка!; Ошибка!.

Далі, користуючись формулами (12), (13), послідовно знайдемо  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\beta_4$ ,  $\beta_5$ :

Ошибка!; Ошибка!;

Ошибка!; Ошибка!;

Ошибка!; Ошибка!;

Ошибка!.

На цьому «прямий хід» методу прогонки завершено. На першому кроці «зворотного ходу» згідно з формулою (14) знайдемо останнє невідоме  $x_5$ :

$x_5 = \beta_5 = 3$ .

Після цього послідовно знайдемо невідомі  $x_4$ ,  $x_3$ ,  $x_2$ ,  $x_1$  за формулами (15):

Ошибка!;

Ошибка!;

Ошибка!;

Ошибка!.

Перевірку правильності обчислень можна зробити, підставивши отримані значення невідомих  $x_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ , у систему (8).

Обчислення за методом прогонки можна також оформити на листі електронної таблиці (рис. 1).

| E3 |    | =C3/(B3+A3*E2) |    |     |            |            |    |
|----|----|----------------|----|-----|------------|------------|----|
|    | A  | B              | C  | D   | E          | F          | G  |
| 1  | a  | b              | c  | d   | $\alpha$   | $\beta$    | x  |
| 2  |    | 6              | -2 | 2   | 0,3333333  | 0,3333333  | 2  |
| 3  | -3 | 6              | -1 | 28  | 0,2        | 5,8        | 5  |
| 4  | 2  | 5              | 2  | -14 | -0,3703704 | -4,7407407 | -4 |
| 5  | -2 | 8              | -3 | -17 | 0,3432203  | -3,029661  | -2 |
| 6  | 3  | 7              |    | 15  |            | 3          | 3  |
| 7  |    |                |    |     |            |            |    |

Рис. 1. Оформлення обчислень за методом прогонки на аркуші електронної таблиці.

Коефіцієнти  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  розташуємо у стовпцях A-D, величини  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , – у стовпцях E і F, а вектор невідомих – у стовпці G. Після заповнення стовпців A-D вхідними даними задачі, для коефіцієнта  $\alpha_1$  введемо у комірку E2 формулу  $=C2/B2$ , для коефіцієнта  $\beta_1$  – формулу  $=D2/B2$  у комірку F2. Далі заповнюємо комірку E3 формулою  $=C3/(B3+A3*E2)$  для  $\alpha_2$  і копіюємо вміст цієї комірки у комірки E4, E5. Після цього вводимо формулу  $=(D3-A3*F2)/(B3+A3*E2)$  для обчислення  $\beta_2$  у комірку F3 та копіюємо її вміст у комірки діапазону F4: F6. «Прямий хід» прогонки виконано.

Для виконання «зворотного ходу» спочатку заповнимо комірку G6 для  $x_5$  формулою  $=F6$  (оскільки  $x_5 = \beta_5$ ). Далі введемо формулу  $=E5*G6+F5$  для  $x_4$  у комірку G5 і копіюємо її вміст у комірки діапазону G2:G4. В результаті у діапазоні G2:G6 отримаємо вектор розв'язку системи рівнянь.

Відповідь:  $x_1=2$ ,  $x_2=5$ ,  $x_3=-4$ ,  $x_4=-2$ ,  $x_5=3$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІТЕРАЦІЙНИМИ МЕТОДАМИ

**Мета роботи.** Засвоїти методи приведення системи рівнянь до вигляду, зручного для проведення ітерацій. Навчитись перевіряти достатню умову збіжності ітераційного методу. Навчитись розв'язувати систему рівнянь методами Якобі та Зейделя.

### Теоретичний матеріал.

#### 5.1. Зведення системи рівнянь до вигляду, зручного для проведення ітерацій. Умова збіжності ітераційного процесу.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m = b_1; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m = b_2; \dots\} \quad (1)$$

або, у скороченому вигляді:

$$Ax = b. \quad (2)$$

Для застосування ітераційних методів система повинна бути зведена до еквівалентного вигляду

$$x = Bx + d. \quad (3)$$

Потім вибирається початкове наближення до розв'язку системи рівнянь  $x^{(0)} = (x^{(0);1}, x^{(0);2}, \dots, x^{(0);m})$  і знаходиться послідовність наближень до кореня. Для збіжності ітераційного процесу досить, щоб була виконана умова  $\|B\| < 1$ . Критерій закінчення ітерацій залежить від застосовуваного ітераційного методу.

#### 5.2. Метод Якобі.

Найпростіший спосіб зведення системи до вигляду, зручного для ітерацій, є такий: з першого рівняння системи виразимо невідоме  $x_1$ , із другого рівняння системи виразимо  $x_2$  і т. ін. В результаті отримаємо систему рівнянь у вигляді (3) із матрицею  $B$ , у якій на головній діагоналі стоять нульові елементи, а інші елементи обчислюються за формулами:

$$\text{Ошибка!}, i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (4)$$

Компоненти вектора  $d$  обчислюються за формулами

$$\text{Ошибка!}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Розрахункова формула методу Якобі має вигляд

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + d, \quad (6)$$

або, у покоординатному запису:

$$x^{(n+1);i} = b_{i1}x^{(n);1} + b_{i2}x^{(n);2} + \dots + b_{im}x^{(n);m} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6')$$

Критерій закінчення ітерацій у методі Якобі має вигляд

$$\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| < \varepsilon_1, \quad (7)$$

де

Ошибка!,

а  $\varepsilon$  – задана точність знаходження наближеного розв'язку системи лінійних рівнянь.

Якщо  $\|B\| \leq 1/2$ , то можна застосовувати простіший критерій закінчення ітерацій:

$$\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| < \varepsilon.$$

#### 5.3. Метод Зейделя.

Метод Зейделя (відомий ще як метод Гауса-Зейделя) можна розглядати як модифікацію методу Якобі. Основна ідея полягає в тому, що під час обчислення чергового  $(n+1)$ -го наближення до невідомого  $x_i$  при  $i > 1$  використовують уже знайдене  $(n+1)$ -ше наближення до невідомих  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ , а не  $n$ -не наближення, як у методі Якобі. Розрахункова формула методу в покоординатній формі запису виглядає так:

$$x^{(n+1);i} = b_{i1}x^{(n+1);1} + b_{i2}x^{(n+1);2} + \dots + b_{i-1}x^{(n+1);i-1} + b_{i+1}x^{(n);i+1} + \dots + b_{im}x^{(n);m} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

Умови збіжності і критерій закінчення ітерацій можна взяти такими, як і в методі Якобі.

### **Завдання 1.**

1. Знайти точний розв'язок системи  $Ax = b$  певним прямим методом (Гауса, Холецького, оберненої матриці тощо).
2. Звести систему (2) до вигляду, зручному для проведення ітерацій (3).
3. Обравши одну з норм, обчислити норму матриці  $B$  та перевірити достатню умову збіжності ітерацій.
4. Взявши початкове наближення  $x^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)$ , обчислити з точністю  $\varepsilon = 10^{-6}$  розв'язок системи методом Якобі. Обчислити норму похибки наближеного розв'язку, порівнюючи його з точним розв'язком, що отриманий за допомогою прямого методу (див. п.1).
5. Аналогічно обчислити з тією ж точністю наближений розв'язок методом Зейделя.
6. Порівняти кількість ітерацій в методах Якобі та Зейделя. Пояснити результати.

### *Варіанти завдань*

| №  | $A$                        | $b$          | №  | $A$                        | $b$          |
|----|----------------------------|--------------|----|----------------------------|--------------|
| 1  | (-13;-3;-1;-5;-5;-20;5;-4; | (44;78;38;-5 | 16 | (19;4;-4;-1;-5;-13;-3;2;-1 | (9;-27;-79;8 |
| 2  | (-18;-2;3;3;-1;-15;-2;-3;5 | (-13;59;60;- | 17 | (18;3;-2;1;-1;-20;-4;4;0;- | (49;-82;13;- |
| 3  | (-13;5;-3;-3;-4;17;3;3;-4  | (11;38;0;28  | 18 | (-14;1;5;2;1;18;3;3;2;-5;  | (28;-89;2;9) |
| 4  | (14;3;5;1;-2;17;4;3;-5;4;  | (42;32;-43;- | 19 | (-15;-3;1;1;5;-16;3;-1;3;- | (-64;63;1;-3 |
| 5  | (-16;1;0;-2;-4;-19;0;4;-3  | (-73;-85;-92 | 20 | (17;-4;-1;-3;4;16;-4;-3;2  | (-46;-28;-32 |
| 6  | (13;4;1;-2;-2;-13;-4;-4;5  | (-22;29;70;3 | 21 | (13;5;-1;3;4;-17;-2;4;2;0  | (-20;-36;-48 |
| 7  | (18;-1;-4;0;1;15;-3;-5;4;- | (78;-38;23;4 | 22 | (-13;2;5;-4;-4;-17;-3;2;0  | (-48;-75;83; |
| 8  | (-19;-2;2;-3;1;16;-3;-4;3  | (-36;12;33;- | 23 | (18;-1;3;0;-2;-20;-2;1;-2  | (16;86;36;-8 |
| 9  | (-15;0;-2;-4;-1;-19;-3;5;0 | (20;-75;27;- | 24 | (13;1;-2;1;-4;-17;1;-1;1;- | (10;64;6;-9) |
| 10 | (13;-2;2;2;2;-15;4;-1;-4;4 | (-45;-83;32; | 25 | (15;-3;-4;-3;5;18;0;2;2;3  | (12;-96;-69; |
| 11 | (-13;-2;-1;2;1;-19;0;2;-4  | (26;0;41;-18 | 26 | (-15;0;-1;5;-3;-13;-3;-1;4 | (-84;35;-12; |
| 12 | (-14;-1;5;0;1;-13;1;4;2;-1 | (-56;13;-39; | 27 | (-13;-5;-5;2;0;20;4;5;3;5  | (-69;7;-26;7 |
| 13 | (15;-4;-4;-3;-3;15;0;-2;5  | (-78;6;41;-2 | 28 | (15;2;-5;4;3;14;-5;2;3;-4  | (-1;-23;36;8 |
| 14 | (-14;-1;1;3;-2;18;1;-5;4;1 | (-63;52;18;9 | 29 | (17;5;0;2;2;20;4;5;4;-2;-  | (-31;-67;10; |
| 15 | (-18;4;2;5;-4;-15;1;2;1;-1 | (58;34;-31;7 | 30 | (-17;2;0;-4;2;-15;5;3;0;3  | (97;35;-12;- |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

$$A = (-18;-3;5;-1;3;20;3;2;4;1;20;2;0;4;1;19), \quad b = (-20;-5;31;-40).$$

Обчислення зручно організувати на аркуші електронної таблиці, як показано на рис. 1. Вхідні дані для обчислень (матрицю  $A$  та вектор  $b$  розмістимо у діапазоні комірок A2:E5).

Знайдемо точний розв'язок системи методом оберненої матриці. Для цього обчислимо коефіцієнти оберненої матриці, які розмістимо у комірках A9:E12. Для цього виділимо діапазон A9:E12, введемо формулу =МОБР(A2:D5) та натиснемо Ctrl+Shift+Enter для завершення введення формули у діапазон.

Вектор невідомих тепер можна обчислити за формулою  $x = A^{-1}b$ . Для цього у діапазон комірок E9:E12 введемо формулу =МУМНОЖ(A9:D12;E2:E5) та натиснемо Ctrl+Shift+Enter.

Обчислимо тепер коефіцієнти ітераційної матриці  $B$  та вектору  $d$ . В діапазоні комірок G2:J5 розмістимо коефіцієнти матриці  $B$ . Вздовж головної діагоналі матриці поставимо нулі, а позадіагональні елементи обчислимо за формулами (4). В комірці H2 введемо формулу  $=B2/\$A\$2$  та скопіюємо вміст цієї комірки у діапазон I2:J2. Перший рядок матриці  $B$  заповнений. Для заповнення другого рядка у комірку G3 введемо формулу  $=A3/\$B\$3$  та скопіюємо вміст комірки на діапазон I3:J3. Аналогічно заповнимо третій і четвертий рядки матриці  $B$ .

|    | A                                    | B        | C        | D        | E            | F        | G          | H        | I        | J            | K        | L          | M            |
|----|--------------------------------------|----------|----------|----------|--------------|----------|------------|----------|----------|--------------|----------|------------|--------------|
| 1  | Матриця A                            |          |          |          | Вектор B     |          | Матриця B  |          |          |              | Вектор D |            |              |
| 2  | -18                                  | -3       | 5        | -1       | -20          |          | 0          | -0,16667 | 0,277778 | -0,055555556 | 1,111111 |            |              |
| 3  | 3                                    | 20       | 3        | 2        | -5           |          | -0,15      | 0        | -0,15    | -0,1         | -0,25    |            |              |
| 4  | 4                                    | 1        | 20       | 2        | 31           |          | -0,2       | -0,05    | 0        | -0,1         | 1,55     |            |              |
| 5  | 0                                    | 4        | 1        | 19       | -40          |          | 0          | -0,21053 | -0,05263 | 0            | -2,10526 |            |              |
| 6  |                                      |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 7  |                                      |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 8  | Матриця A <sup>-1</sup>              |          |          |          | Вектор X     |          | Матриця  B |          |          |              | Σ        |            |              |
| 9  | -0,05361                             | -0,00808 | 0,014791 | -0,00353 | 1,712355578  |          | 0          | 0,166667 | 0,277778 | 0,055555556  | 0,5      |            |              |
| 10 | 0,00665                              | 0,052298 | -0,0093  | -0,00418 | -0,515686389 |          | 0,15       | 0        | 0,15     | 0,1          | 0,4      |            |              |
| 11 | 0,010586                             | 0,000102 | 0,047561 | -0,00446 | 1,440564885  |          | 0,2        | 0,05     | 0        | 0,1          | 0,35     |            |              |
| 12 | -0,00196                             | -0,01102 | -0,00055 | 0,053746 | -2,072516807 |          | 0          | 0,210526 | 0,052632 | 0            | 0,263158 |            |              |
| 13 |                                      |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 14 |                                      |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 15 | Ітерації Якобі                       |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 16 | № ітерації                           | 0        | 1        | 2        | 3            | 4        | 5          | 6        | 7        | 8            | 9        | 10         | 11           |
| 17 | x <sub>1</sub>                       | 0        | 1,111111 | 1,700292 | 1,733564003  | 1,716319 | 1,712103   | 1,712176 | 1,712335 | 1,712359993  | 1,712357 | 1,7123556  | 1,712355529  |
| 18 | x <sub>2</sub>                       | 0        | -0,25    | -0,43864 | -0,524243421 | -0,51737 | -0,51619   | -0,51556 | -0,51568 | -0,515682776 | -0,51569 | -0,5156863 | -0,51568642  |
| 19 | x <sub>3</sub>                       | 0        | 1,55     | 1,550804 | 1,445294591  | 1,438953 | 1,439701   | 1,440597 | 1,440579 | 1,440571338  | 1,440564 | 1,4405648  | 1,440564836  |
| 20 | x <sub>4</sub>                       | 0        | -2,10526 | -2,13421 | -2,094539089 | -2,07096 | -2,07208   | -2,07236 | -2,07254 | -2,07251903  | -2,07252 | -2,0725165 | -2,072516811 |
| 21 | x-x <sup>(n)</sup>                   | 2,072517 | 0,601244 | 0,110239 | 0,022022282  | 0,003963 | 0,000864   | 0,00018  | 2,77E-05 | 6,45384E-06  | 1,41E-06 | 3,407E-07  | 4,84457E-08  |
| 22 | x <sup>(n+1)</sup> -x <sup>(n)</sup> |          | 2,105263 | 0,589181 | 0,105509503  | 0,023575 | 0,004216   | 0,000895 | 0,00018  | 2,54284E-05  | 7,3E-06  | 1,447E-06  | 3,4465E-07   |
| 23 |                                      |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 24 | Ітерації Зейделя                     |          |          |          |              |          |            |          |          |              |          |            |              |
| 25 | № ітерації                           | 0        | 1        | 2        | 3            | 4        | 5          | 6        | 7        | 8            |          |            |              |
| 26 | x <sub>1</sub>                       | 0        | 1,111111 | 1,671199 | 1,71147045   | 1,712661 | 1,712363   | 1,712353 | 1,712356 | 1,712355594  |          |            |              |
| 27 | x <sub>2</sub>                       | 0        | -0,41667 | -0,49412 | -0,516366548 | -0,51585 | -0,51568   | -0,51569 | -0,51569 | -0,515686398 |          |            |              |
| 28 | x <sub>3</sub>                       | 0        | 1,348611 | 1,449319 | 1,441276037  | 1,440501 | 1,440559   | 1,440565 | 1,440565 | 1,440564881  |          |            |              |
| 29 | x <sub>4</sub>                       | 0        | -2,08852 | -2,07752 | -2,072411045 | -2,07248 | -2,07252   | -2,07252 | -2,07252 | -2,072516805 |          |            |              |
| 30 | x-x <sup>(n)</sup>                   | 2,072517 | 0,601244 | 0,041157 | 0,000885127  | 0,000305 | 7,46E-06   | 2,26E-06 | 6,19E-08 | 1,66992E-08  |          |            |              |
| 31 | x <sup>(n+1)</sup> -x <sup>(n)</sup> |          | 2,088523 | 0,560088 | 0,04027162   | 0,00119  | 0,000298   | 9,71E-06 | 2,2E-06  | 7,86365E-08  |          |            |              |

Рис. 1. Організація обчислень в електронному документі.

Компоненти вектора  $d$  обчислимо за формулами (5). Для цього у комірку K2 введемо формулу  $=E2/A2$ , у комірку K3 – формулу  $=E3/B3$  і т. ін.

Тепер наша задача полягає в обчисленні норми матриці  $B$  та перевірці умови  $\|B\| < 1$ . Будемо використовувати в якості "робочої" норму  $\|\cdot\|_\infty$ . Нагадаємо, що для цієї норми

**Ошибка!**

а відповідна норма матриці

**Ошибка!**

Для отримання норми матриці необхідно обчислити суму модулів елементів матриці по рядках та з обчислених сум взяти максимальну. Сформуємо матрицю з модулів елементів матриці  $B$  у комірках G9:J12, увівши у комірку G9 формулу  $=ABS(G2)$  та скопіювавши її вміст у решту комірок вказаного діапазону. Для кожного рядка отриманої матриці обчислимо суми елементів (в комірку K9 введемо формулу  $=СУММ(G9:J9)$  та скопіюємо її у комірки K10:K12), а в комірці K13 обчислимо норму матриці  $B$ , ввівши формулу  $=МАКС(K9:K12)$ . Ми отримаємо величину норми

$$\|B\| = 0,5 < 1$$

що свідчить про можливість застосування ітераційних методів Якобі і Зейделя для наближеного розв'язання системи рівнянь.

Обчислення наближеного розв'язку системи лінійних рівнянь зручно організувати за такою схемою (рис. 1). В першому рядку розташуємо номер ітерації  $n$ ,

нижче розташуємо компоненти вектора  $n$ -го наближення, ще нижче розташуємо норму похибки наближеного розв'язку та норму різниці між  $n$ -м та  $n-1$ -м наближенням, яка нам необхідна для перевірки критерію закінчення ітерацій (7). Вказані значення для методу Якобі розташуємо у рядках 16-22, а для ітерацій Зейделя – у рядках 25-31.

У комірці B16 запишемо 0 (нульова ітерація), а у комірках B17:B20 – також нулі (компоненти нульового наближення). У комірку B21 введемо норму похибки наближеного розв'язку  

$$= \text{МАКС}(\text{ABS}(B17-\$E\$9); \text{ABS}(B18-\$E\$10); \text{ABS}(B19-\$E\$11); \text{ABS}(B20-\$E\$12))$$
 . Усі значення для нульової ітерації заповнено.

Дані для першої ітерації Якобі розташуємо у сусідньому третьому стовпці. У комірку C16 введемо формулу  $=B16+1$  (номер наступної ітерації). В комірці C17 розмістимо формулу  $=\text{МУМНОЖ}(\$G\$2:\$J\$2; B17:B20) + \$K\$2$ , яка реалізує обчислення нового значення  $x^{(1);1}$  відповідно до формули (6'). У комірку C18 введемо аналогічну формулу  $=\text{МУМНОЖ}(\$G\$3:\$J\$3; B17:B20) + \$K\$3$  для обчислення  $x^{(1);2}$  і т. ін. Формулу для  $\|x - x^{(l)}\|$  у комірці C21 скопіюємо з комірки B21, а для обчислення норми  $\|x^{(0)} - x^{(l)}\|$  у комірці C22 наберемо формулу

$$= \text{МАКС}(\text{ABS}(C17-B17); \text{ABS}(C18-B18); \text{ABS}(C19-B19); \text{ABS}(C20-B20)).$$

Дані для ітерації №1 також заповнено. Тепер, виділивши діапазон C16:C22, "протягнемо" його праворуч доти, доки значення у рядку 22 будуть перевищувати параметр точності

#### Ошибка!.

Для цього потрібно зробити 11 ітерацій (див. рис. 1).

За аналогічною схемою реалізуємо обчислення за методом Зейделя. Відмінність буде лише у обчисленні значень  $x^{(n);i}$  за формулою (8), де в якості  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  використовуються щойно знайдені значення  $n$ -ї ітерації. Отже, у комірку C26 введемо формулу  $=\$G\$2*B26 + \$H\$2*B27 + \$I\$2*B28 + \$J\$2*B29 + \$K\$2$ , у комірку C27 – формулу  $=\$G\$3*C26 + \$H\$3*B27 + \$I\$3*B28 + \$J\$3*B29 + \$K\$3$  і т. ін.

Використовуючи аналогічний критерій припинення ітерацій, отримаємо, що для досягнення заданої точності  $\varepsilon=10^{-6}$  треба виконати 8 ітерацій. Менша порівняно з методом Якобі кількість ітерацій пов'язана з використанням у процесі обчислень на кожній ітерації оновленої інформації про значення уже обчислених на поточній ітерації невідомих.

