

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

DOI <https://doi.org/10.32782/2521-6643-2023.1-65.1>

Мотайло А. П., кандидат технічних наук,
доцент кафедри природничо-наукової підготовки
Херсонської державної морської академії
ORCID: 0000-0002-6775-5788

ПОБУДОВА БАЗИСУ БІПІРАМІДИ З ДВОМА РУХОМИМ ВУЗЛАМИ

Дана робота присвячена вивченню можливостей інтерполяції методом скінченних елементів функцій трьох незалежних змінних в області, яка має форму біпіраміди. Основною задачею даного дослідження є покращення апроксимаційних якостей решітки тетрадрально-октадральної структури за рахунок включення до неї комірок у формі біпірамід з двома рухомим вузлами.

У статті біпіраміда розглядається як скінченний елемент, утворений шляхом видовження/стиснення двох півосей октаедра. Подібні лінійні деформації виникають у елементах, які знаходяться в приграничному шарі розрахункової області, коли деякі вузли доводиться виносити на границю області.

В роботі геометричним та методом конденсації побудовано два поліноміальні базиси біпіраміди з сімома та шістьма вузлами інтерполяції. Досліджено геометричні та інтерполяційні якості базисних функцій біпіраміди з двома рухомими вузлами. Побудовані базиси мають, відповідно, два та три невизначені параметри, що дозволяють надавати базисним функціям біпіраміди доцільних в методі скінченних елементів властивостей. У даній роботі критерієм якості інтерполяції вважається величина сліду матриці жорсткості біпіраміди. Визначено коефіцієнти лінійної деформації двох півосей октаедра, при яких слід матриці жорсткості біпіраміди є мінімальним.

У статті проаналізовано межі припустимих лінійних деформацій півосей октаедра, які перетворюють його на біпіраміду з двома рухомими вузлами. За основу обрано показник асиметрії *Skewness*, який використовують в ANSYS. Отримано оцінки параметрів видовження/стиснення півосей октаедра, які гарантують високу та достатню точності скінченно-елементних розрахунків при використанні біпірамід з двома рухомими вузлами. Виявлені залежності коефіцієнтів лінійної деформації півосей октаедра відповідають умові мінімальності сліду матриці жорсткості біпіраміди, що свідчить про позитивний прогноз інтерполяційних якостей решітки з комірками у формі біпірамід з двома рухомими вузлами.

Перспективою подальших досліджень є побудова формул чисельного інтегрування на даному багатограннику з метою включення його до алгоритму метода скінченних елементів при розв'язанні прикладних задач математичної фізики.

Ключові слова: скінченний елемент, октаедр, біпіраміда, вузли інтерполяції, базис, базисні функції, метод конденсації, матриця жорсткості.

Motailo A. P. Construction of bipyramid basis with two movable nodes

This paper is devoted to the study of the possibilities of interpolation by the method of finite elements of functions of three independent variables in the region, which has the shape of a bipyramid. The main task of this study is to improve the approximation qualities of the lattice of the tetrahedral-octahedral structure by including cells in the form of bipyramids with two movable nodes.

In this article, a bipyramid is considered as a finite element formed by elongation/compression of two semi-axes of an octahedron. Similar linear deformations occur in elements located in the boundary layer of the calculated region, when some nodes have to be removed to the boundary of the region. In cases where only one octahedron node is carried to the boundary of the region, a bipyramid is also formed. In this case, the node that was transferred to the border of the region is considered movable.

In the author's previous works, the bases of the bipyramid with seven and six interpolation nodes were built. The approximation qualities of the constructed bases are investigated theoretically. A positive forecast of their use in finite element calculations is obtained. The results were verified by the problem of thermal conductivity for timber.

