

Сохацький А. В., доктор технічних наук,
професор, завідувач кафедри транспортних
технологій та міжнародної логістики
Університету митної справи та фінансів

ДО ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ТЕЧІЙ НАВКОЛО ТРАНСПОРТНИХ АПАРАТІВ

Реальні течії навколо транспортних апаратів є турбулентними. На сьогодні в обчислювальній аеродинаміці відсутні універсальні математичні моделі турбулентності. Надійне передбачення характеристик турбулентних потоків – це винятково важлива наукова проблема, пов'язана зі складністю та недостатнім вивченням турбулентності як фізичного явища.

У статті розглянуто підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes–RANS); два класичних підходи – пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES); гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES методів для різних областей течії.

Виходячи з можливостей сучасної обчислювальної техніки, найбільш доступними залишаються гібридні методи. Вони ґрунтуються на сумісному використанні RANS і LES підходів у різних областях течії.

Ключові слова: аеродинаміка транспортних апаратів; числове моделювання; рівняння Нав'є–Стокса; моделі турбулентності.

Real flows around vehicles are turbulent. To date, there are no universal mathematical models of turbulence in computational aerodynamics. Reliable prediction of the characteristics of turbulent flows is an extremely important scientific problem and is associated with the complexity and insufficient study of turbulence as a physical phenomenon.

The paper considers approaches based on the use of Reynolds Averaged Navier–Stokes–RANS equations; two classical approaches – Direct Numerical Simulation (DNS) and Large Eddy Simulation (LES); hybrid approaches based on the joint use of RANS and LES methods for different flow regions.

Based on the capabilities of modern computing technology, hybrid methods remain the most accessible. They are based on the joint use of RANS and LES approaches in different areas of the flow.

Key words: aerodynamics of vehicles; numerical simulation; Navier–Stokes equation; turbulence models.

© А. В. Сохацький, 2021

Постановка проблеми. Створення перспективних транспортних засобів, що працюють на нових фізичних принципах є надзвичайно складною проблемою [1, 2]. Необхідні розробки нових транспортних технологій. Подальший їх розвиток пов'язаний з формуванням нової інтегрованої транспортної системи в контексті концепції сталого розвитку, що передбачає перехід на екологічно чисті та безпечні технології. Необхідне ефективне розв'язання проблеми кардинального підвищення швидкості та пропускну здатності транспортних систем за малих витрат енергії [1–4]. Крім традиційних вимог до безпеки, доступності та якості перевезень, найбільш чітко ставляться вимоги до екологічності, мультимодальні та швидкості транспортних послуг, що надаються. Підвищення швидкості перспективних транспортних засобів потребує ефективного розв'язування проблем, що пов'язані з динамікою руху та експлуатаційними характеристиками.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зараз гостро порушуються питання про надання перспективним транспортним засобам оптимальних аеродинамічних характеристик. Високошвидкісні транспортні засоби рухаються в суцільному повітряному середовищі, для якого характерні невизначеності їхніх параметрів.

Реальний рух транспортного засобу відбувається в турбулентному повітряному середовищі. Моделювання турбулентних рухів повітряних мас є фундаментальною проблемою як теоретичної фізики, так і практичної аеродинаміки [3–6]. Відсутність універсальної теорії опису турбулентних течій створює проблеми з визначенням аеродинамічних навантажень [3–6]. Це питання одне з ключових моментів у проектуванні високошвидкісних наземних транспортних засобів, оскільки за високих швидкостей руху тільки на подолання опору повітря може припадати до 90 % загальних енергетичних витрат. Таким чином, необхідні фундаментальні дослідження в аеродинаміці високошвидкісного наземного транспорту [1, 2].

Методи моделювання турбулентних течій з певною мірою умовності можна розділити на три групи: підходи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes–RANS); два класичних підходи – пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES); гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів для різних областей течії [6, 7].

Найпоширенішими підходами нині є методи, що базуються на використанні осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є–Стокса (Reynolds Averaged Navier – Stokes – RANS). Вони замикаються за допомогою тієї або іншої напівемпіричної моделі турбулентності.

Класичні вихоророзрізнявальні підходи найбільш досконалі. Це пряме числове моделювання турбулентності (Direct Numerical Simulation – DNS) і метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES). Метод DNS базується на безпосередньому прямому числовому розв’язуванні тривимірних нестационарних рівнянь Нав’є–Стокса з розрізненням усіх просторово-часових масштабів турбулентності.

Він ґрунтується на фізичних принципах аеродинаміки і повністю вільний від емпіричних припущень.

У рамках методу LES ті ж рівняння розв’язуються безпосередньо після їх попередньої просторової фільтрації. Це уможливорює виключити з розгляду частину просторово-часових масштабів. Проведена операція дає можливість значно знизити вимоги до просторово-часового розрізнення. Так знижуються вимоги до необхідних обчислювальних ресурсів.