Відповідь:

$$x_1=1,712355 \pm 10^{-6}, x_2=-0,515686 \pm 10^{-6}, x_3=1,440564 \pm 10^{-6}, x_4=-2,072516 \pm 10^{-6}.$$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТОДОМ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОЛІНОМИ У ФОРМІ ЛАГРАНЖА І НЬЮТОНА

**Мета роботи.** Засвоїти методи наближення функцій за методом інтерполяції. Навчитись будувати інтерполяційні поліноми у формі Лагранжа і Ньютона. Навчитись оцінювати похибку обчислень за інтерполяційною формулою.

### Теоретичний матеріал.

#### 6.1. Постановка задачі інтерполяції.

Часто у практичних задачах постає проблема відновлення певної функціональної залежності  $y(x)$ . Наприклад,  $y(x)$  може бути визначено як розв'язок складної задачі, у якій  $x$  грає роль параметру, або  $y(x)$  вимірюється у кошовному експерименті. При цьому можна обчислити лише невелику таблицю значень функції, але пряме знаходження функції для великої кількості значень аргументу практично неможливе.

Функція  $y(x)$  може використовуватись у різноманітних технічних або економічних розрахунках, де її необхідно обчислювати багато разів. В цьому випадку доцільно замінити функцію  $y(x)$  наближеною формулою, тобто підібрати певну функцію  $\varphi(x)$ , яка у певному сенсі близька до  $y(x)$  і легко обчислюється. Потім для всіх значень аргументу приймають  $y(x) \approx \varphi(x)$ .

Вибір  $\varphi(x)$  здійснюють з певного класу функцій; як правило, такий клас визначається за допомогою векторного параметру  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , тобто  $\varphi = \varphi(x, \mathbf{a})$ . "Близькість"  $\varphi(x)$  до  $y(x)$  забезпечується відповідним вибором параметру  $\mathbf{a}$ .

Нехай функція  $y(x)$  відома лише для певних значень аргументу  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , тобто задана таблично:

|       |       |         |       |
|-------|-------|---------|-------|
| $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_n$ |

Якщо вимагати, щоб функція  $\varphi(x, \mathbf{a})$  співпадала з табличними значеннями для аргументів  $x_i$ , то отримаємо систему рівнянь для знаходження параметрів  $a_i$ :

$$\varphi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) = y(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Знаходження параметрів у такий спосіб називають *інтерполяцією*. Значення аргументу  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , називають *вузлами інтерполяції*. Вузли називають *рівновіддаленими*, якщо  $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h$ . Якщо функція  $\varphi(x, \mathbf{a})$  лінійно залежить від параметрів  $a_i$ , то інтерполяцію називають лінійною, в іншому випадку – нелінійною. У випадку лінійної інтерполяції функція  $\varphi(x, \mathbf{a})$  представляється у вигляді

**Ошибка!.**

Система (1) буде мати вид

$$\text{Ошибка!}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Система (2) є системою лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів  $a_i$ , і має єдиний розв'язок, якщо її визначник не дорівнює нулю. Системи функцій  $\varphi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , що задовольняють цій умові, називають чебишевськими (на честь великого математика П. Л. Чебишева). На практиці в якості чебишевських інтерполяційних функцій найчастіше застосовують систему функцій

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2, \dots, \quad \varphi_n(x) = x^n, \quad ,$$

тобто функцію  $y(x)$  наближують поліномами степені  $n$ . Така інтерполяція називається *поліноміальною*. Рідше застосовують інші чебишевські системи функцій (тригонометричні, експоненціальні тощо). Розглянемо детальніше поліноміальну інтерполяцію.

## 6.2. Інтерполяційний поліном у формі Лагранжа.

На перший погляд здається, що немає іншого способу знаходження коефіцієнтів інтерполяційного полінома, окрім безпосереднього розв'язання системи рівнянь (2) одним з відомих методів. Однак деякими вченими були запропоновані явні форми запису інтерполяційного поліному. Одну з таких форм запропонував Ж.-Л. Лагранж. Він помітив, що функція

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } k=i \\ 0 & \text{якщо } k \neq i \end{cases}, \quad k=0,1,2,\dots,n,$$

є поліномом степені  $n$ , значення якого дорівнюють нулю в усіх вузлах інтерполяції, окрім  $x_k$ , де вони дорівнюють одиниці, тобто

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } k=i \\ 0 & \text{якщо } k \neq i \end{cases}.$$

Зважаючи на це, інтерполяційний поліном можна записати у вигляді

$$L(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) y_k. \quad (3)$$

### Завдання 1.

Маємо дані про кількість транспортних засобів (тис. одиниць), пропущених через митний пункт пропуску А, у грудні, січні, березні та квітні. Вважаючи, що транспортний потік за вказаний період змінювався більш-менш рівномірно, без істотних стрибків, «відновити» дані за лютий місяць, побудувавши інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа. На аркуші електронної таблиці побудувати точкову діаграму динаміки транспортного потоку та графік інтерполяційного поліному.

#### Варіанти завдань

| № варіанту | Місяць  |        |          |         |
|------------|---------|--------|----------|---------|
|            | Грудень | Січень | Березень | Квітень |
| 1          | 10      | 8      | 3        | 4       |
| 2          | 5       | 6      | 8        | 11      |
| 3          | 3       | 5      | 2        | 1       |
| 4          | 3       | 4      | 6        | 5       |
| 5          | 5       | 6      | 3        | 4       |
| 6          | 9       | 8      | 5        | 4       |
| 7          | 3       | 5      | 2        | 1       |
| 8          | 7       | 9      | 5        | 4       |
| 9          | 9       | 7      | 3        | 4       |
| 10         | 4       | 5      | 8        | 11      |
| 11         | 3       | 5      | 8        | 9       |
| 12         | 5       | 4      | 6        | 5       |
| 13         | 4       | 6      | 3        | 4       |
| 14         | 8       | 5      | 3        | 4       |
| 15         | 3       | 4      | 1        | 2       |
| 16         | 7       | 8      | 5        | 4       |
| 17         | 10      | 9      | 5        | 4       |
| 18         | 7       | 6      | 9        | 11      |
| 19         | 4       | 5      | 3        | 4       |
| 20         | 3       | 4      | 7        | 6       |
| 21         | 4       | 5      | 2        | 4       |
| 22         | 8       | 7      | 5        | 4       |
| 23         | 3       | 4      | 2        | 1       |
| 24         | 8       | 9      | 6        | 4       |
| 25         | 8       | 6      | 3        | 4       |
| 26         | 3       | 5      | 8        | 11      |

|    |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|
| 27 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 28 | 5 | 4 | 7 | 6 |
| 29 | 6 | 7 | 3 | 4 |
| 30 | 7 | 9 | 5 | 4 |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

| Місяць  |        |          |         |
|---------|--------|----------|---------|
| Грудень | Січень | Березень | Квітень |
| 3       | 4      | 7        | 6       |

Побудуємо інтерполяційний поліном на сітці вузлів  $\{x_0; x_1; x_2; x_3\} = \{-2; -1; 1; 2\}$ , тобто значення  $x_0 = -2$  відповідає грудню,  $x_1 = -1$  – січню і т. ін.

|     |    |    |   |   |
|-----|----|----|---|---|
| $x$ | -2 | -1 | 1 | 2 |
| $y$ | 3  | 4  | 7 | 6 |

Тоді значення аргументу, що відповідає лютому місяцю, буде дорівнювати нулю, і значення інтерполяційного многочлену в цій точці збігатиметься з величиною вільного члену цього поліному.

Згідно з формулою (3) будемо мати

$L(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) = \text{Ошибка!} + \text{Ошибка!} + \text{Ошибка!} + \text{Ошибка!} = \text{Ошибка!}.$

Отже, згідно зі значенням інтерполяційного поліному, транспортний потік через пункт пропуску у лютому місяці дорівнює  $L(0) = 35/6 \approx 5,83$  (тис. одиниць).

Побудуємо на аркуші електронної таблиці точкову діаграму динаміки транспортного потоку та графік інтерполяційного поліному. Розміщення даних електронного документу показано на рис. 1.

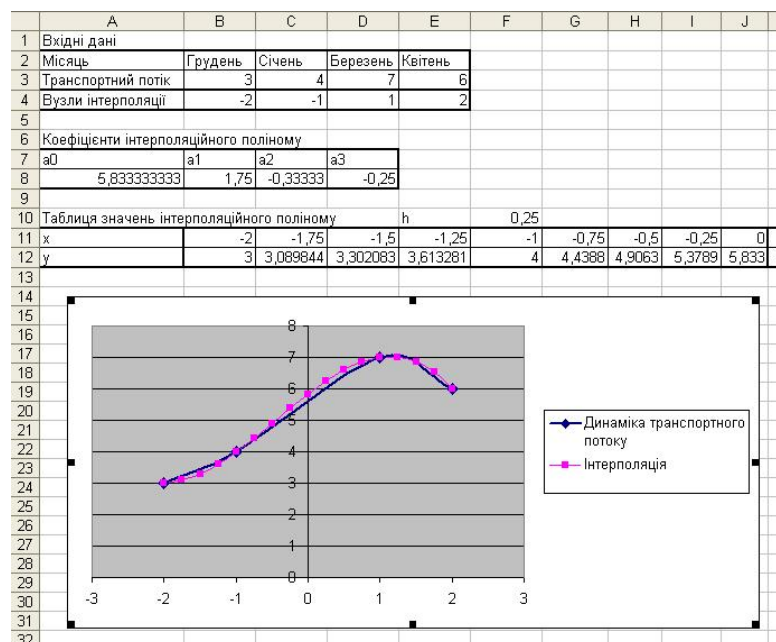


Рис. 1. Розміщення даних на аркуші електронного документу.

Вхідні дані для розмістимо (із заголовками) у діапазоні A2:E4, коефіцієнти інтерполяційного поліному – у діапазоні A7:D8. Таблицю значень інтерполяційного поліному побудуємо з кроком  $h$ , величина якого розміщується у комірці F10. Введемо, наприклад, значення  $h = 0,25$ . Саму таблицю значень розташуємо у діапазоні A11:R12.

Для заповнення рядка значень аргументу введемо в комірку B11 початкове значення  $x_0 = -2$ , а в сусідню комірку C11 – формулу  $=B11+\$F\$10$  і скопіюємо її вміст у всі комірки діапазону D11:R11. Для заповнення рядка значень інтерполяційного поліному введемо у комірку B12 формулу  $=\$A\$8+\$B\$8*B11+\$C\$8*B11^2+\$D\$8*B11^3$  і скопіюємо її в усі комірки діапазону C12:R12. Таблицю значень інтерполяційного поліному розраховано.

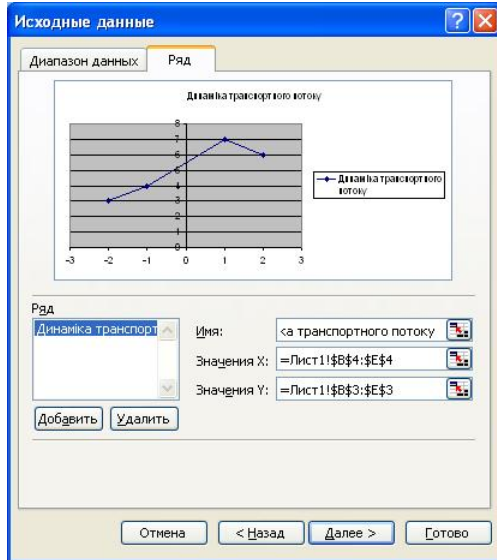


Рис. 2. Введення даних для ряду динаміки транспортного потоку.

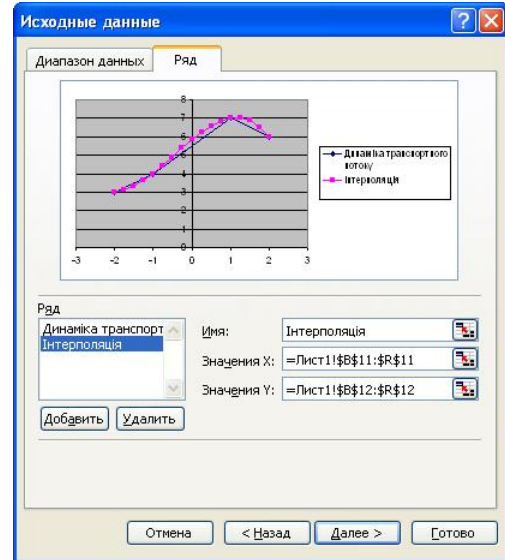


Рис. 3 Введення даних для ряду значень інтерполяційного поліному.

Відповідь: **Ошибка!**,  $L(0) = 5,83$  (тис. одиниць).

### 6.3. Интерполяційний поліном у формі Ньютона.

I. Ньютон знайшов іншу форму запису інтерполяційного поліному за допомогою так званих *розділених різниць*. Розділеними різницями I порядку називають вирази

**Ошибка!**,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Розділені різниці II порядку виражаються рекурентно через розділені різниці I порядку:

**Ошибка!**,  $i, j, k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Аналогічно визначаються розділені різниці III та вищих порядків. Зауважимо, що розділені різниці певного порядку мають розмірності похідних відповідного порядку. Можна довести, що розділені різниці є наближеннями до відповідних похідних.

Обчислення розділених різниць зручно організувати за допомогою такої таблиці (у випадку чотирьох вузлів інтерполяції):

|       |          |               |                    |                         |
|-------|----------|---------------|--------------------|-------------------------|
| $x_0$ | $y(x_0)$ |               |                    |                         |
|       |          | $y(x_0, x_1)$ |                    |                         |
| $x_1$ | $y(x_1)$ |               | $y(x_0, x_1, x_2)$ |                         |
|       |          | $y(x_1, x_2)$ |                    | $y(x_0, x_1, x_2, x_3)$ |
| $x_2$ | $y(x_2)$ | $y(x_2, x_3)$ | $y(x_1, x_2, x_3)$ |                         |

|       |          |  |  |  |
|-------|----------|--|--|--|
| $x_3$ | $y(x_3)$ |  |  |  |
|       |          |  |  |  |

Маючи тепер значення розділених різниць до  $n$ -го порядку (включно), значення інтерполяційного поліному можна записати у вигляді

$$L(x) = y(x_0) + y(x_0, x_1)(x - x_0) + y(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + y(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad (4)$$

Формула (4) і називається записом інтерполяційного поліному у формі Ньютона (з розділеними різницями).

Формула для залишкового члену інтерполяційного поліному.

Величину  $R_n(x) = |y(x) - L(x)|$  називають *похибкою інтерполяції* або *залишковим членом* інтерполяції.

Якщо функція  $y(x)$  має на відрізку  $[a, b]$ , що містить усі вузли інтерполяції  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , неперервні похідні до  $n + 1$ -го порядку включно, то для похибки інтерполяції справедлива оцінка

$$\text{Похибка!}, \quad (5)$$

де

$$\text{Похибка!} \quad .$$

Недоліком формули (5) є те, що часто інформація про  $n + 1$ -шу похідну функції  $y(x)$  відсутня. Якщо додатково заданий (контрольний) вузол інтерполяції  $x_{n+1}$ , то можна використовувати розділену різницю  $n + 1$ -го порядку  $y(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$  для наближення  $n + 1$ -ої похідної функції  $y(x)$ , і замість (5) використовувати наближену формулу

$$\text{Похибка!}, \quad (6)$$

## Завдання 2.

Маємо експериментальні дані про залежність гальмівного шляху  $s$  транспортного засобу (м) від його швидкості  $v$  перед початком гальмування (м/с). Побудувавши інтерполяційний поліном у формі Ньютона по першим чотирьом вузлам інтерполяції, знайти прогнозне значення гальмівного шляху для заданого значення швидкості  $v$  (що не збігається з жодним з вузлів). Використовуючи п'ятий вузол інтерполяції як контрольний, визначити похибку отриманого результату.

### Варіанти завдань

| № варіанту |     | № вузла та прогноз |      |      |      |      |         |
|------------|-----|--------------------|------|------|------|------|---------|
|            |     | 1                  | 2    | 3    | 4    | 5    | Прогноз |
| 1          | $v$ | 10                 | 15   | 25   | 30   | 34   | 20      |
|            | $s$ | 37,5               | 40,3 | 51,6 | 56,9 | 70,1 | ?       |
| 2          | $v$ | 12                 | 17   | 23   | 29   | 32   | 25      |
|            | $s$ | 34,6               | 41,2 | 49,7 | 55,9 | 65,1 | ?       |
| 3          | $v$ | 11                 | 16   | 24   | 28   | 32   | 23      |
|            | $s$ | 33,5               | 39,3 | 48,7 | 54,9 | 66,1 | ?       |
| 4          | $v$ | 10,5               | 14   | 23   | 29   | 35   | 20      |
|            | $s$ | 37,5               | 40,3 | 51,6 | 56,9 | 70,1 | ?       |
| 5          | $v$ | 13                 | 16   | 24   | 28   | 35   | 22      |
|            | $s$ | 32,6               | 40,3 | 48,7 | 56,9 | 64,1 | ?       |
| 6          | $v$ | 10                 | 17   | 22   | 29   | 33   | 21      |
|            | $s$ | 34,5               | 40,4 | 49,5 | 55,8 | 63,2 | ?       |
| 7          | $v$ | 11                 | 14   | 25   | 31   | 35   | 22      |
|            | $s$ | 38,5               | 41,3 | 52,6 | 57,9 | 69,2 | ?       |
| 8          | $v$ | 12                 | 18   | 24   | 29   | 32   | 25      |

|    |   |      |      |      |      |      |    |
|----|---|------|------|------|------|------|----|
|    | s | 33,5 | 40,1 | 49,8 | 54,9 | 62,1 | ?  |
| 9  | v | 11   | 17   | 25   | 29   | 33   | 23 |
|    | s | 33,7 | 38,2 | 49,7 | 55,2 | 64,3 | ?  |
| 10 | v | 10,5 | 15   | 24   | 29   | 35   | 20 |
|    | s | 36,5 | 41,5 | 52,6 | 57,9 | 71,1 | ?  |
| 11 | v | 12   | 15   | 23   | 29   | 34   | 21 |
|    | s | 32,6 | 42,3 | 43,7 | 56,9 | 64,1 | ?  |
| 12 | v | 10   | 18   | 21   | 29   | 33   | 24 |
|    | s | 35,5 | 42,4 | 49,5 | 55,8 | 63,2 | ?  |
| 13 | v | 11   | 14   | 24   | 31   | 34   | 20 |
|    | s | 36,5 | 40,3 | 50,6 | 57,9 | 70,1 | ?  |
| 14 | v | 12   | 17   | 23   | 30   | 32   | 25 |
|    | s | 34,8 | 40,2 | 49,7 | 55,9 | 65,1 | ?  |
| 15 | v | 11   | 16   | 25   | 28   | 32   | 23 |
|    | s | 34,5 | 40,3 | 48,7 | 54,9 | 66,1 | ?  |
| 16 | v | 10,5 | 15   | 24   | 29   | 35   | 20 |
|    | s | 36,6 | 41,2 | 52,6 | 58,9 | 70,1 | ?  |
| 17 | v | 13   | 17   | 24   | 29   | 35   | 22 |
|    | s | 33,6 | 41,3 | 47,7 | 55,9 | 65,1 | ?  |
| 18 | v | 11   | 18   | 22   | 29   | 33   | 21 |
|    | s | 35,5 | 41,4 | 50,4 | 55,8 | 63,2 | ?  |
| 19 | v | 11   | 15   | 25   | 31   | 35   | 20 |
|    | s | 37,5 | 42,3 | 52,6 | 57,9 | 69,2 | ?  |
| 20 | v | 12   | 18   | 22   | 29   | 32   | 25 |
|    | s | 32,5 | 41,1 | 48,7 | 55,9 | 62,1 | ?  |
| 21 | v | 11   | 19   | 25   | 29   | 33   | 23 |
|    | s | 33,7 | 40,2 | 49,7 | 55,2 | 64,3 | ?  |
| 22 | v | 11,5 | 16   | 24   | 29   | 35   | 20 |
|    | s | 38,5 | 42,5 | 53,6 | 58,9 | 72,1 | ?  |
| 23 | v | 10   | 15   | 25   | 30   | 34   | 20 |
|    | s | 36,4 | 42,7 | 51,8 | 56,2 | 70,4 | ?  |
| 24 | v | 12   | 17   | 22   | 29   | 32   | 25 |
|    | s | 32,6 | 42,2 | 50,6 | 55,8 | 65,1 | ?  |
| 25 | v | 11   | 16   | 26   | 28   | 32   | 23 |
|    | s | 33,5 | 38,4 | 52,7 | 54,9 | 66,1 | ?  |
| 26 | v | 12,5 | 16   | 24   | 29   | 35   | 20 |
|    | s | 37,4 | 42,3 | 53,6 | 56,8 | 70,3 | ?  |
| 27 | v | 13   | 16   | 25   | 28   | 35   | 22 |
|    | s | 34,7 | 40,9 | 45,7 | 58,2 | 64,5 | ?  |
| 28 | v | 10   | 16   | 22   | 29   | 33   | 21 |
|    | s | 34,5 | 42,5 | 49,5 | 55,8 | 63,2 | ?  |
| 29 | v | 11   | 14   | 25   | 31   | 35   | 22 |
|    | s | 38,5 | 41,3 | 52,6 | 57,9 | 69,2 | ?  |
| 30 | v | 12   | 17   | 24   | 29   | 32   | 26 |
|    | s | 33,5 | 42,1 | 48,8 | 54,9 | 62,1 | ?  |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

|  | № вузла та прогноз |   |   |   |   |         |
|--|--------------------|---|---|---|---|---------|
|  | 1                  | 2 | 3 | 4 | 5 | Прогноз |

|     |      |      |      |      |      |    |
|-----|------|------|------|------|------|----|
| $v$ | 11   | 14   | 22   | 31   | 35   | 18 |
| $s$ | 34,5 | 42,6 | 50,4 | 59,3 | 65,1 | ?  |

Спочатку знайдемо розділені різниці за допомогою таблиці:

| $x$ | $y(x)$ | $y(x_i, x_j)$ | $y(x_i, x_j, x_k)$ | $y(x_i, x_j, x_k, x_l)$ | $y(x_i, x_j, x_k, x_l, x_u)$ |
|-----|--------|---------------|--------------------|-------------------------|------------------------------|
| 11  | 34,5   |               |                    |                         |                              |
|     |        | 2,7           |                    |                         |                              |
| 14  | 42,6   |               | -0,15682           |                         |                              |
|     |        | 0,975         |                    | 0,007882                |                              |
| 22  | 50,4   |               | 0,000817           |                         | -0,00026                     |
|     |        | 0,988889      |                    | 0,00165                 |                              |
| 31  | 59,3   |               | 0,03547            |                         |                              |
|     |        | 1,45          |                    |                         |                              |
| 35  | 65,1   |               |                    |                         |                              |

Інтерполяційний поліном у формі Ньютона, побудований на чотирьох вузлах інтерполяції, буде мати вигляд

$$L(x) = 34,5 + 2,7(x - 11) - 0,15682(x - 11)(x - 14) + 0,007882(x - 11)(x - 14)(x - 22).$$

Обчислення інтерполяційного поліному в точці  $x=18$  (м/с) зручно організувати за схемою Горнера

$$L(x) = ((0,007882(x - 22) - 0,15682)(x - 14) + 2,7)(x - 11) + 34,5,$$

тобто

$$L(18) = ((0,007882(18 - 22) - 0,15682)(18 - 14) + 2,7)(18 - 11) + 34,5 = 48,12633393 \text{ (м)}.$$

Для оцінки величини похибки скористуємось формулою (6), в яку входить розділена різниця 4-го порядку. Маємо:

**Помилка!**

$$= \frac{0}{00026;24} |(18 - 11)(18 - 14)(18 - 22)(18 - 31)| = 0,015752129.$$

Відповідь:  $y(18) = 48,126 \pm 0,016 \text{ (м)}$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА МЕТОДОМ АПРОКСИМАЦІЇ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

**Мета роботи.** Засвоїти методи інтерполяції функцій сплайнами. Навчитись будувати квадратичний сплайн дефекту 1. Засвоїти принципи наближення функцій за методом апроксимації. Навчитись будувати і розв'язувати нормальну систему рівнянь методу найменших квадратів.