In the work by geometric and condensation method, two polynomial bases of the bipyramid with seven and six interpolation nodes are constructed. The geometric and interpolation qualities of the basic functions of a bipyramid with two movable nodes are investigated. The constructed bases have, respectively, two and three indefinite parameters that make it possible to give the basic functions of the bipyramid properties expedient in the finite element method. In this paper, the interpolation quality

criteria is the trace of the bipyramid stiffness matrix. The coefficients of linear deformation of two semi-axes of the octahedron at which the trace of the bipyramid stiffness matrix is minimal are determined.

The limits of permissible linear deformations of the semi-axes of the octahedron, which turn it into a bipyramid with two movable nodes, are analyzed in the article. The basis is the asymmetry index of Skewness, which is used in ANSYS. Estimations of elongation/compression parameters of octahedron semi-axes are obtained, which guarantee high and sufficient accuracy of finite-element calculations when using bipyramids with two movable nodes. The revealed dependences of the coefficients of linear deformation of the semi-axes of the octahedron correspond to the condition of minimality of the trace of the bipyramid stiffness matrix, which indicates a positive forecast of the interpolation qualities of the lattice with cells in the form of bipyramids with two movable nodes.

The prospect of further research is the construction of numerical integration formulas on this polyhedron in order to include it in the algorithm of the finite element method in solving applied problems of mathematical physics.

Key words: finite element, octahedron, bipyramid, interpolation nodes, basis, basis functions, condensation method, stiffness matrix.

Постановка проблеми. При розв'язанні граничних задач математичної фізики широко використовують системи скінченно-елементного аналізу ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, PATRAN, ЛІРА тощо. Не зважаючи на всі переваги методу скінченних елементів (МСЕ), він є занадто громіздким, особливо в 3D-просторі, та потребує великих об'ємів пам'яті комп'ютерної техніки.

Одним із способів оптимізації алгоритму МСЕ є застосування альтернативних решіток при дискретизації розрахункової області. Зокрема, в тривимірному просторі при розв'язанні граничних задач еліптичного типу ефективними виявляються решітки тетрадрально-октадральної структури, які не представлені в комерційних пакетах програмного забезпечення, що реалізують МСЕ.

Отже, існує задача дослідження скінченного елемента (СЕ) у формі октаедра та його узагальнення – біпіраміди.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1–3] побудовано різні набори базисних функцій октаедра з шістьма та сімома вузлами інтерполяції. Авторами [1] представлено результати застосування решіток тетрадрально-октадральної структури при розв'язанні прикладних задач МСЕ. Основною перевагою застосування октаедрів у вказаній роботі вважається швидкість отримуваних розв'язків порівняно з результатами скінченно-елементних розрахунків при дискретизації області тетрадральної решіткою. У роботі [2] ефективність використання октаедра підтверджено при дискретизації МСЕ рівняння 3D-ідеального потоку нестисливої рідини. В якості патч-тесту обрано область у формі гексаедра з вписаним у нього октаедром. Автором [3] математично обґрунтовано переваги застосування СЕ у формі октаедра та його узагальнення – біпіраміди, в ансамблі з тетрадрами, порівняно з базисними елементами форми: гексаедрами та тетрадрами, – при розв'язанні МСЕ граничних задач математичної фізики для рівнянь еліптичного типу. При цьому СЕ у формі біпіраміди можуть бути використані в приграничному шарі розрахункової області, коли один або більше вузлів доводиться виносити на границю області.

В роботі [4] побудовано два базиси біпіраміди з одним рухомих вузлом, які містять відповідно два та один параметри, що дозволяють надавати базисним функціям додаткових доцільних в МСЕ інтерполяційних властивостей. На основі аналізу апроксимаційних якостей базисних функцій [5] визначено умови використання біпірамід в скінченно-елементних розрахунках. Критерієм оцінки якості апроксимації обрано мінімальний слід матриці жорсткості біпіраміди. Теоретичні висновки перевірено на задачі теплопровідності для бруса. При цьому залишається невирішеним питання про скінченно-елементну апроксимацію функцій в області комірок, які утворились в результаті декількох лінійних деформацій октаедра. Тому актуальною є задача побудови системи базисних функцій біпіраміди з двома та трьома рухомими вузлами.