Для врахування впливу відфільтрованих (“підсіткових”) масштабів турбулентності притягуються ті або інші напівемпіричні моделі.

У науковій літературі для підкреслення кардинальних відмінностей методу LES від підходів, що використовуються для замикання RANS, їх називають “підсітковими”.

До третьої групи належать гібридні підходи, що спираються на спільне використання RANS і LES підходів в різних областях течії. Вони найпоширеніші для практичного використання, виходячи з можливостей обчислювальної техніки.

Мета статті – проаналізувати сучасний стан моделювання турбулентних течій.

Виклад основного матеріалу. Моделювання на основі осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав’є–Стокса. Напівемпірична теорія турбулентності бере початок з класичної праці О. Рейнольдса [8], де було сформульовано підхід для опису турбулентної течії, який згодом назвали його іменем. Так з’явилися рівняння Рейнольдса. Або, як їх ще називають, усереднені за Рейнольдсом рівняння Нав’є–Стокса. У випадку нестисливої рідини рівняння Рейнольдса виходять з рівнянь Нав’є–Стокса з використанням такої процедури осереднювання:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

де f – осереднювана функція;

t – час;

$2T$ – період осереднювання.

Період осереднювання передбачається досить великим порівняно з часовими масштабами всіх турбулентних неоднорідностей, властивих даній течії, й досить малим порівняно з характерним часовим масштабом осередненої течії. Відповідно до праці Рейнольдса [8], процедура осереднювання припускає виконання природних умов, а саме:

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}, \quad \overline{c} = c, \quad \overline{cf} = c\overline{f}, \quad \overline{\partial f / \partial s} = \partial \overline{f} / \partial s, \quad (2)$$

де f, g – довільні функції, які можуть бути представлені як суми середніх і пульсаційних змінних $f = \overline{f} + f'$ та $g = \overline{g} + g'$;

c – довільна константа;

s – просторова координата або час.

У випадку моделювання течії газу, що є стисливим, використовують більш досконалий спосіб осереднювання. Він називається осереднювання за Фавром. При цьому густина ρ і тиск p осереднюються за Рейнольдсом, а для інших змінних вводяться так звані середньозважені значення

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}. \quad (3)$$

Згідно з даним підходом розрахунок турбулентних течій стислої рідини проводиться шляхом безпосереднього розв'язування рівнянь Нав'є–Стокса, осереднюються за Рейнольдсом для густини та тиску.

Використання осереднювання за Фавром приводить вихідну систему рівнянь до дещо простішого вигляду, оскільки не з'являються додаткові доданки в рівнянні нерозривності. Крім цього, нестационарний член у рівнянні для кількості руху не потребує додаткового моделювання [5–6]. У праці [9] на основі числового моделювання шару зміщення показано, що в діапазоні малих чисел Маха обидва способи осереднювання приводять до однакових результатів. Вважають, що використання усереднювання за Фавром у ряді випадків призводить до чисельної нестійкості через форму рівняння нерозривності [10]. Для подолання нестійкості в праву частину рівняння нерозривності необхідно додавати дифузійний член.

Незважаючи на характер осередненої течії, її вимірність та стаціонарність чи нестационарність, необхідно розв'язувати тривимірні нестационарні рівняння Нав'є–Стокса. Це пов'язано з тим, що турбулентність є принципово тривимірним і нестационарним явищем. Слід звернути увагу на те, що для ряду моделей (наприклад, DNS) необхідно забезпечити достатню точність розрізнення усіх просторово-часових масштабів турбулентності.

Осереднені рівняння Нав'є–Стокса (рівняння RANS) для досконалого стисливого газу можуть бути записані в такому вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}) - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k H)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i (\tau_{ik} + \tau_{t,ik}) - (q_k + q_{t,k})], \\ \rho = pm/(RT), \end{cases} \quad (4)$$

де x_i – декартові координати ($i=1, 2, 3$);

u_i – компоненти вектора швидкості осередненої течії;

$$E = C_v T + u_k u_k / 2 \quad H = E + p / \rho = E_p T + u_k u_k / 2;$$

E – відповідно питома повна енергія та повна ентальпія газу;

T – температура;

$$C_v, C_p = C_v + R/m,$$

m – питомі теплоємності за сталого об'єму та постійного тиску;

$R = 8314,34$ Дж/моль·К – універсальна газова стала;

m -го – молекулярна маса.

Для спрощення запису знаку осереднювання за часом використовується правило підсумовування за індексами, що повторюються.