### Теоретичний матеріал.

#### 7.1. Інтерполяція функцій за допомогою сплайнів.

Нехай функція  $y(x)$  інтерполюється на відрізку  $[a, b]$ . Метод розв'язання цієї задачі за допомогою єдиного для всього відрізка інтерполяційного полінома  $L^{(n)}(x)$  називається *глобальною інтерполяцією*. Постає закономірне питання: чи можна підвищити точність такої інтерполяції, збільшуючи число вузлів інтерполяції (і, відповідно, підвищуючи степінь поліному  $L^{(n)}(x)$ )? Негативну (в загальному випадку) відповідь на це запитання дає теорема Фабера: яка б не була стратегія вибору вузлів інтерполяції, завжди знайдеться така неперервна на відрізку  $[a, b]$  функція  $f$ , для якої похибка інтерполяції

**Ошибка!**

Тому на практиці рідко застосовують інтерполяцію більше, ніж по чотирьох-п'яти вузлах. Яким чином тоді здійснити глобальну інтерполяцію із значною кількістю вузлів? Для розв'язання цієї проблеми використовують кусково-поліноміальну інтерполяцію: початковий відрізок  $[a, b]$  розбивається на частини і на кожному відрізку малої довжини функція  $f$  замінюється поліномом невисокої степені. Для забезпечення гладкості інтерполюючої функції додатково накладають умови рівності похідних певного порядку відповідних поліномів на «стику» частинних відрізків.

Нехай відрізок  $[a, b]$  розбитий точками на  $n$  частинних відрізків  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Сплайн степені  $m$  називається функція  $S_m(x)$ , що має такі властивості.

1. Функція  $S_m(x)$  є неперервною на відрізку  $[a, b]$  разом із своїми похідними до певного порядку  $p$ .

2. На кожному частинному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  функція  $S_m(x)$  збігається з певним алгебраїчним поліномом  $P_{m,i}(x)$  степені  $m$ .

Різниця  $m-p$  між степенем сплайну та найвищим порядком неперервної на відрізку  $[a, b]$  похідної називають *дефектом сплайну*.

На практиці найчастіше застосовують сплайни першого, другого та третього степеню дефекту 1. Сплайн першого степеню є кусково-лінійною функцією; у точках стику вимагається лише рівність значень відповідних поліномів першого порядку на сусідніх відрізках. Для сплайнів другого степеню наближення виконується квадратичними функціями, додатково ставляться умови рівності функцій та перших похідних на стику відрізків. Для сплайнів третього степеню (інтерполяція поліномами третього степеню) вимагається рівність значень відповідних поліномів, їх перших та других похідних у точках стику.

Розглянемо, наприклад, процес побудови сплайну другого степеню дефекту 1.

Для функції  $y(x)$  маємо таблицю значень

|       |       |         |       |
|-------|-------|---------|-------|
| $x_0$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $y_0$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_n$ |

Таким чином, відрізок глобальної інтерполяції  $[a, b]$  розбитий на частинні відрізки  $[x_{i-1}, x_i]$   $i=1, 2, \dots, n$ ,  $x_0=a$ ,  $x_n=b$ . Сплайн  $S_2(x)$  буде представлений поліномами другого степеню

$$S_2(x) = \begin{cases} P_2 \\ 1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 \\ x \in [x_0 \\ x_1]; P_2 \\ 2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2 \\ x \in [x_1 \\ x_2]; \dots; P_2 \\ n(x) = a_n + b_nx + c_nx^2 \\ x \in [x_{n-1} \\ x_n] \end{cases} \quad (1)$$

Для визначення маємо  $3n$  невідомих  $(a_i, b_i, c_i, i=1, 2, \dots, n)$ .

Функція  $S_2(x)$  повинна задовольняти таким умовам

$$S_2(x_i) = y_i, i=1, 2, \dots, n \text{ (умови інтерполяції)}, \quad (2)$$

$P'_{2,i}(x_i) = P'_{2,i+1}(x_i), i=1, 2, \dots, n-1$  (умова неперервності похідної).

Перша група співвідношень (2) в силу (1) дає  $2n$  рівнянь

$$\{a_1 + b_1x_0 + c_1x_0^2 = y_0; a_1 + b_1x_1 + c_1x_1^2 = y_1; a_2 + b_2x_1 + c_2x_1^2 = y_1; a_2 + b_2x_2 + c_2x_2^2 = y_2; \dots; a_n + b_nx_{n-1} + c_nx_{n-1}^2 = y_n\} \quad (3)$$

Далі, оскільки  $P'_{2,i}(x) = b_ix + 2c_ix$ ; то друга група співвідношень (2) дає  $n-1$  рівнянь

$$\{b_1 + 2c_1x_1 = b_2 + 2c_2x_1; b_2 + 2c_2x_2 = b_3 + 2c_3x_2; \dots; b_{n-1} + 2c_{n-1}x_{n-1} = b_n + 2c_nx_{n-1}\}$$

або

$$\{b_1 + 2c_1x_1 - b_2 - 2c_2x_1 = 0; b_2 + 2c_2x_2 - b_3 - 2c_3x_2 = 0; \dots; b_{n-1} + 2c_{n-1}x_{n-1} - b_n - 2c_nx_{n-1} = 0\} \quad (4)$$

Отже, співвідношення (3), (4) складають у сумі  $2n+n-1 = 3n-1$  рівнянь для визначення  $3n$  невідомих коефіцієнтів. Для повноти не вистачає ще одного рівняння. Воно може бути отримано, наприклад, якщо у нас є інформація про похідну початкової функції  $y(x)$  в одному з вузлів інтерполяції. Якщо таким вузлом буде  $x_0$  або  $x_n$ , то сформоване співвідношення має назву «граничної умови». Наприклад, якщо ми знаємо, що  $y'(x_0) = y'(a) = y_{10}$ , то гранична умова запишеться у вигляді

$$P'_{2,1}(x_0) = y_{10}$$

або

$$b_1 + 2c_1x_0 = y_{10}. \quad (5)$$

Таким чином, співвідношення (3), (4), (5) складають повну систему  $3n$  рівнянь з  $3n$  невідомими. Розв'язавши її, знайдемо коефіцієнти сплайну  $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, \dots, n$ .

Оцінка похибки наближення квадратичним сплайном. Нехай функція  $y(x)$  має на відрізьку  $[a, b]$  неперервну похідну третього порядку. Позначимо

**Ошибка!**

Тоді для інтерполяційного сплайну  $S_2(x)$  справедливі оцінки похибки

**Ошибка!**

**Ошибка!**

де позначено

**Ошибка!**

### Завдання 1.

За допомогою швидкісної фотокамери отримані дані про положення (у міліметрах відносно початкового положення) повзуна кривошипно-шатунного механізму певного агрегату транспортного засобу в різні моменти часу (сек.). Вважаючи, зйомка почалась в момент часу  $t_0=0$  (момент пуску агрегату; початкова швидкість повзуна при цьому дорівнювала нулю,  $u'(t_0) = u'_0 = 0$ ), побудувати

квадратичний сплайн, що наближує функцію  $u(t)$  положення повзуна від часу  $t$ . За допомогою побудованого сплайну визначити положення повзуна та його швидкість в заданий момент часу  $t_n$ .

На аркуші електронної таблиці побудувати точкову діаграму функції  $u(t)$  за результатами зйомки, а також графік побудованого квадратичного сплайну.

*Варіанти завдань*

| № варіанту |     | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_n$                 |
|------------|-----|-------|-------|-------|-------|-----------------------|
| 1          | $t$ | 0     | 0,5   | 1,0   | 1,5   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 25,3  | 51,6  | 36,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 2          | $t$ | 0     | 0,4   | 0,9   | 1,3   | 0,6                   |
|            | $u$ | 0     | 41,2  | 89,7  | 75,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 3          | $t$ | 0     | 0,4   | 0,8   | 1,2   | 0,6                   |
|            | $u$ | 0     | 39,3  | 76,7  | 54,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 4          | $t$ | 0     | 0,6   | 1,0   | 1,4   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 32,3  | 51,6  | 48,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 5          | $t$ | 0     | 0,5   | 0,9   | 1,4   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 30,3  | 68,7  | 46,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 6          | $t$ | 0     | 0,6   | 1,0   | 1,4   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 20,4  | 49,5  | 53,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 7          | $t$ | 0     | 0,4   | 1,0   | 1,5   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 31,3  | 42,6  | 37,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 8          | $t$ | 0     | 0,5   | 0,8   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 20,3  | 49,8  | 54,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 9          | $t$ | 0     | 0,3   | 0,9   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 28,2  | 39,7  | 65,2  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 10         | $t$ | 0     | 0,6   | 1,2   | 1,5   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 31,4  | 42,6  | 37,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 11         | $t$ | 0     | 0,6   | 1,0   | 1,4   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 22,4  | 41,6  | 38,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 12         | $t$ | 0     | 0,5   | 0,9   | 1,4   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 25,3  | 48,7  | 40,2  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 13         | $t$ | 0     | 0,6   | 1,0   | 1,4   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 21,3  | 47,5  | 51,6  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 14         | $t$ | 0     | 0,4   | 1,0   | 1,5   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 30,7  | 43,6  | 47,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 15         | $t$ | 0     | 0,5   | 0,8   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 25,3  | 48,7  | 34,3  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 16         | $t$ | 0     | 0,3   | 0,9   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 29,2  | 40,8  | 59,1  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 17         | $t$ | 0     | 0,6   | 1,2   | 1,5   | 0,8                   |
|            | $u$ | 0     | 32,4  | 45,6  | 34,3  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 18         | $t$ | 0     | 0,5   | 0,8   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 11,4  | 32,4  | 45,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 19         | $t$ | 0     | 0,3   | 0,9   | 1,3   | 1,0                   |
|            | $u$ | 0     | 22,3  | 42,5  | 30,4  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 20         | $t$ | 0     | 0,5   | 1,0   | 1,5   | 0,7                   |
|            | $u$ | 0     | 25,3  | 51,6  | 36,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 21         | $t$ | 0     | 0,4   | 0,9   | 1,3   | 0,6                   |
|            | $u$ | 0     | 31,4  | 69,7  | 75,8  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 22         | $t$ | 0     | 0,4   | 0,8   | 1,2   | 0,6                   |
|            | $u$ | 0     | 19,3  | 36,7  | 24,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |

|    |     |   |      |      |      |                       |
|----|-----|---|------|------|------|-----------------------|
| 23 | $t$ | 0 | 0,6  | 1,0  | 1,4  | 0,8                   |
|    | $u$ | 0 | 22,3 | 31,6 | 48,3 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 24 | $t$ | 0 | 0,5  | 0,9  | 1,4  | 0,7                   |
|    | $u$ | 0 | 30,3 | 58,3 | 56,2 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 25 | $t$ | 0 | 0,6  | 1,0  | 1,4  | 0,7                   |
|    | $u$ | 0 | 21,4 | 39,7 | 33,8 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 26 | $t$ | 0 | 0,4  | 1,0  | 1,5  | 0,8                   |
|    | $u$ | 0 | 21,3 | 42,6 | 37,8 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 27 | $t$ | 0 | 0,5  | 0,8  | 1,3  | 1,0                   |
|    | $u$ | 0 | 18,3 | 29,6 | 44,9 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 28 | $t$ | 0 | 0,3  | 0,9  | 1,3  | 1,0                   |
|    | $u$ | 0 | 28,2 | 37,8 | 65,2 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 29 | $t$ | 0 | 0,6  | 1,2  | 1,5  | 0,8                   |
|    | $u$ | 0 | 31,4 | 42,6 | 20,9 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |
| 30 | $t$ | 0 | 0,4  | 1,0  | 1,5  | 1,2                   |
|    | $u$ | 0 | 42,1 | 58,8 | 34,8 | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

|     |       |       |       |       |                       |
|-----|-------|-------|-------|-------|-----------------------|
|     | $t_0$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | $t_n$                 |
| $t$ | 0     | 0,4   | 0,9   | 1,6   | 1,2                   |
| $u$ | 0     | 22,4  | 38,5  | 25,9  | $u(t_n), u'(t_n) - ?$ |

Вхідні дані і результати обчислень зручно розташувати на аркуші електронної таблиці (рис. 1).

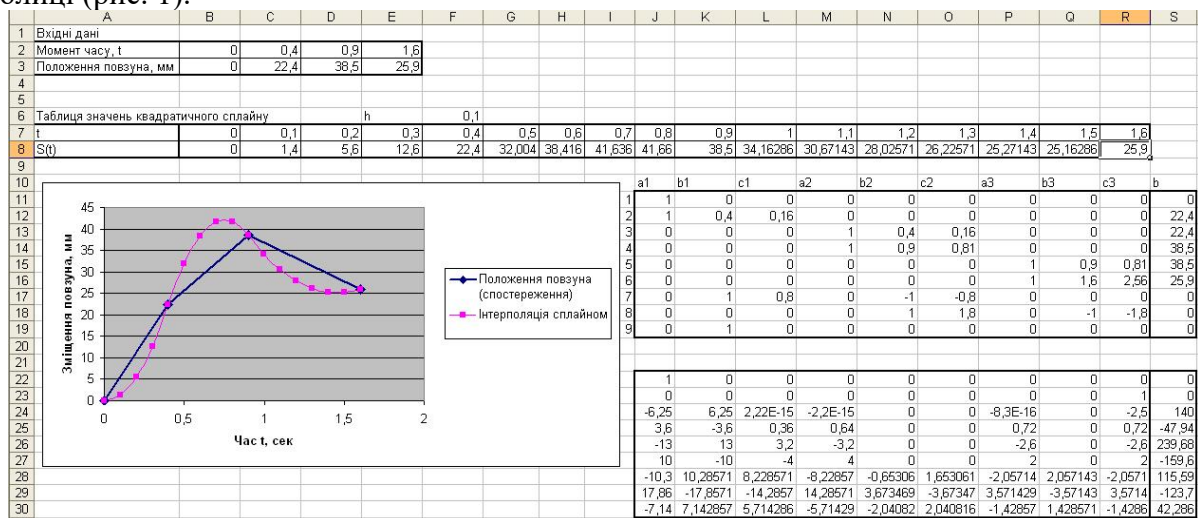


Рис. 1. Розміщення даних на листі електронного документу

Вхідні дані для обчислень розмістимо (із заголовками) у діапазоні A2:E3.

Складемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів квадратичного сплайну. Для цього запишемо послідовно шість рівнянь (3), два рівняння (4) і одне рівняння (5). Будемо мати

$$\{a_1 + b_1 t_0 + c_1 t_0^2 = u_0; a_1 + b_1 t_1 + c_1 t_1^2 = u_1; a_2 + b_2 t_1 + c_2 t_1^2 = u_1; a_2 + b_2 t_2 + c_2 t_2^2 = u_2; \dots\} \quad (6)$$

Систему лінійних рівнянь (6) запишемо у компактній формі

$$Ax = b,$$

де

$$A = \begin{pmatrix}
1 & t_0 & t_0^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & t_1 & t_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & t_1 & t_1^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_2 & t_2^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_3 & t_3^2 \\
0 & 1 & 2t_1 & 0 & -1 & -2t_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t_2 & 0 & -1 & -2t_2 \\
0 & 1 & -2t_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (7)$$

- матриця системи,

$$b = (u_0; u_1; u_1; u_2; u_2; u_3; 0; 0; 0)$$

$$x = (a_1; b_1; c_1; a_2; b_2; c_2; a_3; b_3; c_3)$$

- вектор правих частин та невідомих відповідно.

Отже, ми бачимо, що матриця  $A$  системи має розріджену структуру (більшість її елементів дорівнюють нулю). Матрицю системи розмістимо на аркуші електронного документу у діапазоні J11:R19, вектор правих частин – у діапазоні S11:S19. Коефіцієнти матриці розраховуються згідно до формули (7). Покажемо, наприклад, як заповнюється перший рядок матриці  $A$ . Решта рядків заповнюється аналогічно.

В комірку J11 введемо значення "1", в комірку K11 – формулу =B2, в комірку L11 – формулу =B2^2. Решту елементів першого рядка матриці  $A$  заповнимо нулями.

Аналогічно заповнюється і вектор правих частин  $b$ . Наприклад, для заповнення його першого елемента введемо у комірку S11 формулу =B3 (звичайне перенесення значення  $u_0$ ), у комірку S12 формулу =C3 і т. ін.

Для розв'язання системи лінійних рівнянь (6) застосуємо метод оберненої матриці. Саму обернену матрицю розташуємо у діапазоні J22:R30, а вектор розв'язків – у діапазоні S22:S30. Виділимо комірки діапазону J22:R30, наберемо формулу =МОБР(J11:R19) та натиснемо Ctrl+Shift+Enter для завершення введення формули-масиву. Коефіцієнти оберненої матриці розраховано. Для отримання значень вектору невідомих  $x$  скористаємось формулою  $x = A^{-1}b$ . Для цього виділимо комірки діапазону S22:S30, введемо формулу =МУМНОЖ(J22:R30;S11:S19) та знову натиснемо Ctrl+Shift+Enter. В електронному документі буде розраховано невідомі коефіцієнти квадратичного сплайну. Маємо

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 140, \quad a_2 = -47,936, \quad b_2 = 239,68, \quad c_2 = -159,6, \quad a_3 = 115,5914286, \quad b_3 = -123,7142857, \quad c_3 = 42,28571429.$$

Сформуємо таблицю значень побудованого сплайну, використовуючи обчислені коефіцієнти. Таблицю значень побудуємо з кроком  $h$ , величина якого розміщується у комірці F6. Введемо, наприклад, значення  $h=0,1$ . Саму таблицю значень розташуємо у діапазоні A7:R8. Для заповнення рядка значень аргументу введемо в комірку B7 початкове значення  $t_0 = 0$ , а в сусідню комірку C7 – формулу =B7+\$F\$6 і скопіюємо її вміст в усі комірки діапазону D7:R7. Для заповнення рядка значень квадратичного сплайну введемо у комірку B8 формулу =\$S\$22+\$S\$23\*B7+\$S\$24\*B7^2 і скопіюємо її в усі комірки діапазону C8:F8 (формула  $S(t) = a_1 + b_1t + c_1t^2$  справедлива лише на відрізку  $[t_0, t_1] = [0, 0.4]$ ). В комірку G8 введемо формулу =\$S\$25+\$S\$26\*G7+\$S\$27\*G7^2 і скопіюємо її в усі комірки діапазону H8:K8 (формула  $S(t) = a_2 + b_2t + c_2t^2$  справедлива на відрізку  $[t_1, t_2] = [0.4, 0.9]$ ) і т. ін. Таблицю значень квадратичного сплайну розраховано.

Побудуємо на точковій діаграмі дані вимірювань та графік отриманого квадратичного сплайну. Для цього запустимо «Майстер Діаграм», виберемо тип

діаграми «точкова», а для вхідних даних діапазону вкажемо параметри окремо для кожного ряду (рис. 2, 3). Графіки побудовано.