Мета статті: побудувати базиси біпіраміди з двома рухомими вузлами, дослідити їх апроксимаційні властивості в залежності від значень параметрів видовження/стиснення півосей даного багатогранника, а також визначити умови використання даного СЕ в якості комірки решіток тетрадрально-октадральної структури.

Виклад основного матеріалу. Розглядається біпіраміда з сімома вузлами інтерполяції, які розташовані в її вершинах та точці перетину діагоналей (рис.1). Вважається, що точки K_1, K_3, K_4, K_6 є рівновіддаленими від K_0 на відстань $a(a \in R)$, а відрізки K_0K_2 та K_0K_5 можуть бути довільної довжини:

$$K_0K_2 = p \cdot a = b, K_0K_5 = q \cdot a = c, \quad (1)$$

де $p, q > 0$ та $p, q \in R$.

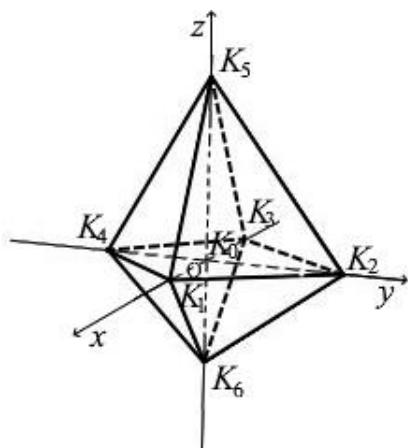


Рис. 1. Біпіраміда як скінченний елемент

Джерело: побудовано автором для коефіцієнтів $p=1,2$, $q=1,7$

Застосовуючи геометричні методи побудови функцій скінченно-елементного базису, які асоційовано з вершинами біпіраміди, легко отримати:

$$\begin{aligned}
 NS_{1,3} &= \frac{1}{2a^2} x(x \pm a); \\
 NS_2 &= \frac{1}{b(a+b)} y(y+a); \quad NS_4 = \frac{1}{a(a+b)} y(y-b); \\
 NS_5 &= \frac{1}{c(a+c)} z(z+a); \quad NS_6 = \frac{1}{a(a+c)} z(z-c).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Функцію, що відповідає центральному вузлу, можна знайти з рівності:

$$NS_0 = 1 - \sum_{i=1}^6 NS_i,$$

де $i = \overline{1;6}$.

Тоді, враховуючи (1), (2), справедливою є рівність:

$$NS_0 = 1 - \frac{1}{pqa^2} \left(pqx^2 + q(y^2 + a(1-p)y) + p(z^2 + a(1-q)z) \right). \tag{3}$$

Після тотожних перетворень вираз базисної функції, яка асоційована із центральним вузлом, можна подати у вигляді:

$$NS_0 = \frac{(p+q)(1+pq)}{4pq} \cdot F, \tag{4}$$

$$\text{де } F = 1 - \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{(p+q)(1+pq)}{4pq}} - \frac{\left(y + \frac{1}{2}(a-p) \right)^2}{a^2 \cdot \frac{(p+q)(1+pq)}{4q}} - \frac{\left(z + \frac{1}{2}(a-q) \right)^2}{a^2 \cdot \frac{(p+q)(1+pq)}{4p}}.$$

Поверхні рівня базисної функції NS_0 в цьому випадку є еліпсоїдами зі зміщеними в площині Oxy центрами, якщо початок системи координат пов'язувати із вузлом K_0 (рис. 2).