Компоненти тензора молекулярної в'язкої напруги і вектора щільності теплового потоку за рахунок молекулярної теплопровідності визначаються відповідно за допомогою закону реології Ньютона та закону Фур'є:

$$\tau_{ij} = 2\mu(T) \left[S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right], \quad q_i = \mu(T) \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (5)$$

де $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – тензор швидкостей деформацій;

δ_{ij} – символ Кронекера;

$\mu(T)$ і $\lambda(T)$ – коефіцієнти молекулярної динамічної в'язкості і теплопровідності.

Компоненти тензора рейнольдсових (турбулентних) напружень $\tau_{t,ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ та вектора рейнольдсового (турбулентного) теплового потоку $q_{t,i} = -\rho C_p \overline{u T'}$ записуються в рівняннях (1.4) при осереднюванні нелінійних конвективних членів вихідних рівнянь Нав'є–Стокса і перенесення енергії.

Їх безпосередній зв'язок з параметрами осередненого руху залишається невідомим.

Перевагою рівнянь RANS перед вихідними Нав'є–Стокса є те, що вони сформульовані безпосередньо відносно осереднених за часом характеристик течії, що становлять основний інтерес в задачах аеродинаміки. Таким чином можна виключити необхідність розрахунку локальних нестационарних характеристик турбулентних потоків шляхом інтегрування тривимірних нестационарних рівнянь Нав'є–Стокса (DNS) в реальних умовах течії розвитку сучасної обчислювальної техніки проведення розрахунку локальних нестационарних характеристик турбулентних потоків вважається абсолютно неможливим. Слід зазначити, що рівняння RANS є незамкнутими, оскільки вони містять невідомий тензор рейнольдсових напружень та вектор турбулентного теплового потоку. Тому для їх практичного використання потрібні додаткові співвідношення, що зв'язують ці величини з характеристиками осередненого руху. Вони можуть бути отримані тільки з використанням тієї або іншої емпіричної інформації. Ці співвідношення прийнято називати моделями турбулентності для напружень Рейнольдса або для інших моментів.

Альтернативний підхід до розв'язання проблеми замикання рівнянь Рейнольдса полягає у використанні рівнянь перенесення рейнольдсових напружень, які формально можуть бути отримані з рівнянь Нав'є–Стокса за допомогою процедури осереднювання за часом аналогічно тому, як це робиться під час виведення рівнянь Рейнольдса. Проте ці рівняння містять так звані моменти третього порядку ($\overline{u'_i u'_j u'_k}$). Їх зв'язок із параметрами осередненого руху і компонентами тензора рейнольдсових напружень (моментами другого порядку) невідомий, для їх визначення потрібне використання рівнянь перенесення для моментів третього порядку. Ці рівняння, зі свого боку, містять кореляції четвертого порядку і т. д., так що отримання чіткої замкнутої системи рівнянь відносно статистичних характеристик турбулентності в принципі неможливе. У цій ситуації розумним компромісом було б обмеження моделювання рівняннями перенесення інших моментів [5, 6].

Слід урахувати те, що отримання надійної емпіричної інформації про значення кореляційних членів високих порядків необхідно для замикання відповідних моделей. Це питання надзвичайно проблематичне. Таким чином, як зазначається в [11], “обрив” описаного вище нескінченного “ланцюжка” на рівняннях перенесення других моментів неявно ґрунтується на тому, що не має теоретичних підтверджень про те, що зі зростанням порядку модельованих кореляцій їх вплив на основні статистичні характеристики турбулентних потоків зменшується (“принцип послаблення впливу”) [12].

Значні успіхи в області побудови різноманітних напівемпіричних моделей турбулентності були досягнуті в 60–70-х рр. минулого століття. Вони дали оманливу надію на створення універсальної RANS моделі, що може

бути придатною для розрахунку будь-якої, в крайньому випадку, більшості турбулентних течій.

Упродовж другої половини минулого століття науковими установами були проведені численні експериментальні і розрахункові дослідження турбулентних течій. Вони переконливо засвідчили, що локальні осереднені характеристики турбулентних потоків піддаються суттєвому глобальному впливу стійких, великомасштабних, з розмірами порядку макромасштабу течій, принципово тривимірних і нестационарних структур (рис. 1).

Характеристики цих структур залежать від конкретної геометрії даної течії і межових. Таким чином, гіпотеза локальності та осереднених характеристик турбулентних потоків, на якій у неявній формі передбачалось побудувати RANS моделі турбулентності, не виконується [11].

Це в принципі унеможливує побудову ідеальної моделі такого типу і робить згадані вище надії на можливість побудови універсальної RANS моделі турбулентності, по суті, нездійсненними. Дане твердження в рівній мірі стосується як простих моделей, що базуються на гіпотезі Буссинеска про лінійний зв'язок між тензорами рейнольдсових напружень і швидкостей деформацій, так і моделей перенесення рейнольдсових напружень.