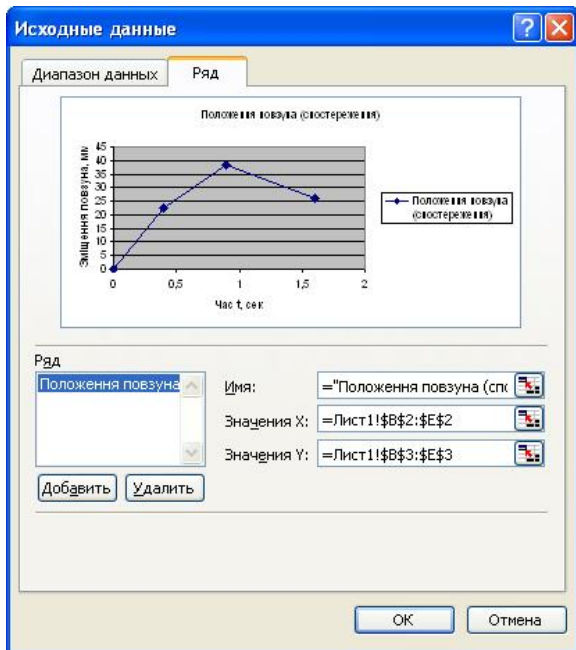


Рис. 2. Введення даних для ряду даних спостережень положення повзуна

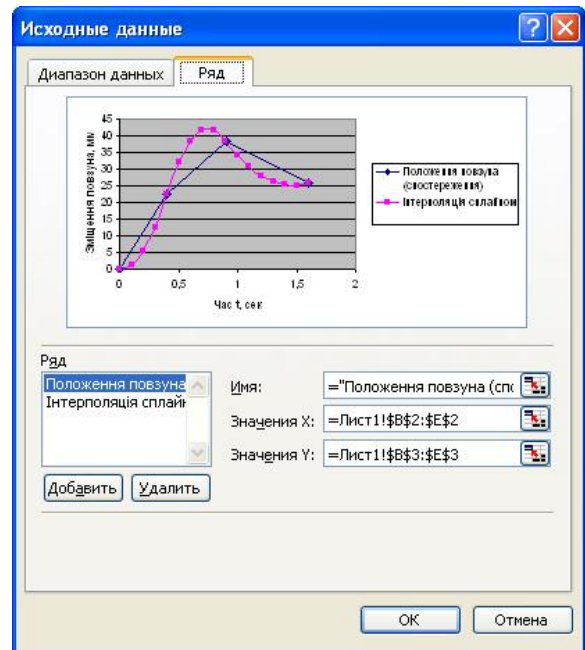


Рис. 3 Введення даних для ряду значень інтерполяційного сплайну

Обчислимо прогнозні значення  $u(t_n), u'(t_n)$  за побудованим сплайном. Оскільки  $t_n \in [t_2, t_3]$ , то значення сплайну та його похідної в точці  $t_n$  обчислюються за формулами  $S(t_n) = a_3 + b_3 t_n + c_3 t_n^2 = 115,5914286 - 123,7142857 \cdot 1,2 + 42,28571429 \cdot 1,2^2 = 28,02571429$  мм;  $S'(t_n) = b_3 + 2c_3 t_n = -123,7142857 + 2 \cdot 42,28571429 \cdot 1,2 = -22,22857143$  мм/с. Відповідь:  $u(1.2) \approx 28.0$  мм,  $u'(1.2) \approx -22.2$  мм/с.

## 7.2. Наближення функцій за методом апроксимації. Метод найменших квадратів.

Нагадаємо, що задачею наближення функції є відновлення складної функціональної залежності  $y(x)$ , тобто заміна  $y(x)$  функцією  $\varphi(x)$ , яка у певному сенсі близька до  $y(x)$  і легко обчислюється. Вибір  $\varphi(x)$  здійснюють з певного класу функцій; як правило, такий клас визначається за допомогою векторного параметру  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , тобто  $\varphi = \varphi(x, \mathbf{a})$ . Для наближення за методом інтерполяції вимагається, щоб значення  $\varphi(x, \mathbf{a})$  збігалися зі значеннями функції  $y(x)$  в певних точках (вузлах інтерполяції); ці вимоги дають можливість визначити відповідне значення векторного параметру  $\mathbf{a}$ . На практиці часто значення функції  $y(x)$  отримують в результаті експерименту і тому завжди містять випадкові похибки. З цієї точки зору не варто вимагати рівності значень  $\varphi(x, \mathbf{a})$  та  $y(x)$ ; важливо лише, щоб наближуюча функція  $\varphi(x, \mathbf{a})$  правильно відображала «тенденцію» зміни  $y(x)$ , тобто була близька до  $y(x)$  «в цілому». Подібний спосіб наближення функції називається *апроксимацією*.

Формально це можна виразити у такий спосіб. Побудуємо вектор *похибки апроксимації*

$$\varepsilon = \{\varphi(x_1, \mathbf{a}) - y(x_1), \varphi(x_2, \mathbf{a}) - y(x_2), \dots, \varphi(x_n, \mathbf{a}) - y(x_n)\} = \varepsilon(\mathbf{a}),$$

(який залежатиме від параметру  $\mathbf{a}$ ) та обчислимо його норму  $\|\varepsilon\|$ . Зрозуміло, що чим менше величина цієї норми, тим менше відхиляється апроксимуюча функція  $\varphi(x, \mathbf{a})$  «в цілому» від даних спостережень  $y(x_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . Таким чином, здійснити вибір апроксимуючої функції  $\varphi(x, \mathbf{a})$  (що означає відповідний вибір параметру  $\mathbf{a}$ ) природно за умови мінімізації функції

$$\|\varepsilon(a)\| \rightarrow \min. \quad (8)$$

В залежності від конкретного вибору норми  $\|\cdot\|$  отримаємо різні варіанти методів апроксимації. На практиці в переважній більшості випадків використовується евклідова норма

**Ошибка!**

і задача (8) конкретизується як

**Ошибка!**

або, враховуючи, що функція  $y=\sqrt{x}$  монотонно зростає на своїй області визначення,

$$\text{Ошибка!} \quad (9)$$

Метод знаходження невідомих параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_m$  апроксимуючої функції  $\varphi(x, a)$  як результат розв'язання задачі (9), має назву *метода найменших квадратів*.

Якщо не накладається певних обмежень на область зміни параметрів  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , то необхідною умовою мінімуму функції є рівність нулю похідних функції  $\Phi(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , тобто задача (9) еквівалентна задачі розв'язання системи (в загальному випадку нелінійних) алгебраїчних рівнянь

**Ошибка!**

або

$$\text{Ошибка!} \quad (10)$$

Система (10) називається *нормальною системою методу найменших квадратів*, або *нормальною системою для знаходження параметрів емпіричної залежності*.

Якщо використовується лінійне наближення, тобто

**Ошибка!**

то система (10) стає лінійною

**Ошибка!**

або

$$\text{Ошибка!} \quad (11)$$

Якщо функція апроксимується поліномами, тобто система функцій  $\varphi_i(x)$  має вигляд

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_n(x) = x^n$$

система (11) буде виглядати так (нумерація для  $\varphi_i(x)$  та  $x_k$  починається з нуля)

$$\text{Ошибка!} \quad (12)$$

Можна довести, що визначник матриці системи (12) не дорівнює нулю (якщо всі вузли  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , є різними), тобто розв'язок існує і єдиний. Однак для високих степенів  $m$  система є погано обумовленою, тому метод найменших квадратів при апроксимації поліномами застосовують для степенів  $m$  не вище п'яти.

Зауважимо, що при  $m=n$  апроксимуючий поліном збігається з інтерполяційним, для якого норма похибки  $\|\varepsilon\|$  дорівнює нулю.

Розв'язавши будь-яким методом нормальну систему лінійних рівнянь (11), знайдемо невідомі параметри апроксимуючої функції.

Для оцінки "якості" апроксимації часто застосовують величину

$$\text{Ошибка!} \quad (13)$$

яка називається *середньоквадратичною похибкою апроксимації* і відрізняється від евклідової норми похибки  $\|\varepsilon\|$  лише сталим множником  $1/n$ .

## Завдання 2.

Для заданих експериментальних даних знайти функцію, що здійснює їх наближення методом найменших квадратів даною системою функцій. Обчислити величину середньоквадратичної похибки апроксимації. На аркуші електронної таблиці побудувати точкову діаграму, на яку нанести експериментальні дані та графік апроксимуючої функції.

*Варіанти завдань*

Таблиця 1. Експериментальні дані.

| № варіанту |   |      |      |      |      |      |      |
|------------|---|------|------|------|------|------|------|
| 1          | x | 1    | 2,7  | 4,1  | 5,2  | 7,5  | 10,4 |
|            | y | 10,8 | 5,6  | 3,9  | 3,1  | 2,2  | 0,8  |
| 2          | x | 1    | 3,5  | 6,3  | 9,3  | 12,4 | 15,1 |
|            | y | 3,5  | 6,7  | 9,9  | 10,9 | 11,6 | 12,1 |
| 3          | x | 2    | 3,4  | 6,2  | 8,3  | 9,1  | 10,2 |
|            | y | 3,5  | 8,4  | 12,9 | 18,4 | 22,7 | 35,3 |
| 4          | x | 1    | 2,5  | 4,2  | 5,3  | 7,1  | 10,2 |
|            | y | 10,4 | 7,6  | 5,4  | 4,3  | 6,8  | 9,2  |
| 5          | x | 0,8  | 1,4  | 3,5  | 4,6  | 5,5  | 7,2  |
|            | y | 5,3  | 3,4  | 2,1  | 4,8  | 7,3  | 10,1 |
| 6          | x | 0    | 0,8  | 1,3  | 2,1  | 2,9  | 3,8  |
|            | y | 2,1  | 1,5  | 0,8  | 0,5  | 0,7  | 1,2  |
| 7          | x | 2,1  | 3,2  | 6,4  | 8,3  | 9,1  | 10,2 |
|            | y | 0,1  | 0,3  | 1,5  | 3,4  | 5,2  | 8,4  |
| 8          | x | 0,3  | 0,7  | 1,1  | 1,3  | 2,4  | 2,8  |
|            | y | 0,1  | 0,8  | 1,2  | 1,4  | 0,9  | 0,3  |
| 9          | x | 0,8  | 1,4  | 3,5  | 4,6  | 5,5  | 7,2  |
|            | y | 1,4  | 2,5  | 4,2  | 6,8  | 9,1  | 12,3 |
| 10         | x | 0,1  | 0,7  | 1,3  | 1,6  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 4,5  | 3,4  | 1,9  | 0,8  | 0,3  | 0,2  |
| 11         | x | 0,3  | 0,7  | 1,1  | 1,3  | 2,4  | 2,8  |
|            | y | 7,2  | 3,4  | 2,5  | 5,3  | 8,4  | 12,9 |
| 12         | x | 0,4  | 0,8  | 1,2  | 1,3  | 2,4  | 2,8  |
|            | y | 0,1  | 0,8  | 1,2  | 1,4  | 0,9  | 0,3  |
| 13         | x | 2,2  | 3,5  | 6,7  | 8,9  | 9,7  | 10,8 |
|            | y | 1,2  | 3,5  | 4,2  | 4,8  | 5,1  | 5,3  |
| 14         | x | 0,1  | 0,5  | 1,1  | 1,5  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 2,2  | 3,5  | 6,7  | 11,9 | 18,7 | 25,8 |
| 15         | x | 0    | 0,2  | 0,4  | 0,7  | 1,2  | 1,6  |
|            | y | 0,1  | 0,25 | 0,42 | 0,93 | 1,08 | 0,98 |
| 16         | x | 0,1  | 0,6  | 1,2  | 1,6  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 2,4  | 2,7  | 3,1  | 4,8  | 8,2  | 12,9 |
| 17         | x | 0,1  | 0,7  | 1,3  | 1,6  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 4,5  | 4,2  | 3,7  | 2,9  | 1,4  | 0,2  |
| 18         | x | 0,4  | 0,8  | 1,2  | 1,3  | 2,4  | 2,8  |
|            | y | 1,4  | 1,7  | 3,1  | 6,8  | 9,2  | 15,9 |
| 19         | x | 2,2  | 3,6  | 6,8  | 8,9  | 9,7  | 10,8 |
|            | y | 1,2  | 2,1  | 4,7  | 6,2  | 7,4  | 9,1  |
| 20         | x | 0,1  | 0,7  | 1,3  | 1,6  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 1,3  | 4,5  | 5,7  | 3,9  | 3,1  | 2,7  |
| 21         | x | 0,4  | 0,8  | 1,2  | 1,3  | 2,4  | 2,8  |
|            | y | 4,5  | 5,6  | 7,9  | 9,7  | 15,1 | 20,2 |
| 22         | x | 2,2  | 3,4  | 6,7  | 8,9  | 9,1  | 10,2 |
|            | y | 0,2  | 0,9  | 1,7  | 2,4  | 3,1  | 3,5  |
| 23         | x | 0,1  | 0,5  | 1,1  | 1,5  | 1,9  | 2,3  |
|            | y | 2,1  | 1,5  | 0,8  | 0,7  | 0,9  | 1,2  |

|    |   |     |     |     |     |      |      |
|----|---|-----|-----|-----|-----|------|------|
| 24 | x | 0,1 | 0,7 | 1,3 | 1,6 | 1,9  | 2,3  |
|    | y | 4,5 | 5,1 | 4,9 | 5,7 | 7,1  | 9,2  |
| 25 | x | 0,1 | 0,4 | 0,9 | 1,2 | 1,8  | 2,1  |
|    | y | 4,6 | 5,2 | 4,8 | 5,9 | 7,2  | 9,4  |
| 26 | x | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,3 | 2,4  | 2,8  |
|    | y | 2,1 | 2,9 | 3,6 | 4,1 | 4,3  | 4,5  |
| 27 | x | 0,1 | 0,4 | 1,2 | 1,4 | 2,0  | 2,5  |
|    | y | 2,3 | 1,4 | 0,9 | 0,8 | 1,1  | 1,3  |
| 28 | x | 0,1 | 0,5 | 1,1 | 1,5 | 1,9  | 2,3  |
|    | y | 2,1 | 1,5 | 0,8 | 0,7 | 0,9  | 1,2  |
| 29 | x | 0,4 | 0,8 | 1,2 | 1,3 | 2,4  | 2,8  |
|    | y | 4,5 | 5,6 | 7,9 | 9,7 | 15,1 | 20,2 |
| 30 | x | 0,3 | 0,7 | 1,1 | 1,3 | 2,4  | 2,8  |
|    | y | 0,1 | 0,8 | 1,2 | 1,4 | 0,9  | 0,3  |

Таблиця 2. Системи функцій для апроксимації.

| №  | $\varphi_0(x)$ | $\varphi_1(x)$ | $\varphi_2(x)$ | №  | $\varphi_0(x)$ | $\varphi_1(x)$ | $\varphi_2(x)$   |
|----|----------------|----------------|----------------|----|----------------|----------------|------------------|
| 1  | 1              | $1/x$          | $2^{-x}$       | 16 | 1              | $2x^2$         | $4x^4$           |
| 2  | $\ln x$        | 1              | $\sqrt{x}$     | 17 | $x - 2$        | $\cos(x - 2)$  | $(x - 2)^2$      |
| 3  | $x$            | 1              | $e^{x+1}$      | 18 | $x^3$          | $3^x$          |                  |
| 4  | $1/(x-1)$      | $x^2$          |                | 19 | $\sqrt{x^3}$   | $x$            | $\sqrt{x^5}$     |
| 5  | $1/x$          | $e^x$          | $1/\sqrt{x}$   | 20 | $\cos(3x)$     | $\sin x$       | $\sin(3x)$       |
| 6  | $\sin(2x)$     | $\cos(2x)$     |                | 21 | $e^x$          | $\sqrt{x^3}$   | $x^2$            |
| 7  | 1              | $-x + 1$       | $(x-1)^3$      | 22 | 1              | $\sqrt{x-2}$   | $\ln \sqrt{x-2}$ |
| 8  | $\sqrt{x}$     | $\sin x$       | $x \sin x$     | 23 | $2^x$          | $x^2$          | $2^{-x}$         |
| 9  | $x^2$          | $e^x$          | $x^4$          | 24 | 1              | $x \sin x$     | $x^2$            |
| 10 | $1 - \sqrt{x}$ | $\cos x$       | $1/(x-1)$      | 25 | 1              | $\cos x$       | $x^4$            |
| 11 | $x$            | $x^5$          | $x^7$          | 26 | $\sqrt{x+1}$   | $(x+1)^2$      |                  |
| 12 | $\ln x$        | $1/x^2$        |                | 27 | $x^3$          | 1              | $1/x$            |
| 13 | $\sqrt{x}$     | 1              | $\sqrt{\ln x}$ | 28 | $x$            | $e^{3x}$       | $e^{-3x}$        |
| 14 | $2^x$          | 1              | $4^x$          | 29 | $e^{\sqrt{x}}$ | $x$            |                  |
| 15 | $\sin x$       | $x$            | $\sin(3x)$     | 30 | $\sin x$       | $\cos x$       | $x \cos(x)$      |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

|   |     |     |     |     |     |      |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| x | 0,5 | 1,7 | 3,1 | 6,4 | 7,5 | 10,4 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|------|

|   |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| y | 3,4 | 5,6 | 6,9 | 6,3 | 5,3 | 4,1 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

|                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| $\varphi_0(x)$ | $\varphi_1(x)$ | $\varphi_2(x)$ |
| 1              | $\sqrt{x}$     | x              |

Вхідні дані та результати обчислень зручно оформити у вигляді електронного документу, як показано на рис. 4.

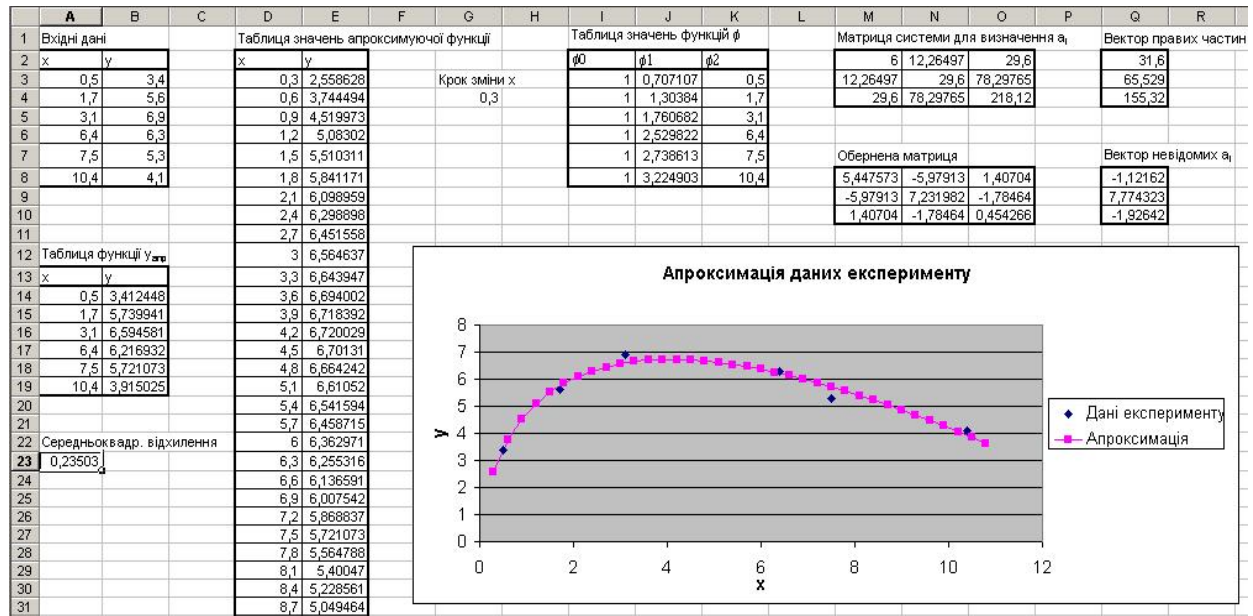


Рис. 4. Розміщення даних на аркуші електронного документу

Вхідні дані обчислень (таблицю даних експерименту) розмістимо у діапазоні A3:B8. Побудуємо нормальну систему рівнянь (11) метода найменших квадратів. Для цього нам знадобиться таблиця значень апроксимуючих функцій  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  в точках  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Цю таблицю розмістимо у діапазоні I3:K8. У комірку I3 внесемо значення "1" (значення функції  $\varphi_0(x_1) = 1$ ), у комірку J3 – формулу =КОРЕНЬ(A3) (значення функції  $\varphi_1(x_1) = \sqrt{x_1}$ ), а у комірку K3 – формулу =A3 (значення функції  $\varphi_2(x_1) = x_1$ ). Скопіюємо значення сформованого першого рядка таблиці (діапазон I3:K3) на всі комірки діапазону I4:K8.

Тепер побудуємо матрицю нормальної системи (11) (у діапазоні M2:O4) та вектор її правих частин (у діапазоні Q2:Q4). Для заповнення першого рядка матриці введемо у комірку M2 формулу =СУММПРОИЗВ(\$I\$3:\$I\$8;I3:I8) і скопіюємо вміст комірки у діапазон N2:O2. Для заповнення другого рядка матриці у комірку M3 введемо формулу =СУММПРОИЗВ(\$J\$3:\$J\$8;I3:I8) і знову "протягнемо" її на весь діапазон N3:O3. Аналогічно заповнюється третій рядок матриці системи (11).

Заповнимо тепер вектор правих частин системи (11). У комірку Q2 введемо формулу =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$8;I3:I8), у комірку Q3 – формулу =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$8;J3:J8), у комірку Q4 – формулу =СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$B\$8;K3:K8). Нормальну систему лінійних рівнянь (11) побудовано. Для її розв'язання застосуємо метод оберненої матриці. Саму обернену матрицю розташуємо у діапазоні M8:O10, а вектор невідомих параметрів  $a$  – у діапазоні Q8:Q10.