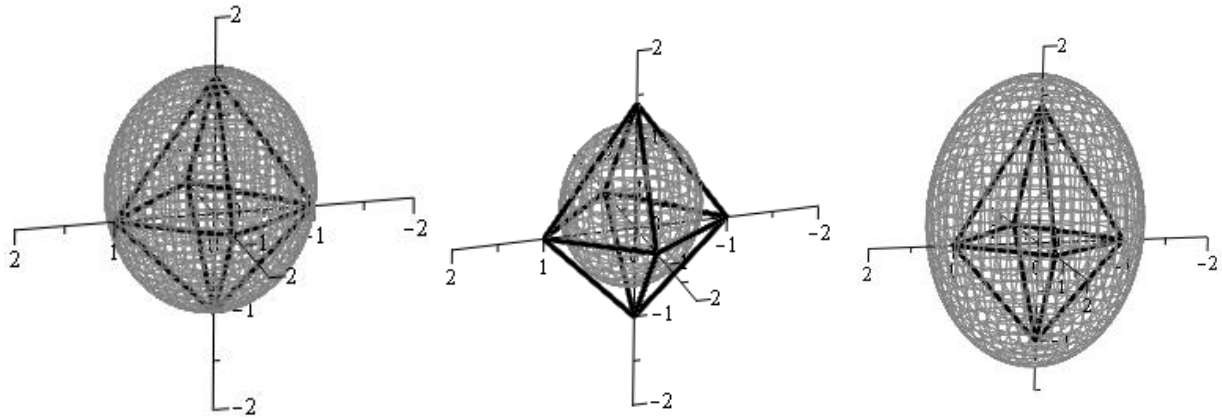


Рис. 2. Поверхні рівня функції $NS_0(x, y, z) = C$

Джерело: побудовано автором для $a=1, p=1,2, q=1,7, C=0, C=0,7, C=1,2$

Побудувати базис біпіраміди з шістьма вузлами інтерполяції можна, якщо застосувати операцію внутрішньої конденсації. Зміст цього перетворення полягає в розподілі внеску центральної базисної функції по зовнішніх вузлах біпіраміди, тобто:

$$\begin{aligned} NC_i &= NS_i + \alpha \cdot NS_0, i = \{1,3\}, \\ NC_2 &= NS_2 + \beta_1 \cdot NS_0, NC_4 = NS_2 + \beta_2 \cdot NS_0, \\ NC_5 &= NS_5 + \gamma_1 \cdot NS_0, NC_6 = NS_6 + \gamma_2 \cdot NS_0, \end{aligned} \quad (5)$$

де $2\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = 1; 0 \leq \alpha \leq 0,5$.

Задовольняючи умовам повноти базису [6], необхідно додати співвідношення вагових коефіцієнтів:

$$\beta_1 = \frac{1-2\alpha}{p+1}; \beta_2 = p\beta_1; \gamma_1 = \frac{1-2\alpha}{q+1}; \gamma_2 = q\gamma_1. \quad (6)$$

Оскільки ваговий коефіцієнт α змінюється в інтервалі $0 \leq \alpha \leq 0,5$, обмеження для інших вагових коефіцієнтів мають вигляд:

$$0 \leq \beta_1 \leq \frac{1}{p+1}; 0 \leq \beta_2 \leq \frac{p}{p+1}; 0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{q+1}; 0 \leq \gamma_2 \leq \frac{q}{q+1}.$$

Отже, базисні функції конденсованого базису визначаються за формулами (5), (6).

Очевидно, що побудовані функції $\{NC_i\}_{i=1}^6$ скінченно-елементного базису біпіраміди є функціями коефіцієнтів видовження/стиснення біпіраміди p, q . Виникає питання: при яких значеннях вказаних коефіцієнтів базисні функції біпіраміди матимуть найкращі (в певному сенсі) апроксимаційні властивості. Критерієм якості апроксимації можна обрати мінімальний слід матриці жорсткості/теплопровідності біпіраміди.