Найбільш яскравим прикладом течій, для яких характерне формування когерентних турбулентних структур з розмірами порядку розмірів обтічного тіла, є течії з великими зонами відриву (рис. 1 а, с). Саме з цієї причини результати розрахунків таких течій з використанням RANS моделей виявляються, як правило, незадовільними [5, 6, 7].

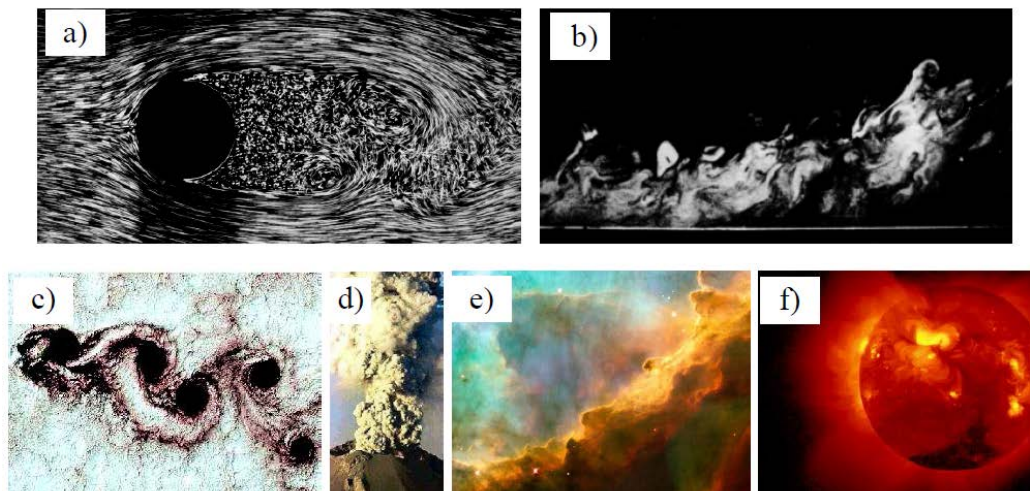


Рис. 1. Приклади когерентних вихрових структур [5, 6]:
а – обтікання циліндра; b – турбулентний прикордонний шар за наявності позитивного подовжнього градієнта тиску; с – “слід” острова в океані;
d – виверження вулкана; e – галактичні хмари; f – Сонце

Певні ознаки недосконалості напівемпіричної теорії турбулентності з'явилися вже в кінці 60-х на початку 70-х рр. минулого століття,

Значна кількість публікацій, що присвячені вдосконаленню відомих та створенню нових напівемпіричних моделей турбулентності підтверджували цілий ряд їх недоліків. Незадовільні результати з розрахунку відривних течій спричинили масу питань про їх коректність. У зв'язку з цим виникло багато питань про межі застосування напівемпіричних моделей турбулентності. Багаточисельні дослідження призвели до появи значної кількості нових RANS моделей. Порушилось гостре питання про обґрунтований вибір тієї або іншої з них для розрахунку турбулентних течій.

У зв'язку з цим почалися систематичні дослідження, спрямовані на визначення меж застосування напівемпіричних моделей турбулентності.

Ця робота проводилася і продовжує проводитись як окремими дослідницькими групами, так і в рамках масштабних міжнародних програм, координуваних NASA та Європейською комісією з розвитку наукових досліджень. Зокрема, NASA був створений спеціальний постійно оновлюваний інтернет-портал [13], на якому приведені формулювання найбільш поширених моделей турбулентності, "еталонні" результати розрахунків різних течій, отримані з їх використанням, та експериментальні дані, які можуть служити для валідації цих моделей. Аналогічний ресурс був створений і підтримується "Європейською спільнотою з течій, турбулентності і горіння" (ERCRAFT) [14]. На розв'язання тієї ж проблеми (вдосконалення і валідацію моделей турбулентності) спрямована значна кількість великих міжнародних проектів, що фінансуються Євросоюзом ECARP [15], FLOMANIA [16] і ATAAC [17].

Важлива роль у цій сфері належить спеціальним робочим семінарам, на яких результати розрахунків, отримані окремими дослідницькими групами із застосуванням різних моделей турбулентності, порівнюються зі спеціально дібраними експериментальними даними і з результатами розрахунків у рамках LES і DNS.

У результаті таких цілеспрямованих зусиль накопичено велику і, що особливо важливо, об'єктивну (практично вільну від обчислювальних неточностей) інформацію про можливості різних RANS моделей.

Ця інформація є виключно важливою, оскільки, незважаючи на зазначені серйозні недоліки цих моделей, саме вони аж до нинішнього часу є і ще довго залишатимуться основним робочим інструментом для проведення практичних розрахунків турбулентних течій. Значні потреби в розв'язуванні таких задач відчувають багато галузей науки і техніки.