Виділимо комірки M8:O10, введемо формулу =МОБР(M2:O4) та натиснемо Ctrl+Shift+Enter для завершення введення. Тепер виділимо комірки Q8:Q10, введемо формулу =МУМНОЖ(M8:O10;Q2:Q4) та знову натиснемо Ctrl+Shift+Enter для

введення формули-масиву. У комірках Q8:Q10 буде розраховано невідомі параметри апроксимації

$$a_0 = -1,121617398, a_1 = 7,774323084, a_2 = -1,926422682.$$

Для побудови графіка побудованої апроксимуючої функції необхідно створити таблицю її значень з певним кроком зміни аргументу (цей крок зберігатимемо у комірці G4 і покладемо, наприклад,  $h=0,3$ ). Таблицю розмістимо у стовпцях D і E електронного листа. У комірку D3 введемо початкове значення аргументу ( $x = 0,3$ ), у комірку D4 – формулу  $=D3+G\$4$  і скопіюємо вміст цієї комірки на діапазон D5:D38. У комірку E3 введемо формулу для обчислення значення апроксимаційної функції  $=\$Q\$8+\$Q\$9*\text{КОРЕНЬ}(D3)+\$Q\$10*D3$  та "протягнемо" її на весь діапазон E5:E38. Таблицю значень побудовано.

Побудуємо на точковій діаграмі дані експерименту та графік отриманої апроксимуючої функції. Для цього запусимо «Майстер Діаграм», виберемо тип діаграми «точкова», а для вхідних даних діапазону вкажемо параметри окремо для кожного ряду (рис. 5, 6). Графіки побудовано.

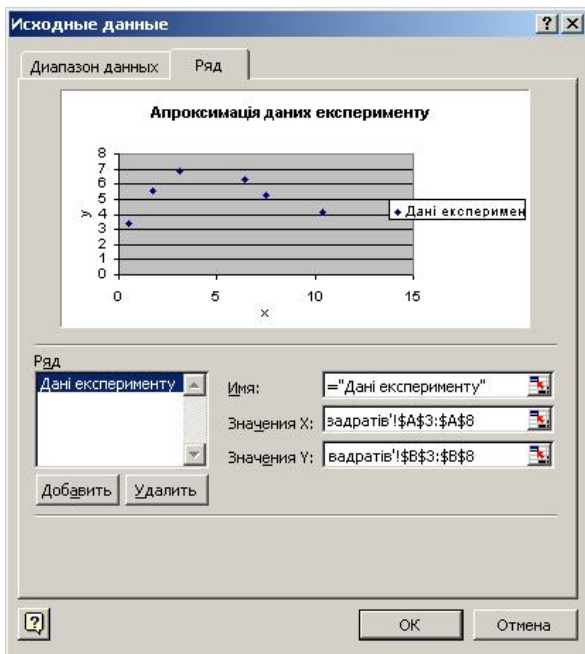


Рис. 5. Введення ряду даних експерименту

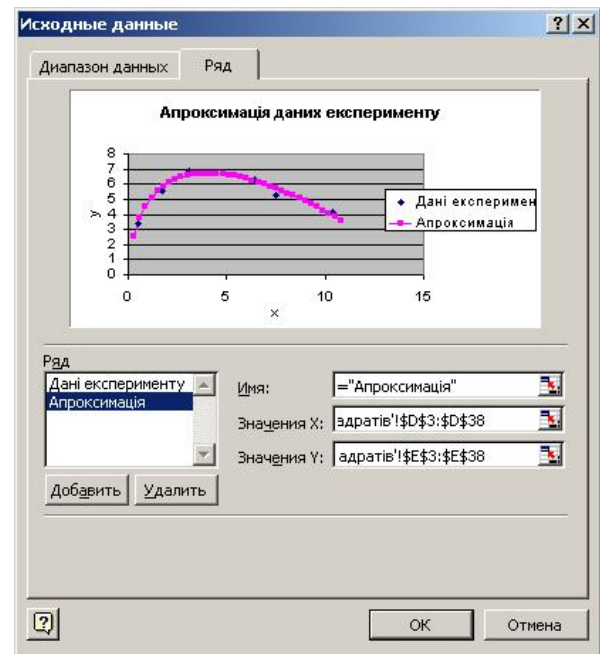


Рис. 6 Введення даних для ряду значень апроксимуючої функції

Величину середньоквадратичної похибки апроксимації (див. формулу (13)) обчислимо у комірці A23, увівши формулу  $=\text{КОРЕНЬ}(\text{СУММКВРАЗН}(B3:B8;B14:B19)/\text{СЧЁТ}(B3:B8))$ .

Відповідь:  $\sigma = 0,235031203$ .

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ І ІНТЕГРАЛІВ

**Мета роботи.** Засвоїти принципи наближеного знаходження похідних. Навчитись оцінювати оптимальний крок сітки для наближеного обчислення похідної. Засвоїти методи наближеного обчислення інтегралів: прямокутників, трапецій, Сімпсона. Навчитись оцінювати похибку обчислення інтегралів апостеріорно методом Рунге.

### Теоретичний матеріал.

#### 8.1. Чисельне диференціювання.

Чисельне диференціювання застосовується, якщо для функції  $y(x)$  важко або взагалі неможливо знайти похідні аналітично (наприклад, функція задана таблицею значень). Наближене обчислення похідних є також невід'ємною частиною різницьових методів розв'язання диференціальних рівнянь.

Для чисельного диференціювання застосовують такий основний прийом: функцію  $y(x)$  наближують функцією  $\varphi(x, a)$ , для якої похідна легко обчислюється, і приймають  $y'(x) \approx \varphi'(x, a)$ . Для наближення можна використовувати різні методи інтерполяції та апроксимації. Можна, наприклад, розглянути в якості наближення інтерполяційний поліном у формі Ньютона

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & y(x_0) + y(x_0, x_1)(x - x_0) + y(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ & + y(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

Похідну від інтерполяційного поліному можна обчислити в будь-якій точці  $x$ , яка може і не збігатися з жодним з вузлів інтерполяції. Втім, як правило, найкращі результати можна отримати лише у випадках, коли точка  $x$  є одним з таких вузлів. Взаємне розташування точки, в якій обчислюється значення похідної (*розрахункової точки*), та вузлів інтерполяції називається *точковим шаблоном* для обчислення похідних. Зокрема, для інтерполяційного полінома першого степеню розглянемо два точкові шаблони, зображені на рис. 1 (а, б).

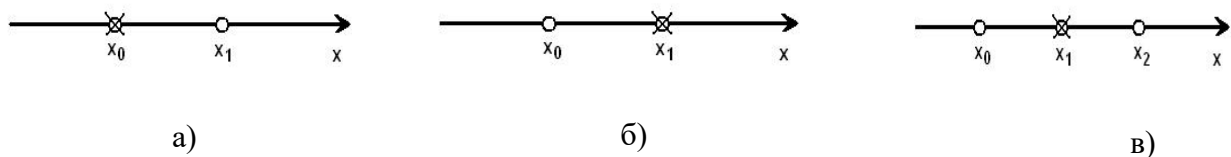


Рис. 1. Точкові шаблони для обчислення похідних:  
правий двоточковий різницьовий шаблон (а);  
лівий двоточковий різницьовий шаблон (б);  
центральний різницьовий трьохточковий шаблон (в).

Умовні позначення:  $\times$  - розрахункова точка,  $\circ$  - вузли інтерполяції

У першому випадку розрахункова точка  $x$  збігається з точкою  $x_0$ , а у другому – з точкою  $x_1$ . Диференціюючи інтерполяційний поліном (1), утримуючи у ньому два перших доданки, отримаємо

$$\text{Ошибка!} \quad (2)$$

Враховуючи формулу (2), для точкових шаблонів, зображених на рис. 1 (а), (б), отримаємо наближені значення похідної

$$\text{Ошибка!}, \quad (3)$$

$$\text{Ошибка!}, \quad (4)$$

де  $h=x_1 - x_0$ . Формули (3), (4) називають відповідно *правою та лівою різницеви́ми похідними* функції  $y(x)$  у точці  $x$ .

Для інтерполяційного поліному другого степеню розглянемо трьохточковий шаблон, зображений на рис. 1 (в). Обчислюючи похідну від поліному (1), утримуючи у ньому три доданки, отримаємо

$$\varphi'(x) = y(x_0, x_1) - y(x_0, x_1, x_2)(x_0 - 2x + x_1) =$$

**Ошибка!**

**Ошибка!,**

(5)

де позначено  $h_1=x_1 - x_0$ ,  $h_2=x_2 - x_1$ . Підставляючи у формулу (5) значення  $x=x_1$ , будемо мати

**Ошибка!,**

(6)

де  $x = x_1$ .

У випадку  $h_1 = h_2 = h$  (рівновіддалені вузли інтерполяції) формула (6) значно спрощується і набуває вигляду

**Ошибка!.**

(7)

Формула (7) називається *центральною різницевою похідною* функції  $y(x)$  у точці  $x$ . Слід звернути увагу на те, що у цій формулі відсутнє значення  $y(x_1)$ , тобто різнице́вий шаблон з трьохточкового (рис. 1 (в)), перетворився на двоточковий, з розрахунковою точкою у середині відрізка  $[x_0, x_2]$  (рис. 2 (а)).

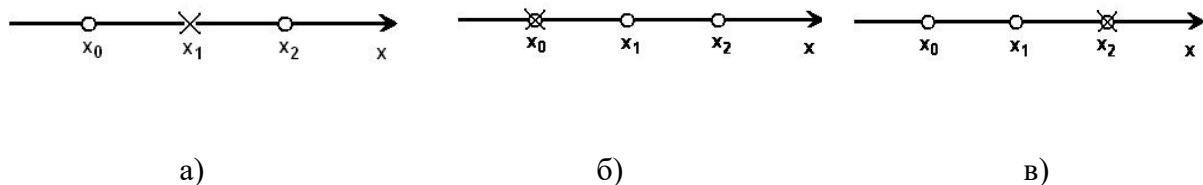


Рис. 2. Точкові шаблони для обчислення похідних: двоточковий шаблон для центральної різницевої похідної (а); шаблон для правої трьохточкової різницевої похідної (б); шаблон для лівої трьохточкової різницевої похідної (в).

Геометричним змістом формул (3), (4), (7) є те, що дотичну до графіка функції  $y=y(x)$  у розрахунковій точці замінюють січною, що проходить через точки графіка  $(x_0, y(x_0))$ ,  $(x_1, y(x_1))$  (у випадку формули 7 – через точки  $(x_0, y(x_0))$ ,  $(x_2, y(x_2))$ ), і в якості кутового коефіцієнту дотичної беруть відповідний коефіцієнт січної (рис. 3).

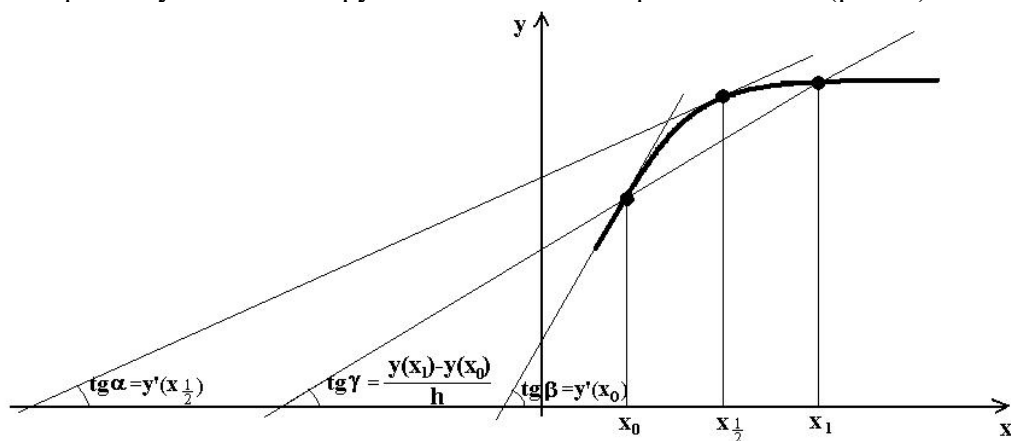


Рис. 3. Геометричний зміст різнице́вих формул. Для демонстрації змісту формули (7) для позначення точок шаблону замість  $(x_0, x_1, x_2)$  використане позначення  $(x_0, x_{1/2}, x_1)$

У формулі (5) можна взяти за розрахункову точку  $x=x_0$ , (рис. 2 (б)), а також точку  $x=x_2$ , (рис. 2 (в)). В результаті отримаємо формули для *лівої та правої*

трьохточкової різницевої похідної (наведемо їх також для випадку рівновіддалених вузлів):

$$\begin{aligned} &\text{Ошибка!}, & (8) \\ &\text{Ошибка!}. & (9) \end{aligned}$$

Інтерполяційні поліноми можна також використовувати для наближеного обчислення другої похідної та похідних вищих порядків. Зрозуміло, що апроксимація другої похідної лежить за межами можливостей поліному першого степеню, оскільки для цього поліному  $\varphi''(x) \equiv 0$ . Мінімальна можлива степінь полінома для наближення похідної  $y''(x)$  – друга. Диференціюючи співвідношення (5), отримаємо це наближення, формулу для якого запишемо лише для трьохточкового шаблону на рис. 1 (в) з рівновіддаленими вузлами:

$$\text{Ошибка!}. \quad (10)$$

Формулу (10) називають *другою центральною різницевою похідною* функції  $y(x)$  в точці  $x$ . Зауважимо, що в якості розрахункової може бути взята не лише точка  $x=x_1$ , а взагалі будь-яка точка з відрізка  $[x_0, x_2]$ , оскільки на цьому відрізку  $\varphi''(x) \equiv \text{const}$ .

Формула (10) легко узагальнюється для інтерполяційного поліному степеню  $n$ . Максимальний порядок похідної, яка може бути наближена за допомогою цього поліному, також дорівнює  $n$ , і це наближення виражається формулою

$$y^{(n)}(x) \approx n! \cdot y(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (11)$$

$x \in [x_0, x_n]$ . Наведемо різницеві формули для похідних третього та четвертого порядків, побудованих на базі поліномів третього та четвертого степенів відповідно

$$\text{Ошибка!}, x \in [x_0, x_3], \quad (12)$$

$$\text{Ошибка!}, x \in [x_0, x_4]. \quad (13)$$

Отже, для наближеного обчислення похідної можна використовувати різноманітні точкові шаблони, замінюючи значення похідної у розрахунковій точці певними різницевиими співвідношеннями. Питання про використання тієї чи іншої різницевої формули здебільшого визначається оцінкою похибки від такої заміни. Для різницевих формул (3), (4), (7), (8), (9), (10) з формули Тейлора впливають такі розклади

$$\begin{aligned} &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_1 \in [x_0, x_1], \\ &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_2 \in [x_0, x_1], \\ &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_3 \in [x_0, x_2], \\ &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_4 \in [x_0, x_2], \\ &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_5 \in [x_0, x_2], \\ &\text{Ошибка!}, \quad \zeta_6 \in [x_0, x_2], \\ &y^{0;xx} = y''(x_0) + hy'''(\zeta_7), \quad \zeta_7 \in [x_0, x_2], \\ &y^{0;xx} = y''(x_2) - hy'''(\zeta_8), \quad \zeta_8 \in [x_0, x_2], \end{aligned}$$

тобто похибка від заміни похідної відповідними різницевиими формулами (*похибка апроксимації похідної*) може бути оцінена як

$$|\varepsilon^{+;x}| = |y^{+;x} - y'(x_0)| \leq C_1 h, \quad (14)$$

$$|\varepsilon^{-;x}| = |y^{-;x} - y'(x_1)| \leq C_1 h, \quad (15)$$

$$|\varepsilon^{0;x}| = |y^{0;x} - y'(x_1)| \leq C_2 h^2, \quad (16)$$

$$|\varepsilon^{+0;x}| = |y^{+0;x} - y'(x_0)| \leq C_3 h^2, \quad (17)$$

$$|\varepsilon^{-0;x}| = |y^{-0;x} - y'(x_2)| \leq C_3 h^2, \quad (18)$$

$$|\varepsilon^{0;xx}| = |y^{0;xx} - y''(x_1)| \leq C_4 h^2, \quad (19)$$

$$|\varepsilon^{+0;xx}| = |y^{+0;xx} - y''(x_0)| \leq C_5 h, \quad (20)$$

$$|\varepsilon^{-0;xx}| = |y^{-0;xx} - y''(x_2)| \leq C_5 h, \quad (21)$$

де  $C_1=M_2/2$ ,  $C_2=M_3/6$ ,  $C_3=M_3/3$ ,  $C_4=M_4/12$ ,  $C_5=M_3$ ,  $M_2=\max|y''(x)|$ ,  $M_3=\max|y'''(x)|$ ,  $M_4=\max|y^{(IV)}(x)|$ . Очевидно, що різницева формула буде тим точніша, чим більше показник степеню, у який підноситься  $h$  у формулах для оцінки похибки. Кажуть, що

різницева формула має *порядок апроксимації*  $k$  (або *порядок точності*, або просто *порядок*  $k$ ), якщо її похибка оцінюється за формулою

$$|\varepsilon| \leq Ch^k, \quad (22)$$

де величина  $C$  не залежить від  $h$ . Отже, права та ліва різницеві формули (3), (4) мають перший порядок, а центральна різницева формула (7) – другий порядок апроксимації першої похідної. Також другий порядок мають формули лівої та правої трьохточкової похідної. Друга різницева похідна (10) має другий порядок точності для наближення похідної другого порядку у центральному вузлі трьохточкового шаблону (рис. 1 (в)) і лише перший порядок точності у крайніх точках цього шаблону (рис 2 (б), (в)). Для досягнення другого порядку точності і у крайніх точках, необхідно застосовувати інтерполяцію поліномом третього степеню на базі чотирьохточкового шаблону (рис. 4 (а), (б)).

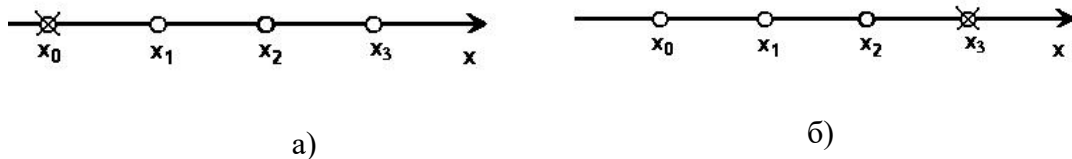


Рис. 4. Чотирьохточкові шаблони для обчислення других похідних у крайніх точках шаблону

Відповідні формули мають вигляд

$$\text{Ошибка!}, \quad (23)$$

для шаблону на рис. 4 (а), та

$$\text{Ошибка!}, \quad (24)$$

для шаблону на рис. 4 (б).

Для формул (23), (24) справедливі розклади

$$\text{Ошибка!}, \quad \zeta_9 \in [x_0, x_3],$$

$$\text{Ошибка!}, \quad \zeta_{10} \in [x_0, x_3],$$

що призводить до оцінок похибки

$$|\varepsilon^{++0;xx}| = |y^{+0;xx} - y''(x_0)| \leq C_6 h^2, \quad (25)$$

$$|\varepsilon_{-x001E_{-x001E_{-0;xx}}}| = |y_{-x001E_{-0;xx}} - y''(x_3)| \leq C_6 h^2, \quad (26)$$

де  $C_6 = 11M_4/12$ .

На практиці формули (14)-(21), (25)-(26) часто використовують для *апріорної* оцінки точності обчислення похідних, причому величини  $M_i$  (максимуми модулів  $i$ -х похідних) наближено знаходять за допомогою відповідних різницевих формул.

**Вибір оптимального кроку  $h$  чисельного диференціювання.** Виникає питання: чи можна збільшити точність обчислення похідних на певному відрізку  $[a; b]$ , розглядаючи більше вузлів інтерполяції, тобто зменшуючи величину відстані між вузлами  $h$  (яка ще називається *кроком* чисельного диференціювання)? На перший погляд відповідь на це питання буде позитивною: згідно з формулами (14)-(21), (25)-(26) похибка досягає нуля, якщо  $h \rightarrow 0$ . Але це буде справедливим лише у випадку, коли ми оперуємо «точними» значеннями  $y(x_i)$  заданої функції у вузлах інтерполяції, а також нехтуємо результатами округлень під час розрахунку за різницевиими формулами. В реальних умовах значення функції задаються наближено та існують обмеження на кількість розрядів комірки пам'яті комп'ютера, що призводить до додаткового накопичення похибок. Для врахування вказаних факторів сумарну похибку обчислення похідної представляють у вигляді суми двох складових

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (27)$$

де  $\varepsilon_1$  – похибка апроксимації похідної різницевою формулою (див. формули (14)-(21), (25)-(26)), а  $\varepsilon_2$  – похибка обчислень за самою різницевою формулою. Наприклад, для

різницевих формул (3), (4), вважаючи, що похибка значень функції  $y(x)$  для будь-якого значення аргументу оцінюється величиною  $\Delta$ , отримаємо для  $\varepsilon_2$  оцінку

$$\text{Ошибка!} \quad (28)$$

(тут ми знехтували похибкою округлень, яка для сучасних комп'ютерів суттєво менша, ніж  $\Delta$ ). З формул (27), (28) випливає, що, якщо  $h \rightarrow 0$ , то і  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ , в той час як похибка  $\varepsilon_2$  (і, відповідно, сумарна похибка  $\varepsilon$ ) необмежено зростає. В цьому сенсі кажуть про **некоректність** операції чисельного диференціювання, тобто про неможливість досягти будь-якої скільки завгодно великої точності під час обчислень.