За формулою:

$$Trace = \sum_{i=1}^6 \iiint_V \left(\left(\frac{\partial NC_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial NC_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial NC_i}{\partial z} \right)^2 \right) dV,$$

де V – об'єм біпіраміди, –

можна отримати функцію сліду матриці жорсткості як функцію однієї незалежної змінної α :

$$Trace = \frac{a}{30p^2q^2(1+p)(1+q)} (A\alpha^2 + B\alpha + C), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} A &= 104(p^3q^4 + p^4q^3 + p^2q^2) + 112(p^2q^4 + p^4q^2) + \\ &+ 120(p^4q^4 + p^3q^2 + p^2q^3) + 8(p^4q + pq^4 + p^2q + pq^2) + \\ &+ 40(p^4 + p^2 + q^4 + q^2) - 16(p^3q + pq^3) + 48(q^3 + p^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B = & -72p^4q^4 - 44(p^3q^4 + p^4q^3) - 96(p^2q^4 + p^4q^2) + 48p^3q^3 - \\
 & - 124(p^3q^2 + p^2q^3) + 4(p^4q + pq^4 + p^2q + pq^2) - \\
 & - 16(p^4 + p^2 + q^4 + q^2) - 120p^2q^2 + 40(p^3q + pq^3),
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 C = & 23p^4q^4 + 26(p^3q^4 + p^4q^3) + 66(p^3q^2 + p^2q^3) + 39(p^2q^4 + p^4q^2) + \\
 & + 28p^3q^3 + 4(p^4q + pq^4 + p^2q + pq^2) + 4(p^4 + p^2 + q^4 + q^2) + 55p^2q^2.
 \end{aligned}$$

За необхідною умовою існування екстремуму функції однієї змінної ($d(\text{Trace})/d\alpha = 0$) значення $\alpha = -B/(2A)$, де коефіцієнти A і B визначаються формулами (8). Інші вагові коефіцієнти легко визначити за формулами (6).

Дослідження на екстремум функції сліду матриці жорсткості/теплопровідності (7) для біпіраміди показують, що мінімум досягається в точці $(p; q) \approx (0,744; 0,744)$, і становить приблизно 2,475 (рис. 3).

Аналізуючи отримані функції базису біпіраміди, яка має два рухомі вузли, слід зауважити, що даний багатогранник не є правильним і може розглядатись як октаедр, який лінійно деформований в напрямках двох його півосей. Отже, його використання в скінченно-елементних розрахунках має певні обмеження. Скориставшись рекомендаціями, які запропоновані в ANSYS, можна знайти показник асиметрії Skewness, який розраховується із міркувань обрання за еталон SE правильної геометричної форми [7, 8], тобто октаедр в даному випадку. При цьому відхилення в межах $\pm 0,1$ та $\pm 0,25$ від об'єму правильного геометричного тіла вважаються допустимими, відповідно, при високих та невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків.

Таким чином, на практиці слід використовувати біпіраміди з коефіцієнтами видовження/стиснення, які задовольняють умові $0,8 \leq (p+1)q \leq 1,2$ при високих вимогах до точності отримуваних розв'язків і $0,5 \leq (p+1)q \leq 1,5$ – при невисоких вимогах до точності отримуваних розв'язків.

Висновки з дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. В роботі побудовано два базиси біпіраміди з двома рухомими вузлами, які можуть бути застосовані в скінченно-елементних розрахунках при дискретизації області решіткою тетраедрально-октаедральної структури. Побудовані базиси з шістьма та сімома вузлами інтерполяції містять відповідно три та два невизначені параметри, які дозволяють надавати базисним функціям додаткових доцільних в МСЕ властивостей.

В результаті дослідження апроксимаційних властивостей побудованих базисів визначено критичні значення параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди, при яких слід матриці жорсткості на даному SE є мінімальним. Знайдено оцінки для параметрів видовження/стиснення півосей біпіраміди на основі рекомендацій щодо показників асиметрії Skewness, які використовують в ANSYS при застосуванні SE неправильної геометричної форми, що гарантує точність отримуваних розв'язків скінченно-елементних розрахунків.

Враховуючи позитивний прогноз інтерполяційних якостей SE у формі біпіраміди з двома рухомими вузлами, перспективою подальших досліджень є побудова формул чисельного інтегрування на даному багатограннику з метою включення його до алгоритму МСЕ при розв'язанні прикладних задач.