Фізичні особливості моделювання турбулентних течій. До класичних вихоророзрізнявальних підходів прийнято зараховувати пряме числове

модельовання (DNS) турбулентних течій і метод модельовання великих вихорів (LES). За їх допомогою можуть бути розраховані не лише статистичні параметри турбулентних потоків, а також і їхня нестационарна вихрова структура.

Пряме числове модельовання (DNS). На відміну від RANS моделей, у побудові яких використовуються ті або інші, а іноді досить довільні допущення і великий об'єм емпіричної інформації. Єдине загальноприйняте на сьогодні припущення, на якому базується DNS, полягає в тому, що рівняння Нав'є–Стокса адекватно описують не лише ламінарні, але й перехідні і турбулентні течії. Розрахунок турбулентних течій у методі DNS робиться шляхом безпосереднього прямого розв'язування диференціальних рівнянь Нав'є–Стокса у частинних похідних.

При цьому, незалежно від характеру осередненої течії (тобто незалежно від того, чи є воно двовимірним або тривимірним, стаціонарним або нестационарним), повинні використовуватися тривимірні нестационарні рівняння Нав'є–Стокса, оскільки турбулентність є принципово тривимірним і нестационарним явищем. Застосування DNS передбачає необхідність досить точного розрізнення усіх просторово-часових масштабів турбулентності.

На рис. 2 показано типовий енергетичний спектр турбулентності як залежність спектральної щільності кінетичної енергії турбулентності E від хвильового числа k за досить високих чисел Рейнольдса [5, 6].

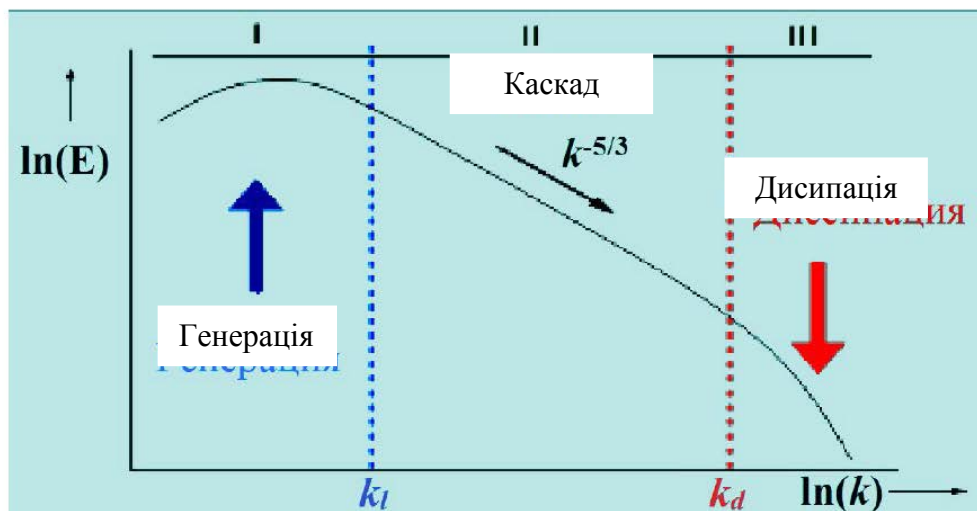


Рис. 2. Области енергетичного спектра турбулентності для високих значень числа Рейнольдса [5, 6]

Цей спектр має три області.

Область I відповідає великомасштабним турбулентним вихорам, що несуть енергію, з розмірами порядку інтегрального лінійного масштабу даної течії L (йому відповідає хвильове число $k_I = 2\pi/L$), що відбирає енергію з осередненої течії.

В області III спектра домінують дрібні вихори з розмірами менше колмогоровського масштабу

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4},$$

де $\nu = \mu/\rho$ – кінематична в'язкість;

ε – швидкість дисипації енергії турбулентності і хвильовими числами $k > k_d = 2\pi/\eta$.

В'язка дисипація таких вихорів переводить кінетичну енергію турбулентності в тепло.

Область II – це так званий інерційний інтервал спектра. Він лежить між областями I і III, що відповідає вихорим структурам з розмірами в діапазоні $\eta < l < L$.

Вплив молекулярної в'язкості в інерційному інтервалі спектра ніяк не виявляється, енергія турбулентності не генерується, її дисипація не відбувається. Вона передається від більших вихорів до менших. Це так званий енергетичний каскад турбулентності. В результаті енергетичний спектр в області II вважають універсальним і описують законом Колмогорова $E \sim k^{5/3}$ [5, 6, 7].

Відношення максимального L і мінімального η лінійних масштабів турбулентності L/η пропорційно числу Рейнольдса в степені $3/4$ $L/\eta \sim Re^{3/4}$. Внаслідок цього розмір просторової сітки, необхідної для проведення розрахунків за допомогою DNS, зростає зі збільшенням числа Рейнольдса як $(L/\eta)^3$ або як $Re^{9/4}$. Разом зі зростанням числа Рейнольдса збільшується також відношення інтегрального часовому масштабу τ_I і мінімального. Це відповідає колмогоровським вихорам та часовому масштабу $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$, що визначає кількість кроків за часом, необхідних для проведення розрахунку: $\tau_I/\tau_\eta \sim Re^{1/2}$.