Отже, значення сумарної похибки  $\varepsilon$  для даного значення  $\Delta$  цілком визначається величиною кроку чисельного диференціювання  $h$ . Виникає закономірне питання: якою вибрати величину кроку  $h$ , щоб отримати якомога меншу сумарну похибку  $\varepsilon$ ? Зрозуміло, що значення  $h$  треба вибирати так, щоб обидві компоненти похибки ( $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ ) були приблизно однаковими. Більш точний аналіз призводить до задачі мінімізації функції

$$\text{Ошибка!} \quad (29)$$

Розв'язуючи цю задачу, отримаємо

$$\text{Ошибка!} \quad (30)$$

При цьому виборі кроку диференціювання похибки  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$  будуть рівними:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{2\Delta C_1}, \quad (31)$$

а сумарна похибка оцінюватиметься як

$$\varepsilon = 2\sqrt{2\Delta C_1}, \quad (32)$$

### Завдання 1.

1. Задана функція шляху розгону транспортного засобу  $s=s(t)$  на відрізку часу  $[0, T]$ . Розбивши цей відрізок *точками сітки*  $t_0=0, t_1, t_2, \dots, t_n=T$  з кроком  $h=t_{i+1}-t_i, i=0,1,\dots,n-1$ , наближено обчислити величину швидкості  $v(t_i)$  (прискорення  $a(t_i)$ ) у точках сітки  $t_i, i=0,1,\dots,n$  за вказаними різницевиими формулами. Порівняти отримані наближені значення першої (другої) похідної з її точними значеннями  $s'(t)$  ( $s''(t)$ ); точні значення знайти аналітично. Знайти похибки обчислення похідних як модуль різниці між точним та наближеним значенням. Оцінити похибки за відповідними апіорними формулами (див. (14)-(21), (25)-(26)). Яка із різницевих формул забезпечує більшу точність і чому?

Провести аналогічні розрахунки швидкості (прискорення) на сітці з кроком  $h_1=h/2$ . Як змінилася величина похибки порівняно з попереднім випадком? Зробити висновок про порядок точності застосованих різницевих формул.

2. Вважаючи, що значення функції  $s(t)$  задані не точно, а з певною похибкою, що оцінюється величиною  $\Delta$ , знайти оптимальний крок чисельного диференціювання для кожної з застосованих різницевих схем і оцінити сумарну похибку  $\varepsilon$  обчислення похідної. Чи має сенс в даних умовах застосовувати схему вищого порядку точності?

### Варіанти завдань

| № | $s(t)$  | T | h   | Знайти величину | Різницева формула I                                                                   | Різницева формула II                            | $\Delta$ |
|---|---------|---|-----|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------|
| 1 | Ошибка! | 2 | 0.1 | $v(t)$          | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (7), $t=0$ (8), $t=T$ (9)                       | 0.001    |
| 2 | Ошибка! | 1 | 0.1 | $a(t)$          | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.005    |
| 3 | Ошибка! | 1 | 0.1 | $v(t)$          | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (8), $t=T-h$ (7), $t=T$ (9)                     | 0.01     |
| 4 | Ошибка! | 2 | 0.1 | $a(t)$          | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1                                     | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.001    |

|     |                                  |   |     |        |                                                                                       |                                                 |       |
|-----|----------------------------------|---|-----|--------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------|
|     |                                  |   |     |        | (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)                                                     |                                                 |       |
| 5   | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (9), $t=0$ (8), $t=h$ (7)                       | 0.005 |
| 6   | $\ln(\text{cht}) + t^2$          | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.01  |
| 7   | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (7), $t=0$ (8), $t=T$ (9)                       | 0.001 |
| 8   | <b>Ошибка!</b>                   | 2 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.005 |
| 9   | <b>Ошибка!</b>                   | 2 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (8), $t=T-h$ (7), $t=T$ (9)                     | 0.01  |
| 10  | $\sin t + t \cos 2t$             | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.001 |
| 11  | $te^t(1 - t^2)$                  | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (9), $t=0$ (8), $t=h$ (7)                       | 0.005 |
| 12  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.01  |
| 13  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (7), $t=0$ (8), $t=T$ (9)                       | 0.001 |
| 14  | $t \cdot \ln(t+1) - \cos 2t + 1$ | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.005 |
| 15  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (8), $t=T-h$ (7), $t=T$ (9)                     | 0.01  |
| 16  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.001 |
| 17  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (9), $t=0$ (8), $t=h$ (7)                       | 0.005 |
| 18  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.01  |
| 19  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (7), $t=0$ (8), $t=T$ (9)                       | 0.001 |
| 20  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.005 |
| 21  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (8), $t=T-h$ (7), $t=T$ (9)                     | 0.01  |
| 22  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=T$ (10) шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.001 |
| 23  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), $t=0$ (3)                                                                        | (9), $t=0$ (8), $t=h$ (7)                       | 0.005 |
| 24  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в), $t=h$ (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (10) шаблон рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.01  |
| 25  | <b>Ошибка!</b>                   | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (3), $t=T$ (4)                                                                        | (7), $t=0$ (8), $t=T$ (9)                       | 0.001 |
| 26. | $\ln(\text{sh}t) + t^3$          | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б), $t=T-h$ (10), шаблон                                          | (10), шаблон рис. 1 (в), $t=0$ (23), $t=T$ (24) | 0.01  |

|     |                                     |   |     |        |                                                                                            |                                                |       |
|-----|-------------------------------------|---|-----|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------|
|     |                                     |   |     |        | рис. 1 (в), t=T (10)<br>шаблон рис. 2 (в)                                                  |                                                |       |
| 27. | $te^t(1-t^3)$                       | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), t=0 (3)                                                                               | (9), t=0 (8),<br>t=h (7)                       | 0.005 |
| 28. | $\cos t + t \sin 2t$                | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (б),<br>t=T-h (10), шаблон<br>рис. 1 (в), t=T (10)<br>шаблон рис. 2 (в) | (10), шаблон рис. 1<br>(в), t=0 (23), t=T (24) | 0.001 |
| 29. | $2t\sqrt{t} - tsht$                 | 1 | 0.1 | $v(t)$ | (4), t=0 (3)                                                                               | (7), t=0 (8),<br>t=T (9)                       | 0.001 |
| 30. | $t \cos \frac{\pi t}{4} + \ln(1+t)$ | 1 | 0.1 | $a(t)$ | (10), шаблон рис 2 (в),<br>t=h (10), шаблон рис. 1<br>(в), t=0 (10) шаблон<br>рис. 2 (б)   | (10), шаблон рис. 1<br>(в), t=0 (23), t=T (24) | 0.005 |

Приклад розв'язання завдання. Дано:  $s(t)=(t+1)^2 - e^{v^2} \cdot \cos 2t$ ,  $T=1$ ,  $h=0.1$ ,  $\Delta=0.001$ . Знайти наближено величину  $a(t)$ . В якості першої різницевої схеми використати формулу (10) на шаблоні рис. 2 (б). У крайній правій точці  $t=T$  відрізка  $[0, T]$  – формулу (10) на шаблоні рис. 2 (в), у точці  $t=T-h$  – формулу (10) на шаблоні рис. 2 (а). В якості другої схеми – формулу (10) на шаблоні рис. 1 (в), формулу (23) в точці  $t=0$ , формулу (24) в точці  $t=T$ .

Спочатку розрахуємо аналітичне значення величини  $a(t)$  – другої похідної від функції шляху розгону  $s=s(t)$ :

**Ошибка!**

(33)

Вхідні дані та результати розрахунків розмістимо на аркуші електронної таблиці (рис. 5).

|    |              |                                           |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
|----|--------------|-------------------------------------------|--------------------|------------------|--------------------------|----------|-----------------|-------------------|--------------------------|----------|-----------------|---|---|
| C4 |              | =2+EXP(A4/2)*(15/4*COS(2*A4)+2*SIN(2*A4)) |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
|    | A            | B                                         | C                  | D                | E                        | F        | G               | H                 | I                        | J        | K               | L | M |
| 1  | Крок сітки h | 0,1                                       |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 2  |              |                                           |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 3  | t            | s(t)                                      | s''(t) (аналітич.) | s''(t) (схема I) | s''(t)-y'' <sub>xx</sub> | s'''(t)  | Апріорна оцінка | s''(t) (схема II) | s''(t)-y'' <sub>xx</sub> | s'''(t)  | Апріорна оцінка |   |   |
| 4  | 0            | 0                                         | 5,75               | 6,270150727      | 0,520150727              | 3,939296 | 0,39393         | 5,876221081       | 0,1262211                | -16,6306 | 0,152447        |   |   |
| 5  | 0,1          | 0,179684                                  | 6,281394397        | 6,664080374      | 0,382685977              | 2,276234 | 0,227623        | 6,270150727       | 0,0112437                | -19,3935 | 0,016161        |   |   |
| 6  | 0,2          | 0,42207                                   | 6,677984495        | 6,891703752      | 0,213719257              | 0,336883 | 0,033688        | 6,664080374       | 0,0139041                | -21,5832 | 0,017986        |   |   |
| 7  | 0,3          | 0,731097                                  | 6,907928843        | 6,925392028      | 0,017463185              | -1,82144 | 0,182144        | 6,891703752       | 0,0162251                | -23,0419 | 0,019202        |   |   |
| 8  | 0,4          | 1,109041                                  | 6,943459528        | 6,743248406      | 0,200211122              | -4,12562 | 0,412562        | 6,925392028       | 0,0180675                | -23,6277 | 0,01969         |   |   |
| 9  | 0,5          | 1,556238                                  | 6,762547364        | 6,33068625       | 0,431861114              | -6,48839 | 0,648839        | 6,743248406       | 0,019299                 | -23,2227 | 0,019352        |   |   |
| 10 | 0,6          | 2,070868                                  | 6,350486612        | 5,681847579      | 0,668639033              | -8,81066 | 0,881066        | 6,33068625        | 0,0198004                | -21,7408 | 0,018117        |   |   |
| 11 | 0,7          | 2,648805                                  | 5,701320178        | 4,80078198       | 0,900538198              | -10,9847 | 1,098474        | 5,681847579       | 0,0194726                | -21,7408 | 0,018117        |   |   |
| 12 | 0,8          | 3,283561                                  | 4,819025044        | 3,702308233      | 1,116716812              | -10,9847 | 1,098474        | 4,80078198        | 0,0182431                | -21,7408 | 0,018117        |   |   |
| 13 | 0,9          | 3,966324                                  | 3,718379911        | 3,702308233      | 0,016071679              | -10,9847 | 1,098474        | 3,702308233       | 0,0160717                | -21,7408 | 0,018117        |   |   |
| 14 | 1            | 4,68611                                   | 2,425442989        | 3,702308233      | 1,276865244              | -10,9847 | 1,098474        | 2,603834485       | 0,1783915                | -21,7408 | 0,199291        |   |   |
| 15 |              |                                           |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 16 |              |                                           |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 17 | Крок сітки h | 0,05                                      |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 18 |              |                                           |                    |                  |                          |          |                 |                   |                          |          |                 |   |   |
| 19 | t            | s(t)                                      | s''(t) (аналітич.) | s''(t) (схема I) | s''(t)-y'' <sub>xx</sub> | s'''(t)  | Апріорна оцінка | s''(t) (схема II) | s''(t)-y'' <sub>xx</sub> | s'''(t)  | Апріорна оцінка |   |   |
| 20 | 0            | 0                                         | 5,75               | 6,027986192      | 0,277986192              | 5,011921 | 0,250596        | 5,777390151       | 0,0273902                | -13,4904 | 0,030916        |   |   |
| 21 | 0,05         | 0,082307                                  | 6,030444482        | 6,278582233      | 0,248137751              | 4,3374   | 0,21687         | 6,027986192       | 0,0024583                | -15,1264 | 0,003151        |   |   |

Рис. 5. Розміщення вхідних даних та результатів розрахунку на аркуші електронної таблиці

Значення кроку сітки чисельного диференціювання розмістимо в комірці B1. В першому стовпці розташуємо значення аргументу  $t$  в точках сітки. В комірці A4 введемо початкове значення  $t=0$ , в комірці A5 – формулу  $=A4+\$B\$1$  і скопіюємо результат у діапазон A6:A14. У другому стовпці введемо значення функції  $s(t)$  у вузлах сітки, для чого наберемо в комірці B4 формулу  $=(A4+1)^2-EXP(0,5*A4)*COS(2*A4)$  і скопіюємо результат у діапазон B5:B14. У третьому стовпці розмістимо аналітичні значення другої похідної за формулою (33): в комірку C4 введемо формулу  $=2+EXP(A4/2)*(15/4*COS(2*A4)+2*SIN(2*A4))$  і скопіюємо вміст цієї комірки у діапазон C5:C14.

Дані у подальших стовпцях пов'язані з наближеним обчисленням похідної: у стовпцях D-G – за схемою I, у стовпцях I-L – за схемою II.

У стовпці D розмістимо наближені значення похідної за схемою I. У комірці D4 введемо згідно (10) формулу  $=(B4-2*B5+B6)/\$B\$1^2$  та скопіюємо результат у комірки D5:D12. Оскільки у нас немає даних про значення функції  $s(t)$  поза межами відрізка  $[0, T]$ , то для розрахунку похідної у точках  $t=T-h$  та  $t=T$  вже не можна використовувати застосовану для інших точок відрізка схему (10) на шаблоні рис. 2 (б). В точці  $t=T-h$  застосуємо схему (10) на шаблоні рис. 1 (в) (формула  $=(B12-2*B13+B14)/\$B\$1^2$  у комірці D13), а у точці  $t=T$  – схему (10) на шаблоні рис. 2 (в) (формула  $=(B12-2*B13+B14)/\$B\$1^2$  у комірці D14). У стовпці E розмістимо «точне» значення похибки похідної, обчисленої за використаними різницевиими формулами (формула  $=ABS(C4-D4)$  у комірці E4, «протягнута» на діапазон E5:E14), апіорну оцінку цієї похибки за формулами (20), (21) – у стовпці G. Для обчислення за цими формулами необхідно знати оцінку третьої похідної функції  $s(t)$ , для чого застосуємо різницеву формулу (12). Наближені значення цієї похідної розмістимо у стовпці F, для чого у комірку F4 введемо формулу  $=(B4+3*B5-3*B6+B7)/\$B\$1^3$  і «протягнемо» на діапазон F5:F11. Для розрахункових точок  $t=T$ ,  $t=T-h$ ,  $t=T-2h$ ,  $t=T-3h$  завдяки відсутності даних за межами відрізка  $[0, T]$  будемо використовувати однакові вузли інтерполяції (формули  $=(\$B\$11+3*\$B\$12-3*\$B\$13+\$B\$14)/\$B\$1^3$  у комірках F11:F14). Формулу апіорної оцінки  $=ABS(F4)*\$B\$1$  введемо у комірку G4 і скопіюємо результат у діапазон G5:G14.

Приступаємо до розрахунків за схемою II. У стовпці I розмістимо наближені значення другої похідної. Для  $t=0$  застосуємо різницеву формулу (23) на чотирьохточковому шаблоні, тому в комірці I4 введемо  $=(2*B4-5*B5+4*B6-B7)/\$B\$1^2$ . Для  $t=T$  застосуємо формулу (24) (також на чотирьохточковому шаблоні), увівши в комірку I14 формулу  $=(B11+4*B12-5*B13+2*B14)/\$B\$1^2$ . Для інших точок відрізка застосуємо центральну різницеву трьохточкову формулу (10), вводячи в комірку I5 формулу  $=(B4-2*B5+B6)/\$B\$1^2$  і копіюючи її вміст у діапазон I6:I13. «Точну» похибку формули розмістимо у наступному стовпці (формула  $=ABS(C4-I4)$  у комірці J4 з «протяжкою» на діапазон J5:J14). Для апіорної оцінки похибки за формулами (19), (25), (26) необхідно оцінити похідну четвертого порядку. Її оцінимо за допомогою різницевої формули (13), а результати розрахунку розмістимо у стовпці K (формула  $=(B4-4*B5+6*B6-4*B7+B8)/\$B\$1^4$  в комірці K4 копіюванням вмісту комірки у діапазон K5:K10, і формула  $=(\$B\$10-4*\$B\$11+6*\$B\$12-4*\$B\$13+\$B\$14)/\$B\$1^4$  у діапазоні K11:K14). Для обчислення апіорної оцінки похибки введемо у комірку L4 формулу  $=11/12*ABS(K4)*\$B\$1^2$ , у комірку L14 – формулу  $=11/12*ABS(K14)*\$B\$1^2$ , а у комірку L5 – формулу  $=1/12*ABS(K5)*\$B\$1^2$  з «протяжкою» на діапазон L6:L13.

Проаналізуємо результати розрахунків. Ми бачимо, що похибка схеми II набагато менша (у більшості точок – на порядок величини). Це пов'язано з порядком точності використаних різницевих формул: формула (10) на шаблонах рис. 2 (б), (в) мають перший порядок точності, а центральна різницева схема (10) на шаблоні рис. 1 (в), а також схеми (23), (24) – другий порядок. Апіорні оцінки похибки наближено узгоджуються з «точними» значеннями похибки.

Проведемо аналогічні обчислення з половинним кроком  $h_1=h/2=0.5$  сітки чисельного інтегрування (на рис. 5 відповідні дані розміщені, починаючи з рядка 17). В результаті аналізу даних можна побачити, що для схеми I похибка порівняно з попереднім випадком зменшилася наближено у два рази, а для схеми II – у чотири рази, що підтверджує висновок про перший порядок точності схеми I і другий порядок схеми II.

Припустимо тепер, що значення функції  $s(t)$  задані наближено, і абсолютна похибка оцінюється величиною  $\Delta=0.001$ . Визначимо оптимальний крок  $h$  чисельного диференціювання для обох застосованих різницевих схем. Для схеми (10) на шаблоні рис. 2, (б) сумарна похибка згідно з формулами (27), (20), (10) оцінюється як

**Ошибка!.**

Знаходимо мінімум функції  $\varepsilon(h)$ . Маємо

**Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!.**

Підставляючи у ці формули значення  $\Delta=0.001$ ,  $C_5=M_3=\max|y'''(x)|=12,4829$ , для першої схеми отримаємо

$$h^{I;opt} \approx 0.086, \varepsilon(h^{I;opt}) \approx 1.614.$$

Для центральної різницевої формули (10) на шаблоні рис. 1 (в), виходячи з формул (27), (19), (10) аналогічно матимемо

**Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!, Ошибка!.**

звідки, враховуючи, що  $\Delta=0.001$ ,  $C_4=M_4/12=\max|y^{(IV)}(x)|/12=1.97381$ , отримаємо

$$h^{II;opt} \approx 0.212, \varepsilon(h^{II;opt}) \approx 0.178,$$

тобто в даних умовах має сенс використовувати схему II вищого порядку для досягнення більшої точності.

## 8.2. Чисельне інтегрування.

Для отримання формул наближеного обчислення визначених інтегралів (так званих *квадратурних формул*) використовують той самий прийом, що і для чисельного диференціювання: підінтегральну функцію  $y(x)$  наближують функцією  $\varphi(x, a)$  і вважають

$$\text{Ошибка!} \quad (1)$$

В якості наближуючої функції  $\varphi(x, a)$  можна використовувати інтерполяційні поліноми, сплайни і т. ін. Обмежимося розглядом інтерполяційного полінома у формі Ньютона. Зауважимо, що нам потрібна *глобальна інтерполяція* функції  $y(x)$  на відрізку  $[a, b]$ , а для цього неможливо застосовувати інтерполяційний поліном високого степеню (див. теорему Фабера). Втім, необхідно мати можливість збільшувати кількість вузлів інтерполяції з метою підвищення точності чисельного інтегрування. Подібне ускладнення можна усунути у такий спосіб: відрізок інтегрування  $[a, b]$  розіб'ємо на частинні відрізки точками  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ ; інтеграл I дорівнюватиме тоді сумі інтегралів по частинним відрізкам

**Ошибка!.**

Кожен інтеграл  $I_i$  на частинному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  замінимо наближеною величиною  $I_i \sim$  за формулою (1):

$$\text{Ошибка!}, \quad (2)$$

(для кожного частинного відрізка  $[x_{i-1}, x_i]$  наближуюча функція  $\varphi(x, a)$  буде своя) і, таким чином,

$$\text{Ошибка!}. \quad (3)$$

Отже, задача наближеного обчислення інтегралу зводиться до побудови квадратурних формул (2) на частинному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$  та обчисленні суми (3).

Розглядаючи у формулі (2) в якості  $\varphi(x, a)$  інтерполяційний поліном першого степеню з вузлами  $x_{i-1}, x_i$ , отримаємо

$$\text{Ошибка!}, \quad (4)$$

де позначено  $h_i=x_i-x_{i-1}$ . Формула (4) називається *формулою трапецій на частинному відрізку  $[x_{i-1}, x_i]$* . Геометричним змістом формули трапецій є наближена заміна площі криволінійної трапеції, побудованої прямими  $x=x_{i-1}$ ,  $x=x_i$ , віссю Oх та частиною графіка функції  $y=y(x)$  площею звичайної трапеції з бічною стороною, що є січною, яка проходить через точки графіка  $(y(x_{i-1}), x_{i-1})$  та  $(y(x_i), x_i)$  (рис. 6 (а)).