Список використаних джерел:

1. Greiner, G., Grosso, R. Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization. *The Visual Computer*. 2000. Vol. 16. P. 357–369. URL: <https://doi.org/10.1007/PL00007214> (date of access: 25.04.2023).
2. de Bruijn, H. Numerical Method for 3D Ideal Flow. URL: <https://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf> (date of access: 25.04.2023).
3. Мотайло А.П. Геометричне моделювання скалярних та векторних полів на решітках тетраедрально-октаедральної структури : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.01.01. Дніпро, 2019. 24 с.
4. Мотайло А. П., Хомченко А. Н., Тулученко Г. Я. Побудова базису біпіраміди. *Радіоелектроніка, інформатика, управління*. 2016. № 4 (39), С. 29–36. DOI: 10.15588/1607-3274-2016-4-4 (дата звернення: 25.04.2023).
5. Sekulović, M. Metod konačnih elemenata. Beograd: Gradevinska knjiga, 1984. 592 p.

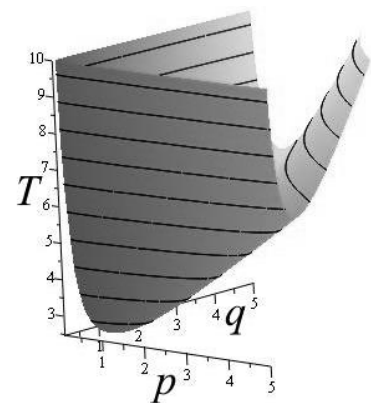


Рис. 3. Графік мінімального сліду матриці жорсткості

Джерело: побудовано автором за формулами (7), (8)

-
6. Zienciewicz, O. C. *Introductory Lectures on the Finite Elements Method*. Wien : Springer-Verlag, 2014. 99 p.
 7. ANSYS FLUENT 12.0 User's Guide – 6.2.2 Mesh Quality. URL: <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node167.htm> (date of access: 25.04.2023).
 8. Skewness in ANSYS Meshing – Illustrated Explanation. URL: <https://mechanicalland.com/skewness-of-mesh-structures-in-ansys-meshing/#gsc.tab=0> (date of access: 25.04.2023).

References:

1. Greiner, G. & Grosso, R. (2000). Hierarchical Tetrahedral-Octahedral Subdivision for Volume Visualization. *The Visual Computer*, (16), 357–369. <https://doi.org/10.1007/PL00007214>
2. de Bruijn, H. (2010). Numerical Method for 3D Ideal Flow. Retrieved from: <https://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar2010/octaeder.pdf>
3. Motailo, A. P. (2019). *Heometrychne modeliuvannia skaliarnykh ta vektornykh poliv na reshitkakh tetraedralno-oktaedralnoi struktury* [Geometric modeling of scalar and vector fields on the lattices of tetrahedral-octahedral structure] (avtoref. dys. ... kandydata tekhn. nauk). Dniprovskiy natsionalnyi universytet imeni Olesia Honchara. Dnipro, Ukraina.
4. Motailo, A. P., Khomchenko, A. N. & Tuluchenko, H. Ya. (2016). Pobudova bazysu bipiramidy [The constructing of bipyramid's basis]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnia*. (4(39)), 29–36. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2016-4-4>
5. Sekulović, M. (1984). *Metod konačnih elemenata* [The Finite Element Method]. Beograd : Gradevinska knjiga.
6. Zienciewicz, O. C. (2014). *Introductory Lectures on the Finite Element Method*. Wien: Springer-Verlag.
7. ANSYS FLUENT 12.0 User's Guide – 6.2.2 Mesh Quality. Retrieved from <https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/node167.htm>
8. *Skewness in ANSYS Meshing – Illustrated Explanation*. Retrieved from <https://mechanicalland.com/skewness-of-mesh-structures-in-ansys-meshing/#gsc.tab=0>