У результаті сумарні витрати на проведення розрахунків методом DNS зростають зі зростанням числа Рейнольдса як $Re^{11/4}$. Вони виявляються величезними за значень цього параметра (близько 10^6 і вище), що становлять практичний інтерес.

Отже, незважаючи на бурхливе зростання продуктивності комп'ютерів, яке трапляється останнім часом, використання DNS залишається обмеженим в основному фундаментальними дослідженнями течій із відносно простою геометрією і низькими числами Рейнольдса, метою яких є отримання детальної інформації про структуру та основні закономірності турбулентності.

Це, проте, ніскільки не зменшує важливості такого підходу, оскільки отримані за допомогою DNS результати разом з експериментальними даними становлять основу для розробки, калібрування й тестування напівемпіричних моделей турбулентності. Більше того, слід мати на увазі, що в майбутньому DNS стане, мабуть, домінуючим підходом не лише в аеродинаміці, але й у суміжних галузях техніки, скажімо, у хімічній технології, атомній енергетиці тощо.

Метод моделювання великих вихорів (LES). Метод моделювання великих вихорів (LES) сформувався на початку 70-х рр. минулого століття [18]. Він базується на проміжному між RANS і DNS рівні опису турбулентних течій. Ідея LES полягає в заміні “глобального” осереднювання характеристик реальної турбулентної течії за часом, на якому ґрунтуються рівняння Рейнольдса (1.4), “фільтрацією” цих характеристик від короткохвильових неоднорідностей або, іншими словами, їх просторовим осереднюванням в областях з розмірами порядку розміру фільтра. Цю процедуру ілюструє рис. 3. У його лівій частині показаний результат фільтрації одновимірного сигналу за допомогою фільтра одиничної ширини, а в правій – деяка реальна течія, сітка, використовувана для його локального просторового усереднювання, та інформація, що втрачається при цьому, про вихори з розмірами менше розмірів комірок цієї сітки.

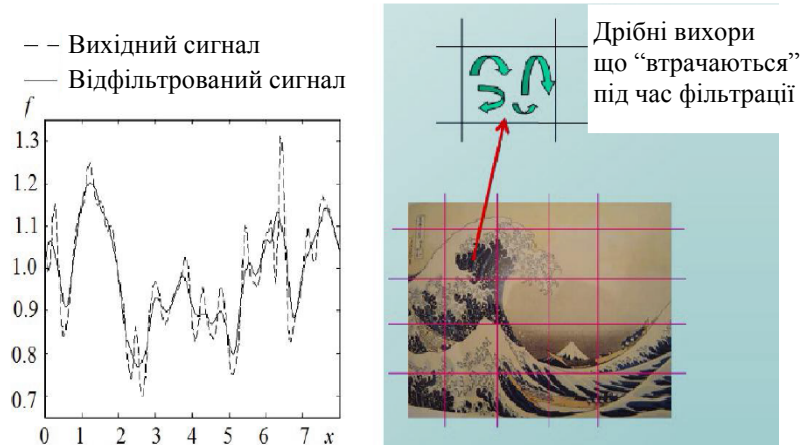


Рис. 3. Порівняння вихідного і відфільтрованого сигналів [5, 6]

Для виведення рівнянь LES актуальні змінні f у рівняннях Нав'є–Стокса замінюються сумою відповідних “відфільтрованих” і “підсіткових” змінних $f = \tilde{f} + f'$. Потім до отриманих в результаті рівнянь застосовується операція фільтрації. При цьому величина \tilde{f} визначається виразом

$$\tilde{f}(t, x) = \int_V G(x - x', \Delta) f(t, x') dx'^3, \quad (6)$$

де $G(x - x', \Delta)$ – функція фільтра;

x – координата даної точки потоку;

Δ – ширина фільтра.

На рис. 4 показано два приклади часто використовуваних фільтрів [5, 6].