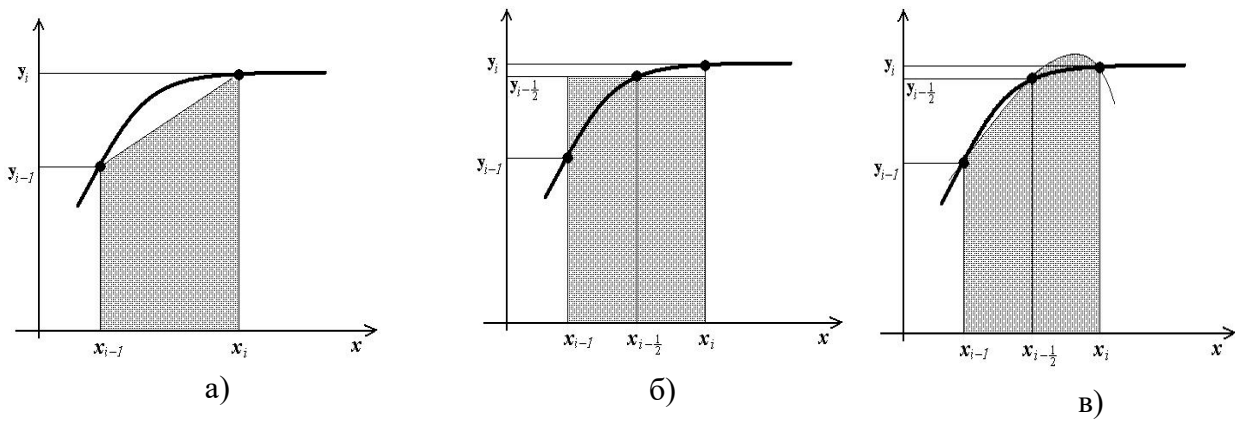


Рис. 6. Геометричний зміст формул чисельного інтегрування: формула трапецій (а), центральна формула прямокутників (б), формула Сімпсона (в)

З формул (2), (4) випливає *формула трапецій для повного відрізка*  $[a, b]$ , яку запишемо для випадку *рівномірної сітки* (рівновіддалених) вузлів, тобто для  $h_1 = h_2 = \dots = h_n = h$

**Ошибка!**

(5)

З формули Тейлора випливає така оцінка похибки формули трапецій на частинному відрізку

$$R_{\text{тр};i} = |I_i - I; \tilde{\text{тр}};i| \leq C_1 h^3; i, \quad (6)$$

де позначено  $C_1 = M_{2,i}/12$ ,  $M_{2,i} = \max|y''(x)|$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ . З цієї формули, формули (3) та формули для абсолютної похибки суми отримаємо формулу оцінки похибки формули трапецій (5) для повного відрізка

$$R^{\text{тр}} = |I - I; \tilde{\text{тр}}| \leq C_2 h^2, \quad (7)$$

$C_2 = M_2(b-a)/12$ ,  $M_2 = \max|y''(x)|$ ,  $x \in [a, b]$ . Аналогічно формулам чисельного диференціювання *порядком точності* (або просто *порядком*) формул наближеного обчислення інтегралів називається показник степеню  $h$  у формулах для оцінки похибки. Отже, формула трапеції має третій порядок на частинному відрізку, і другий порядок – на повному.

Зауважимо, що, на відміну від чисельного диференціювання, для наближеного обчислення інтегралів має сенс використовувати інтерполяційний поліном нульового степеню з одним вузлом інтерполяції. Побудовані на його основі формули називаються *формулами прямокутників*. В якості вузла можна взяти будь-яку точку з відрізка  $[x_{i-1}, x_i]$ , зокрема, точку  $x_{i-1}$  або точку  $x_i$  (отримані формули називають відповідно *лівою та правою формулами прямокутників*). Втім, найкращі результати дає вибір вузла – середини відрізка  $[x_{i-1}, x_i]$ , тобто точки  $x_{i-1/2} = (x_{i-1} + x_i)/2$ . Відповідна формула чисельного інтегрування має вигляд

$$\text{Ошибка!} \quad (8)$$

і називається *центральною формулою прямокутників*. Геометричним змістом цієї формули є заміна площі криволінійної трапеції площею прямокутника, побудованого на сторонах  $h_i$  та  $y(x_{i-1/2})$  (рис. 6 (б)). Для повного відрізка  $[a, b]$  центральна формула прямокутників прийме вигляд

**Ошибка!**

(9)

Оцінки похибки формул (8), (9) є такими:

$$R_{\text{ц};i}^{\text{пр}} = |I_i - I; \tilde{\text{ц}};i|^{\text{пр}} \leq C_3 h^3; i, \quad (10)$$

$$R_{\text{ц}}^{\text{пр}} = |I - I; \tilde{\text{ц}}|^{\text{пр}} \leq C_4 h^2, \quad (11)$$

де  $C_3=M_{2,i}/24$ ,  $C_4=M_2(b-a)/24$ . Отже, центральні формули прямокутників мають той самий порядок точності, як і відповідні формули трапецій. Навіть формули (8), (9) є дещо точнішими за формули (4), (5) завдяки меншим значенням констант  $C_3$ ,  $C_4$ .

Розглядаючи в якості наближуючої функції інтерполяційний поліном другого степеню, побудований на вузлах  $x_{i-1}$ ,  $x_{i-1/2}$ ,  $x_i$ , отримаємо *формулу Сімпсона (парабол)* на частинному відрізку

**Ошибка!**

**Ошибка!.**

(12)

Геометричний зміст формули (12) зрозумілий: графік підінтегральної функції замінюємо параболою, що проходить через точки  $(y(x_{i-1}), x_{i-1})$ ,  $(y(x_{i-1/2}), x_{i-1/2})$ ,  $(y(x_i), x_i)$ , та обчислюємо площу криволінійної трапеції під цією параболою, розглядаючи її як наближення до площі криволінійної трапеції, утвореної графіком функції  $y=y(x)$  (рис. 6 (в)).

Формула Сімпсона на повному відрізку  $[a, b]$  запишеться у такий спосіб:

**Ошибка!**

**Ошибка!**

(13)

Оцінка похибки формул Сімпсона має вигляд

$$R_{\text{смп};i} = |I_i - I; \tilde{\text{смп}}; i| \leq C_5 h^5; i, \quad (14)$$

$$R^{\text{смп}} = |I - I; \tilde{\text{смп}}| \leq C_6 h^4, \quad (15)$$

де  $C_5=M_{4,i}/2880$ ,  $M_{4,i}=\max|y^{(IV)}(x)|$ ,  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $C_6=M_4(b-a)/2880$ ,  $M_4=\max|y^{(IV)}(x)|$ ,  $x \in [a, b]$ . З формул (14), (15) випливає, що формула Сімпсона на частинному відрізку має п'ятий порядок точності, а на повному – четвертий порядок, тобто значно точніша, ніж розглянуті формули прямокутників та трапецій.

**Апостеріорна оцінка похибки інтегральних формул.** Оцінити похибку обчислення інтегралів можна за розглянутими *апріорними* формулами (6), (7), (10), (11), (14), (15), оцінюючи значення похідних, що входять до їх складу, за допомогою відповідних різницеви формул. Втім, на практиці похибку часто оцінюють *апостеріорно*, тобто за результатами додаткових обчислень. Такий метод апостеріорної оцінки похибки був запропонований німецьким математиком К. Рунге на початку XX століття.

Згідно з методом Рунге спочатку за певною квадратурною формулою проводять обчислення інтегралу на сітці вузлів з певним кроком  $h$ , отримуючи в результаті наближене значення  $I; \tilde{h}$ . Після цього проводять додаткове обчислення того самого інтегралу (за тією ж формулою) на сітці вузлів з половинним кроком  $h/2$ , отримуючи значення  $I; \tilde{h/2}$ . Далі похибки обчислення величин  $I; \tilde{h}$  та  $I; \tilde{h/2}$  отримують, як певну лінійну комбінацію значень  $I; \tilde{h}$  та  $I; \tilde{h/2}$ .

Нехай для певної формули чисельного інтегрування справедливий розклад

$$I; \tilde{h} = I + ch^m + \dots, \quad (16)$$

де  $I$  – точне значення інтегралу,  $m$  – порядок точності квадратурної формули, а константа  $c$  не залежить від  $h$  (у формулі (16) не виписані доданки по  $h$  порядку  $m+1$  і вище). Тоді для величини  $I; \tilde{h/2}$  справедлива формула

$$\text{Ошибка!}. \quad (17)$$

Виключаючи з формул (16), (17) значення  $I$ , нехтуючи доданками вищих порядків по  $h$ , для похибки наближених значень  $I; \tilde{h}$  та  $I; \tilde{h/2}$  отримаємо оцінки

$$\text{Ошибка!}, \quad (18)$$

$$\text{Ошибка!}. \quad (19)$$

Застосування формул Рунге дозволяє автоматично вибрати крок інтегрування, закінчуючи обчислення по досягненню заданої точності.

### Завдання 2.

Заданий графік часу залежності швидкості транспортного засобу від часу:  $v=v(t)$  на відрізку  $[0, T]$ . Знайти переміщення транспортного засобу за проміжок часу  $[0, T]$ . Інтегрування зробити заданим методом із заданим кроком  $h$ . Знайти похибку обчислення інтегралу, порівнявши його наближену величину з точним значенням.

Провести додаткове обчислення інтегралу з кроком  $h_1=h/2$ . Як при цьому змінилася похибка? Зробити висновок про порядок точності формули чисельного інтегрування.

Оцінити похибку обчислення інтегралів на сітках з кроками  $h$  та  $h/2$  апостеріорно за методом Рунге. Порівняти величину апостеріорної оцінки похибки з її «точним» значенням.

### *Варіанти завдань*

| №   | $v(t)$                                     | T | h   | Формула інтегрування |
|-----|--------------------------------------------|---|-----|----------------------|
| 1.  | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 2.  | Ошибка!                                    | 2 | 0.1 | Трапецій             |
| 3.  | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 4.  | Ошибка!                                    | 2 | 0.1 | Прямокутників        |
| 5.  | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 6.  | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 7.  | $\sin\pi t \cdot \cos^2\pi t + 2t\ln(t+1)$ | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 8.  | Ошибка!                                    | 2 | 0.1 | Трапецій             |
| 9.  | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 10. | $sh3t - tcht$                              | 2 | 0.1 | Прямокутників        |
| 11. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 12. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 13. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 14. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 15. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 16. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 17. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 18. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 19. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 20. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 21. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 22. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 23. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 24. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 25. | Ошибка!                                    | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 26. | $t \cos \frac{\pi t}{4} + \ln(1+t)$        | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 27. | $2t\sqrt{t} - tsht$                        | 1 | 0.1 | Сімпсона             |
| 28. | $te^t(1-t^3)$                              | 1 | 0.1 | Прямокутників        |
| 29. | $\cos t + t \sin 2t$                       | 1 | 0.1 | Трапецій             |
| 30. | $\ln(sht) + t^3$                           | 1 | 0.1 | Сімпсона             |

Приклад розв'язання завдання. Дано:  $v(t)=\ln(t+1)+\cos\pi t$ ,  $T=1$ ,  $h=0.1$ . Метод інтегрування – формула Сімпсона.

Оскільки  $v(t)=s'(t)$  і, вважаючи, що  $s(0)=0$ , отримаємо, що шлях, пройдений за проміжок часу  $[0,T]$ , дорівнюватиме

$$\text{Ошибка!} \quad (20)$$

Спочатку обчислимо точне значення інтегралу (20), використовуючи формулу інтегрування частинами і формулу Ньютона-Лейбніца:

Ошибка!Ошибка!Ошибка!

$$\text{Ошибка!} + 0.25. \quad (21)$$

Підставляючи у формулу (21) задане значення  $T=1$ , отримаємо

$$\text{Ошибка!} = 0.25. \quad (22)$$

Вхідні дані та результати обчислень розмістимо на аркуші електронної таблиці (рис. 7).

| F4 |              | =B1/6*(B4+2*СУММ(B5:B13)+4*СУММ(D5:D14)+B14) |             |                |      |             |              |                      |
|----|--------------|----------------------------------------------|-------------|----------------|------|-------------|--------------|----------------------|
|    | A            | B                                            | C           | D              | E    | F           | G            | H                    |
| 1  | Крок сітки h | 0,1                                          |             |                |      |             |              |                      |
| 2  |              |                                              |             |                |      |             |              |                      |
| 3  | $t_i$        | $v(t_i)$                                     | $t_{i-1/2}$ | $v(t_{i-1/2})$ | I    | $I_h$       | $\Delta I_h$ | $\Delta I_h$ (Рунге) |
| 4  | 0            | 1                                            |             |                | 0,25 | 0,250000087 | 8,65094E-08  | 8,64946E-08          |
| 5  | 0,1          | 0,960588                                     | 0,05        | 0,990128       |      |             |              |                      |
| 6  | 0,2          | 0,845481                                     | 0,15        | 0,911971       |      |             |              |                      |
| 7  | 0,3          | 0,666495                                     | 0,25        | 0,762893       |      |             |              |                      |
| 8  | 0,4          | 0,443606                                     | 0,35        | 0,559027       |      |             |              |                      |
| 9  | 0,5          | 0,202733                                     | 0,45        | 0,323638       |      |             |              |                      |
| 10 | 0,6          | -0,02701                                     | 0,55        | 0,084606       |      |             |              |                      |
| 11 | 0,7          | -0,21635                                     | 0,65        | -0,12849       |      |             |              |                      |
| 12 | 0,8          | -0,33879                                     | 0,75        | -0,28739       |      |             |              |                      |
| 13 | 0,9          | -0,37339                                     | 0,85        | -0,3681        |      |             |              |                      |
| 14 | 1            | -0,30685                                     | 0,95        | -0,35325       |      |             |              |                      |
| 15 |              |                                              |             |                |      |             |              |                      |
| 16 |              |                                              |             |                |      |             |              |                      |
| 17 | Крок сітки h | 0,05                                         |             |                |      |             |              |                      |
| 18 |              |                                              |             |                |      |             |              |                      |
| 19 | $t_i$        | $v(t_i)$                                     | $t_{i-1/2}$ | $v(t_{i-1/2})$ | I    | $I_h$       | $\Delta I_h$ | $\Delta I_h$ (Рунге) |
| 20 | 0            | 1                                            |             |                | 0,25 | 0,250000005 | 5,42069E-09  | 5,40591E-09          |
| 21 | 0,05         | 0,990128                                     | 0,025       | 0,997535       |      |             |              |                      |
| 22 | 0,1          | 0,960588                                     | 0,075       | 0,977794       |      |             |              |                      |

Рис. 7. Розміщення вхідних даних та розрахунків наближеного інтегрування на аркуші електронної таблиці.

Значення кроку сітки чисельного інтегрування розмістимо в комірці B1. В першому стовпці розташуємо значення аргументу  $t$  в точках сітки. В комірці A4 введемо початкове значення  $t=0$ , в комірці A5 – формулу  $=A4+\$B\$1$  і скопіюємо результат у діапазон A6:A14. У другому стовпці введемо значення функції  $v(t)$  у вузлах сітки, для чого наберемо в комірці B4 формулу  $=A4*\text{LN}(A4+1)+\text{COS}(\text{ПИ}()*A4)$  і скопіюємо результат у діапазон B5:B14. У третьому стовпці розташуємо значення аргументу  $t_{i-1/2}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Для цього в комірку C5 введемо формулу  $=A4+\$B\$1/2$ , а в комірку C6 – формулу  $=C5+\$B\$1$  і «протягнемо» її вміст на діапазон C6:C14. У стовпці D розмістимо значення функції  $v(t)$  в точках  $t_{i-1/2}$ : скопіюємо вміст комірки B5 у комірку D5 і «протягнемо» результат на діапазон D6:D14.

Усе підготовлене для обчислення інтегралу за формулою Сімпсона. В комірку E4 введемо точне значення інтегралу (0,25), а в комірку F4 – формулу Сімпсона:  $=B1/6*(B4+2*\text{СУММ}(B5:B13)+4*\text{СУММ}(D5:D14)+B14)$ . В комірці G4 будемо розраховувати похибка чисельного інтегрування: формула  $=\text{ABS}(E4-F4)$ .

Отже, в результаті розрахунків з кроком інтегрування  $h=0.1$  Отримаємо такі результати: наближене значення інтегралу

$$I; \sim_h = 0,250000087,$$

похибка обчислень дорівнює

$$R_h = 8,65094E-08.$$

Проведемо аналогічні розрахунки з кроком  $h_1 = h/2 = 0.05$  (на аркуші електронної таблиці результати розташовані, починаючи з рядка 17, див. рис. 7). В цьому випадку ми отримаємо такі результати:

$$I; \tilde{h/2} = 0,250000005,$$

$$R_{h/2} = 5,42069E-09.$$

Порівняно з попереднім випадком похибка зменшилася у 16 разів, що підтверджує четвертий порядок точності формули Сімпсона ( $16 = 2^4$ , тобто  $m = 4$ ).

Оцінимо похибки апостеріорно за методом Рунге. Формули (18), (19) в даному випадку ( $m = 4$ ) мають вигляд

$$\text{Ошибка!}, \quad (23)$$

$$\text{Ошибка!}. \quad (24)$$

У комірку H4 введемо формулу (23):  $=16/15*ABS(\$F\$4-\$F\$20)$ , а в комірку H20 – формулу (24):  $=1/15*ABS(\$F\$4-\$F\$20)$ . Можемо спостерігати добре узгодження «точної» похибки та її апостеріорної оцінки.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 9. НАБЛИЖЕННЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ

**Мета роботи.** Засвоїти поняття різницевої схеми для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь, апроксимації, стійкості, збіжності. Засвоїти методи наближеного розв'язання задачі Коші: Ейлера, Рунге-Кутти. Навчитись оцінювати похибку наближеного розв'язку апостеріорно методом Рунге.

### Теоретичний матеріал.

**Наближені методи знаходження розв'язку диференціальних рівнянь.**

**Постановка задачі Коші знаходження наближеного розв'язку диференціального рівняння.** Задача Коші для звичайного диференціального рівняння полягає у знаходженні функції  $y(t)$ , яка для  $t_0 < t \leq T$  задовольняє диференціальному рівнянню

$$y'(t) = f(t, y), \quad (1)$$

а для  $t = t_0$  – початковій умові

$$y(t_0) = y_0. \quad (2)$$

Геометрично задача інтегрування диференціальних рівнянь полягає в знаходженні сімейства інтегральних кривих у площині  $(t, y)$ , які в кожній своїй точці мають заданий напрямок дотичної. Завданням початкової умови (2) ми виділяємо з сімейства ту єдину криву, яка проходить через фіксовану точку  $(t_0, y_0)$ .

**Теорема.** Нехай функція  $f(t, y)$  неперервна на множині  $\{t_0 \leq t \leq T, -\infty < y < \infty\}$  та задовольняє умові Ліпшиця

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

для будь-яких  $y_1, y_2$  та  $t \in [t_0, T]$  з певною константою  $L$ . Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок.

**Поняття про різницеві схеми.** Виписати точний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді аналітичної формули вдається рідко, тому для розв'язання необхідно застосовувати наближені методи. Нині значну популярність набули *різницеві методи*, суть яких полягає в тому, що наближений розв'язок диференціального рівняння визначається не на всьому відрізку  $[t_0, T]$ , а на певній множині значень  $\{t_0, t_1, \dots, t_n = T\}$ , яка називається *сіткою*; значення  $t_0, t_1, \dots, t_n$  називають *вузлами* сітки. Сітка називається *рівномірною*, якщо

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_n - t_{n-1} = h;$$

значення  $h$  у цьому випадку називається *кроком сітки* (в подальшому розглядатимемо лише рівномірні сітки). Наближений розв'язок задачі (1), (2) шукається як певна функція, задана на сітці (*сіткова функція*), значення  $y_0, y_1, \dots, y_n$  якої у вузлах сітки є наближеннями до відповідних значень  $y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n)$  точного розв'язку задачі (1), (2).

Співвідношення для визначення сіткової функції – наближеного розв'язку задачі (1), (2) можна отримати, замінивши значення похідної у точках  $t_i$  її наближеними значеннями. Наприклад, замінюючи значення похідної  $y'(t_i)$  *правою різницею*, тобто, вважаючи, що

$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

отримаємо замість (1) сукупність наближених співвідношень

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(y_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Подібний процес заміни диференціальних рівнянь їх алгебраїчними аналогами називається *дискретизацією диференціальної задачі*, а отримані в результаті алгебраїчні співвідношення – *різницеви́ми схемами*.

Із співвідношень (3) можна виразити  $y_{i+1}$  і записати їх у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i), \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (4)$$

Зважаючи на те, що  $y_0$  нам відомо за умовою задачі, можна за *явними формулами* (4) послідовно обчислити  $y_1, \dots, y_n$ , розв'язавши таким чином задачу знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2). Подібні різницеві схеми називають *явними*. Схема (3) має назву *явної схеми Ейлера*. Якщо у формулі (3) функцію  $f$  у правій частині обчислювати у точці  $(t_{i+1}, y_{i+1})$ , то отримаємо *неявну схему Ейлера*

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(y_{i+1}, t_{i+1}), \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

У випадку, коли з формули (5) не вдається явно виразити  $y_{i+1}$  через  $y_i$ , для обчислення  $y_{i+1}$  необхідно застосовувати наближені методи знаходження кореня алгебраїчного рівняння (простої ітерації, Ньютона тощо).

У схемах (3), (5) для обчислення невідомого  $y_{i+1}$  використовується лише значення  $y_i$ . Такі схеми називають *однокроковими*. Якщо для знаходження  $y_{i+1}$  необхідно задіяти  $y_i, y_{i-1}, \dots$ , то такі схеми називаються *багатокроковими*. Наприклад, якщо у формулі (3) застосувати іншу наближену формулу для похідної

$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

так звану *центральну різницю*, то отримаємо *двокрокову схему*

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(y_i, t_i), \quad i=1, 2, \dots, n-1. \quad (6)$$

Багатокрокові методи, як правило, більш точні, ніж однокрокові, але для їх застосування необхідно формувати додаткові рівняння. Зокрема, у схемі (6) для обчислення  $y_2$  необхідно знати  $y_0$  та  $y_1$ , а за початкових умов нам відомо лише  $y_0$ .

Зрозуміло, що різницеві схеми для певного диференціального рівняння можна побудувати багатьма способами. Виникає питання: які схеми взагалі придатні для обчислень, і які серед придатних забезпечують кращу точність? Для відповіді необхідно насамперед визначити поняття точності схеми та її похибки. *Локальною похибкою* різницевої схеми називається різниця між точним розв'язком задачі (1), (2) в точці  $t_i$  і значенням наближеного розв'язку  $y_i$  різницевої схеми:

$$l_i = y(t_i) - y_i, \quad i=0, 1, \dots, n.$$

*Глобальною похибкою* (або просто *похибкою*) схеми називається сіткова функція  $\varepsilon^h$  із значеннями  $l_i$  у вузлах сітки. Оскільки фактично  $\varepsilon^h$  є вектором, то у якості міри похибки беруть норму  $\|\varepsilon^h\|$ . Природно очікувати, що із збільшенням числа вузлів сітки розв'язок різницевої схеми повинен все більше наближуватись до точного розв'язку задачі (1), (2). Кажуть, що різницева схема є *збіжною*, якщо

$$\|\varepsilon^h\| \rightarrow 0 \text{ при } h = \frac{T - t_0}{n} \rightarrow 0.$$

Якщо, крім того, для похибки  $\varepsilon^h$  має місце оцінка

$$\|\varepsilon^h\| = O(h^k),$$

то кажуть, що різницева схема має *k-й порядок збіжності* (або *k-й порядок точності*, або просто *k-й порядок*).