У цілій низці наукових праць наводяться приклади використовуваних фільтрів. Наприклад, [7], [19]:

$$G(x, x') = \begin{cases} 1/\Delta & \text{для } |x - x'| < \Delta/2 \\ 0 & \text{для } |x - x'| > \Delta/2 \end{cases}, \quad G(x, x') = \frac{6}{\pi\Delta} \exp\left[-\frac{6(x - x')^2}{\Delta^2}\right].$$

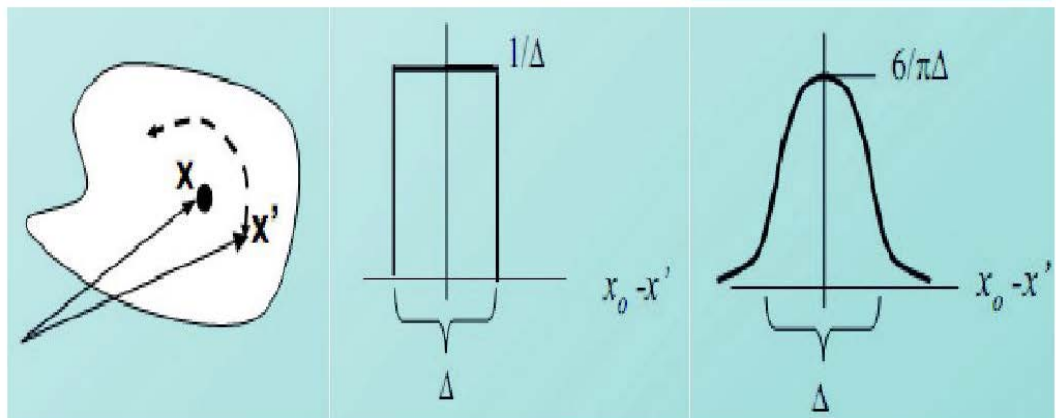


Рис. 4. Приклади фільтрів, що використовуються в LES [5, 6, 7]

Опускаючи деталі виведення, які можна знайти у багатьох монографіях та наукових працях [7, 19]), наведемо остаточну форму основних рівнянь LES для стисливого газу (знаки фільтрації основних змінних для зручності запису опущені) [5, 6, 7]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_{ik} + \tau_{SGS,ik}) - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k H)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} [u_i (\tau_{ik} + \tau_{SGS,ik}) - (q_k + q_{SGS,k})], \\ \rho = pm/(RT). \end{array} \right. \quad (7)$$

З формальної точки зору, єдина відмінність між системою рівнянь (7) і рівняннями Рейнольдса (4) полягає у відмінності додаткових доданків, що з'являються в правих частинах рівнянь руху і енергії в результаті просторової фільтрації нелінійних конвективних членів рівнянь Нав'є–Стокса (LES) та їх осереднювання за часом (RANS).

У рівняннях LES (7) ці члени мають індекс “SGS” (Sub – Grid Scale), а в рівняннях RANS (4) – індекс “t” (turbulent). Проте за цією формальною відмінністю приховується принципово різний фізичний зміст LES і RANS підходів до опису турбулентних течій. Зокрема, додаткові члени RANS рівнянь (напруження Рейнольдса і турбулентний тепловий потік) описують вплив, який чинять на осереднене за часом рішення турбулентні структури (вихори) усіх масштабів.

На противагу цьому аналогічні (“підсіткові”) члени рівнянь LES (7) описують вплив, що чинять на відфільтровані за простором характеристики потоку тільки відносно дрібні вихори з розмірами, меншими за розмір фільтра Δ .

У рамках методу LES вихрові структури з розмірами, що перевищують розміри фільтра, розрізняються “точно”, а моделюються лише вихрові структури менших розмірів. Щоб підкреслити це, моделі турбулентності для LES, тобто співвідношення, що визначають зв'язок підсіткових напружень і теплового потоку з параметрами відфільтрованої течії, називають “підсітковими” моделями [5, 6, 7].

Таким чином, якщо розміру фільтра відповідає хвилеве число k_Δ , що лежить в універсальній (“інерційній”) області енергетичного спектра турбулентності, тобто, якщо $k_l < k_\Delta < k_d$ (рис. 5), то моделюванню підлягають тільки відносно універсальні, не залежні від конкретної геометрії і межових умов вихори. В результаті роль підсіткової моделі в LES полягає переважно у забезпеченні правильної швидкості каскадної передачі енергії турбулентності від великих до дрібних вихорів у межах інерційного інтервалу хвилевих чисел або, іншими словами, до забезпечення правильної швидкості дисипації найменших із “розрізнених” вихорів.

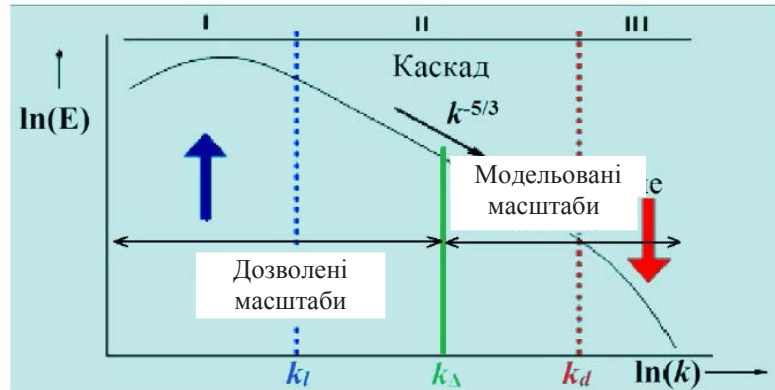


Рис. 5. Масштаби турбулентних структур, що розрізняються і моделюються у рамках LES

Саме у цьому полягає принципова перевага LES перед RANS підходом, у рамках якого потрібне моделювання всіх, у тому числі великих енергомісних вихорів, що не підкоряються будь-яким універсальним законам. З практичної точки зору, ця перевага означає, що побудова адекватних підсіткових моделей для LES є значно легшим завданням, ніж побудова моделей турбулентності для замикання рівнянь RANS.