Отже, критерієм придатності різницевої схеми для розрахунків є її збіжність, а “якість” збіжної схеми визначається порядком її точності.

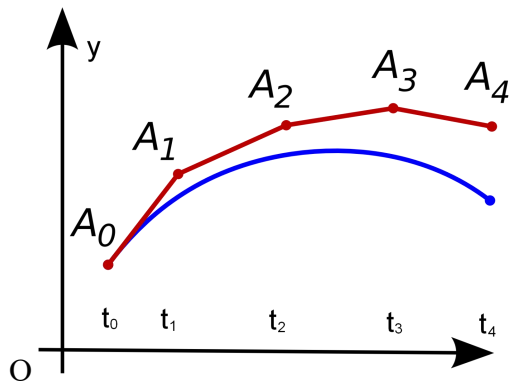


Рис. 1. Геометрична інтерпретація методу Ейлера

Неважко довести, що явна схема Ейлера (3) є збіжною і має перший порядок точності у нормі  $\|\cdot\|_\infty$ . Геометричний зміст цієї схеми полягає у тому, що графік точного розв'язку задачі (1), (2) ми наближуємо ламаною, що складається з відрізків дотичних до інтегральних кривих рівняння (1) у точках  $(t_i, y_i)$  (див. рис. 1).

Зрозуміло, що при такій заміні ламана з кожним кроком все більше відхиляється від шуканої інтегральної кривої.

Для підвищення точності методу Ейлера можна відрізок дотичної до інтегральної кривої в точці  $(t_i, y_i)$  замінити відрізком прямої з кутовим коефіцієнтом, обчисленим у середній точці відрізка  $[t_i, t_{i+1}]$ , тобто наближено покласти

$$y'(t_i) \approx f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right).$$

Загальна формула поліпшеного методу Ейлера приймає вигляд

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right). \quad (7)$$

Схема (7) має другий порядок точності і відноситься до сімейства схем “предиктор-коректор” (“прогноз-коригування”), розроблених на початку XX століття німецькими математиками К. Рунге та М. В. Куттою.

**Правило Рунге апостеріорної оцінки похибки.** Оскільки точний розв'язок задачі (1), (2) невідомий, виникає проблема оцінки похибки отриманого наближеного розв'язку. К. Рунге запропонував оцінювати її апостеріорно, тобто після проведення обчислень на двох (або більше) сітках з різними значеннями кроку  $h$ . Згідно з методом Рунге, проводять обчислення на сітках з кроками  $h$  та  $h/2$ , а локальну похибку на сітці з кроком  $h/2$  оцінюють за формулою

$$|l_i^{h/2}| \approx \left| \frac{y_i^h - y_{2i}^{h/2}}{2^k - 1} \right|, \quad (8)$$

де  $k$  – порядок точності схеми.

### **Завдання 1.**

7. Знайти точний розв'язок задачі Коши (1), (2) диференціального рівняння першого порядку.
8. Провести обчислення для знаходження наближеного розв'язку задачі (1), (2) на відрізку  $[t_0, T]$  з кроком  $h = 0.2$  а) методом Ейлера (4); б) методом Рунге-Кутти 2-го порядку (7). Обчислити локальну та глобальну похибки обох методів та порівняти їх. Побудувати на одній діаграмі графіки точного та наближеного розв'язку.
9. Провести аналогічні обчислення з кроком  $h/2$ . Оцінити похибку за правилом Рунге та порівняти її з обчисленою на сітці з кроком  $h/2$ .

## Варіанти завдань

| №  | $f(t, y)$                                  | $t_0$           | $T$                 | $y_0$           | №  | $f(t, y)$                       | $t_0$ | $T$ | $y_0$    |
|----|--------------------------------------------|-----------------|---------------------|-----------------|----|---------------------------------|-------|-----|----------|
| 1  | $y/t + t^2$                                | 1               | 2                   | 0               | 16 | $-y/t + 3t$                     | 1     | 2   | 1        |
| 2  | $y \cos t + 2t \sin t$                     | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} + 1$ | 0               | 17 | $\frac{2ty}{1+t^2} + 1 + t^2$   | 1     | 2   | 3        |
| 3  | $-y \cos t + \frac{\sin(2t)}{2}$           | 0               | 1                   | 0               | 18 | $\frac{2t-1}{t^2} y + 1$        | 1     | 2   | 1        |
| 4  | $-y \cos t + \cos^2 t$                     | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4} + 1$ | 0.5             | 19 | $-\frac{3y}{t} + \frac{2}{t^3}$ | 1     | 2   | 1        |
| 5  | $\frac{y}{t+2} + t^2 + 2t$                 | -1              | 0                   | 1.5             | 20 | $-2ty - 2t^3$                   | 1     | 2   | $e^{-1}$ |
| 6  | $\frac{y}{t+1} + e^t(t+1)$                 | 0               | 1                   | 1               | 21 | $y/t - 2/t^2$                   | 1     | 2   | 1        |
| 7  | $y/t + t \sin t$                           | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} + 1$ | 1               | 22 | $-ty - t^3$                     | 0     | 1   | 3        |
| 8  | $-y/t + \sin t$                            | $\pi$           | $\pi + 1$           | $\frac{1}{\pi}$ | 23 | $\frac{2}{t+1} y + e^t(t+1)^2$  | 0     | 1   | 1        |
| 9  | $-\frac{y}{2t} + t^2$                      | 1               | 2                   | 1               | 24 | $-2ty + te^{-t^2} \sin t$       | 0     | 1   | 1        |
| 10 | $-\frac{2t}{1+t^2} y + \frac{2t^2}{1+t^2}$ | 0               | 1                   | $\frac{2}{3}$   | 25 | $\frac{2y}{t+1} + (t+1)^3$      | 0     | 1   | 0.5      |
| 11 | $\frac{2t-5}{t^2} y + 5$                   | 2               | 3                   | 4               | 26 | $y \cos t - \sin 2t$            | 0     | 1   | 3        |
| 12 | $-y/t + \frac{t+1}{t} e^t$                 | 1               | 2                   | $e$             | 27 | $4ty - 4t^3$                    | 0     | 1   | -0.5     |
| 13 | $y/t - 2 \ln t / t$                        | 1               | 2                   | 1               | 28 | $y/t - \ln t / t$               | 1     | 2   | 1        |
| 14 | $y/t - 12/t^3$                             | 1               | 2                   | 4               | 29 | $3t^2 y + t^2(1+t^3)/3$         | 0     | 1   | 0        |
| 15 | $-2y/t + t^3$                              | 1               | 2                   | $-\frac{5}{6}$  | 30 | $y \cos t + \sin 2t$            | 0     | 1   | -1       |

Приклад розв'язання завдання. Дано:

$$\frac{dy}{dt} = y \cos t + \sin 2t, \quad (9)$$

$$t \in [0, 1]; \quad y(0) = -1.$$

Диференціальне рівняння відноситься до класу лінійних із змінними коефіцієнтами. Спочатку розв'яжемо однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = y \cos t.$$

Розділяючи змінні, отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \cos t dt, \quad \ln y = \sin t + \ln C,$$

$$y = Ce^{\sin t}. \quad (10)$$

Згідно з методом варіації довільної сталої приймемо  $C=C(t)$  і підставимо (10) у (9):

$$\begin{aligned}\frac{dC}{dt}e^{\sin t} + C \cos t e^{\sin t} &= C \cos t e^{\sin t} + \sin 2t, \\ C &= \int \sin 2t e^{-\sin t} dt = -2(1 + \sin t)e^{-\sin t} + C_1, \\ y(t) &= -2(1 + \sin t) + C_1 e^{\sin t}.\end{aligned}\quad (11)$$

Використовуючи початкову умову  $y(0) = -1$ , отримаємо  $C_1 = 1$ . Отже, аналітичний розв'язок задачі Коши прийме вигляд

$$y(t) = -2(1 + \sin t) + e^{\sin t}.\quad (12)$$

Вхідні дані задачі та результати обчислень оформимо на аркуші електронної таблиці. Спочатку реалізуємо метод Ейлера (рис. 2). Значення аргументу  $t$  розташуємо в першому стовпці, аналітичний розв'язок (12) – у другому, розв'язок за методом Ейлера – у третьому, і, нарешті, компоненти вектору похибки – у четвертому. Значення кроку сітки розташуємо у комірці E2. Заповнимо стовпець значень аргументу. У комірку A3 введемо початкове значення  $t_0 = 0$ , а в комірці A4 розмістимо формулу  $=A3+\$E\$2$  і скопіюємо її вміст у діапазон A5:A8.

| C4 | A            | B        | C              | D              | E   |
|----|--------------|----------|----------------|----------------|-----|
| 1  | Метод Ейлера |          |                |                | h   |
| 2  | t            | y(t)     | y <sub>i</sub> | l <sub>i</sub> | 0,2 |
| 3  | 0            | -1       | -1             | 0              |     |
| 4  | 0,2          | -1,17756 | -1,2           | 0,02244        |     |
| 5  | 0,4          | -1,30271 | -1,35733       | 0,054618       |     |
| 6  | 0,6          | -1,37047 | -1,4639        | 0,093432       |     |
| 7  | 0,8          | -1,3857  | -1,51913       | 0,133428       |     |
| 8  | 1            | -1,36317 | -1,5309        | 0,16773        |     |
| 9  |              |          |                |                |     |

Рис. 2. Реалізація метода Ейлера з кроком  $h=0.2$

| I                 | J        | K                  | L              | M              | N |
|-------------------|----------|--------------------|----------------|----------------|---|
| Метод Рунге-Кутти |          |                    |                |                | h |
| t                 | y(t)     | y <sub>i+1/2</sub> | y <sub>i</sub> | l <sub>i</sub> | l |
| 0                 | -1       |                    |                | -1             | 0 |
| 0,2               | -1,17756 | -1,1               | -1,17917       | 0,001607       |   |
| 0,4               | -1,30271 | -1,25579           | -1,30618       | 0,003464       |   |
| 0,6               | -1,37047 | -1,35475           | -1,37567       | 0,0052         |   |
| 0,8               | -1,3857  | -1,396             | -1,39212       | 0,006417       |   |
| 1                 | -1,36317 | -1,38915           | -1,37005       | 0,006888       |   |

Рис. 3. Реалізація методу Рунге-Кутти другого порядку з кроком  $h=0.2$

В комірках B3:B8 розмістимо значення аналітичного розв'язку  $y(t_i)$ . Для цього введемо в комірку B3 формулу  $=-2*(1+\text{SIN}(A3))+\text{EXP}(\text{SIN}(A3))$  та скопіюємо її вміст у діапазон B4:B8. Для обчислення наближеного розв'язку за методом Ейлера спочатку введемо початкове значення  $y_0 = -1$  у комірку C4, а в комірці C5 реалізуємо обчислення за формулою (4):  $=C3+\$E\$2*(C3*\text{COS}(A3)+\text{SIN}(2*A3))$ . «Протягнемо» комірку C5 до діапазону C5:C8. Для обчислення вектору модулів похибок введемо в комірку D3 формулу  $=\text{ABS}(B3-C3)$  та скопіюємо її вміст у діапазон D4:D8. Обчислення за методом Ейлера реалізовано.

Для реалізації поліпшеного метода Ейлера (метода Рунге-Кутти 2-го порядку) доцільно формулу (7) переписати в іншому вигляді, вводячи допоміжну змінну  $y_{i+1/2}$

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i),\quad (13)$$

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{i+1/2}\right).$$

Стовпці для  $t_i$ ,  $y(t_i)$  та  $l_i$  заповнюються аналогічно реалізації методу Ейлера. Для обчислення  $y_{i+1/2}$  після введення у комірку L3 початкового значення  $y_0 = -1$  розташуємо у комірці K4 формулу  $=L3+\$N\$2/2*(L3*\text{COS}(I3)+\text{SIN}(2*I3))$ . Після цього обчислимо  $y_{i+1}$  за другою з формул (13), ввівши у комірку L4 формулу  $=L3+\$N\$2*(K4*\text{COS}(I3+\$N\$2/2)+\text{SIN}(2*(I3+\$N\$2/2)))$ . Скопіюємо вміст щойно введених комірок K4:L4 у діапазон K5:L8. Метод Рунге-Кутти реалізовано. Аналізуючи компоненти модулів вектору похибки, приходимо до висновку, що

локальні похибки методу Рунге-Кутти наближено у порядок менші, ніж у метода Ейлера. Цей факт узгоджується з порядками збіжності обох методів.

| 14 |     |          |                |                |           | h |
|----|-----|----------|----------------|----------------|-----------|---|
| 15 | t   | y(t)     | y <sub>i</sub> | l <sub>i</sub> | li(Рунге) |   |
| 16 | 0   | -1       | -1             | 0              | 0         |   |
| 17 | 0,1 | -1,09468 | -1,1           | 0,00532        |           |   |
| 18 | 0,2 | -1,17756 | -1,18958       | 0,012023       | 0,010416  |   |
| 19 | 0,3 | -1,24722 | -1,26723       | 0,020014       |           |   |
| 20 | 0,4 | -1,30271 | -1,33183       | 0,029113       | 0,025505  |   |
| 21 | 0,5 | -1,3437  | -1,38276       | 0,039057       |           |   |
| 22 | 0,6 | -1,37047 | -1,41996       | 0,049497       | 0,043935  |   |
| 23 | 0,7 | -1,38394 | -1,44395       | 0,060015       |           |   |
| 24 | 0,8 | -1,3857  | -1,45585       | 0,070145       | 0,063284  |   |
| 25 | 0,9 | -1,37791 | -1,45732       | 0,079409       |           |   |
| 26 | 1   | -1,36317 | -1,45052       | 0,08736        | 0,08037   |   |

Рис. 4. Реалізація метода Ейлера з кроком  $h=0.1$

|  | t   | y(t)     | y <sub>i+1/2</sub> | y <sub>i</sub> | l <sub>i</sub> | li(Рунге) | h |
|--|-----|----------|--------------------|----------------|----------------|-----------|---|
|  | 0   | -1       |                    | -1             | 0              | 0         |   |
|  | 0,1 | -1,09468 | -1,05              | -1,09489       | 0,000205       |           |   |
|  | 0,2 | -1,17756 | -1,13942           | -1,178         | 0,000436       | 0,00039   |   |
|  | 0,3 | -1,24722 | -1,21625           | -1,2479        | 0,000683       |           |   |
|  | 0,4 | -1,30271 | -1,27927           | -1,30365       | 0,000933       | 0,000844  |   |
|  | 0,5 | -1,3437  | -1,32782           | -1,34488       | 0,001173       |           |   |
|  | 0,6 | -1,37047 | -1,36182           | -1,37186       | 0,001389       | 0,00127   |   |
|  | 0,7 | -1,38394 | -1,38187           | -1,38551       | 0,001568       |           |   |
|  | 0,8 | -1,3857  | -1,38922           | -1,38741       | 0,001702       | 0,001572  |   |
|  | 0,9 | -1,37791 | -1,38576           | -1,3797        | 0,001785       |           |   |
|  | 1   | -1,36317 | -1,37389           | -1,36498       | 0,001818       | 0,00169   |   |

Рис. 5. Реалізація методу Рунге-Кутти другого порядку з кроком  $h=0.1$

Аналогічно реалізуємо обидва методи на сітці з кроком  $h_1 = h/2 = 0.1$  (рис. 4, 5). Додатково обчислимо оцінку похибки за правилом Рунге згідно з формулою (8). Для схеми Ейлера в комірку E16 введемо формулу  $=ABS(C16-C3)$ , в комірку E18 – формулу  $=ABS(C18-C4)$  і т. ін. Для методу Рунге-Кутти в комірку N16 введемо  $=ABS(L16-L3)/3$ , в комірку N18 –  $=ABS(L18-L4)/3$  і т. ін. Аналізуючи стовпці для  $l_i$  та  $li$  (Рунге), можна дійти висновку, що оцінки за методом Рунге добре узгоджуються з реальними похибками різницевої схеми.

Побудуємо графіки точного та наближених розв'язків задачі (9) на сітках з кроками  $h$  та  $h/2$  (рис. 6, 7).

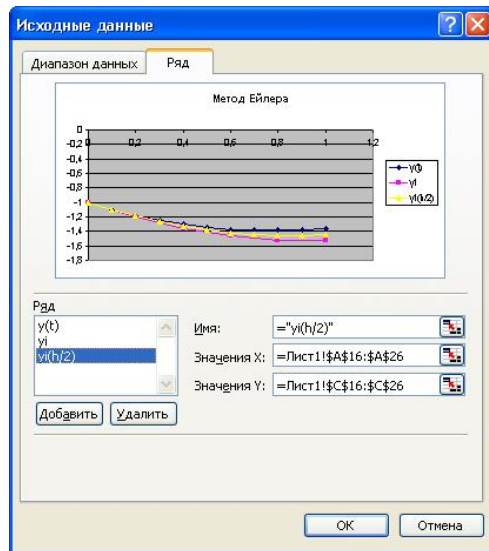


Рис. 6. Побудова графіків точного та наближеного розв'язків за методом Ейлера

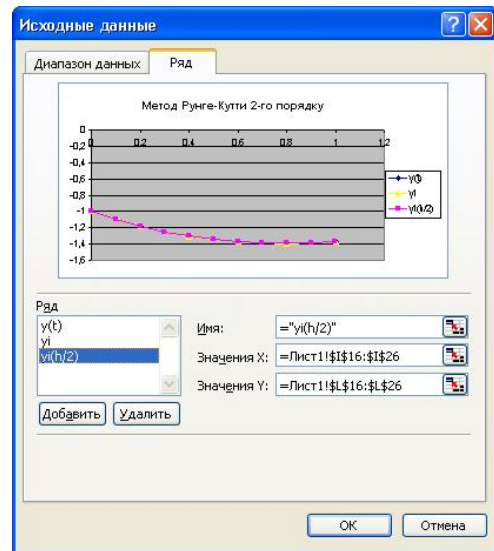


Рис. 7. Побудова графіків точного та наближеного розв'язків за методом Рунге-Кутти II порядку

З графіків видно, що наближення за методом Рунге-Кутти мало відрізняються від аналітичного розв'язку (12), а похибка методу Ейлера зменшується приблизно у два рази при переході на сітку з кроком  $h/2$ . Це також узгоджується з першим порядком збіжності методу Ейлера.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 1 за ред. В. В. Пасішника. Львів: Видавництво «Новий Світ – 2000», 2022. 470 с.
2. Андруник В. А., Висоцька В. А., Пасічник В. В., Чирун Л. Б., Чирун Л. В. Чисельні методи в комп'ютерних науках: навчальний посібник, Том 2 за ред. В. В. Пасішника. Львів: Видавництво «Новий Світ – 2000», 2022. 536 с.
3. Возняк Л. С., Шарин С. В. Чисельні методи: Методичний посібник для студентів природничих спеціальностей. Івано-Франківськ: “Плай”, 2001. 64 с.
4. Волонтир Л. О., Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Чисельні методи: Навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с.
5. Гаврилук І. П., Макаров В. Л. Методи обчислень. Підручник. К.: Вища школа, 1995. 367 с.
6. Жалдак М. І., Рамський Ю. С. Чисельні методи математики. К.: Рад. шк., 1984. 206 с.
7. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи: навчальний посібник / В. М. Задачин. Харків: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.
8. Іващенко В. П., Швачич Г. Г., Коноваленков В. С., Заборова Т. М., Христян В. І. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій: Підручник. Запоріжжя: Дике Поле, 2013. 426 с.
9. Москальков М. М., Риженко А. І., Войцеховський С. О. та ін. Практикум з методів обчислень: Метод. вказівки та навч. завдання до практ. і лаб. робіт із чисельного розв'язання рівнянь і систем. К.: МАУП., 2006. 80 с.
10. Пістунов І. М. Чисельні методи: навчальний посібник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2014. 215 с.
11. Сафоник А. П. Числові методи: навчальний посібник. Рівне: НУВГП, 2015. 143 с.
12. Сізова Н. Д., Шаповалова О. О. Чисельні методи: Лабораторний практикум. Х.: ХНУБА, 2020. 150 с.
13. Третиник В.В., Любашенко Н. Д. Методи обчислень: Частина 1. Чисельні методи алгебри (навчальний посібник). Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2019. 138 с.
14. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. К.: Видавнича група ВНУ, 2006. 480 с.
15. Чисельні методи. Лабораторний практикум: Навчальний посібник / В. І. Гавриш, Н. Б. Мельник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2018. 136 с.
16. Числові методи: навч. посібник / О. І. Ярошенко, М. В. Григорків. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. 172 с.

### Інформаційні ресурси

1. Сайт «Статистика – Електронна бібліотека підручників». Режим доступу: [studentam.kiev.ua/content/category/3/80/88/](http://studentam.kiev.ua/content/category/3/80/88/)
2. Вища математика. Режим доступу: <https://duikt.edu.ua/ua/lib/2/category/2240?>
3. Українська технічна література. Режим доступу: <https://ukrtechlibrary.wordpress.com/category/%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/%D0%B2%D0%B8%D1%89%D0%B0-%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0/>
4. Науково-технічна бібліотека. Режим доступу: <http://lib.vntu.edu.ua/pages/103.html>.

Трофімов А. В., Мормуль М. Ф., Щитов О. М., Щитов Д. М.

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ  
ПОСІБНИК ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ  
РОБОТИ –  
ЛАБОРАТОРНОГО ПРАКТИКУМУ  
З ДИСЦИПЛІНИ  
“ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ”  
ДЛЯ ФАКУЛЬТЕТУ  
“ІННОВАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ”**

**Спеціальності: “Комп’ютерні науки” (F3) і  
“Інженерія програмного забезпечення” (F2)**