Досвід застосування LES свідчить про те, що при виконанні умови $k_l < k_\Delta < k_d$ цей підхід забезпечує високу точність розрахунку не лише усереднених, але й пульсаційних характеристик турбулентності навіть при використанні простих підсіткових моделей, наприклад, класичної алгебраїчної моделі Смагоринського [20]. В основі цієї моделі лежить поняття підсіткової в'язкості ν_{SGS} і припущення про те, що ця величина визначається середнім значенням швидкості дисипації енергії турбулентності ε , що припадає на одиницю об'єму. Виходячи з міркувань розмірності, слід прийняти, що

$$\nu_{SGS} \sim \varepsilon^{1/3} \Delta^{3/4}, \quad (8)$$

де Δ – характерний розмір фільтра.

За наявності в спектрі турбулентності інерційного інтервалу (рис. 5) ті ж міркування розмірності уможливають виразити ε через середню швидкість деформації $S = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ і розмір фільтра, $\varepsilon \sim S^3 \Delta^2$, що безпосередньо приводить до формули Смагоринського для підсіткової в'язкості

$$\nu_{SGS} = (C_S \Delta)^2 S, \quad (9)$$

де C_S – емпірична константа Смагоринського.

При цьому підсітковий тензор напружень визначається з використанням гіпотези Буссинеска

$$\tau_{SGS,ij} = 2\rho\nu_{SGS} \left[S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k_{SGS} \delta_{ij}, \quad (10)$$

де $k_{SGS} = \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2}$ – підсіткова кінетична енергія.

Згідно з моделлю Смагоринського, підсіткова в'язкість залежить не лише від параметрів відфільтрованої течії: компонент тензора швидкостей деформацій, але й від розміру фільтра.

Слід зазначити, що в більшості практичних застосувань LES явна процедура фільтрації не застосовується, а роль фільтра відіграє розрахункова сітка, що використовується для числової інтеграції рівнянь (7) [5, 6, 7]. При цьому як характерний розмір фільтра Δ використовуються різні комбінації локальних кроків сітки в трьох просторових напрямках. Під час використання сіток, близьких до ізотропних (саме такі сітки є оптимальними для LES), конкретний спосіб визначення Δ не відіграє ролі, оскільки при цьому всі способи виявляються, по суті, еквівалентними. Проте на практиці через складність геометрії реальних течій часто доводиться використовувати істотно анізотропні сітки. Особливо це стосується структурованих сіток), і вибір того або іншого визначення Δ стає дуже важливим. Найбільше поширення при цьому отримало визначення Δ як кореня кубічного з об'єму осередку сітки [21]. Проте у цього визначення немає якого-небудь теоретичного обґрунтування і його використання у разі сильно анізотропних сіток може призводити до значного спотворення результатів LES.

Слід зазначити, що при подрібненні розрахункової сітки додаткові в порівнянні з рівняннями Нав'є–Стокса (модельовані) складові в рівняннях LES (7) зменшуються, і розв'язок LES асимптотично прямує до розв'язків DNS, незалежно від використовуваного методу визначення підсіткового масштабу. У цьому полягає ще одна принципова відмінність методу LES від методу RANS, в якому подрібнення сітки призводить лише до отримання “точних” (незалежних від сітки) розв'язків рівнянь Рейнольдса і ніяк не позначається на адекватності фізичного моделювання.

Важливою особливістю підсіткових моделей для LES є та обставина, що емпіричні константи (наприклад, константа Смагоринського), що входять у них, можуть залежати від використовуваного для розв'язування числового методу. Це пояснюється тим, що точність розрізнення великомасштаб-

них вихрових структур за числового розв'язування рівнянь LES визначається не лише обчислювальною сіткою, але й властивостями використовуваного числового методу, зокрема властивою йому числовою дисипацією, яка сама по собі відіграє роль своєї підсіткової моделі. Таким чином, якщо ця дисипація значна, то константа підсіткової моделі Смагоринського має бути відповідним чином зменшена, а якщо мала, то, навпаки, – збільшена. У зв'язку з цим для кожного числового методу має проводитись індивідуальне калібрування константи моделі Смагоринського або аналогічних їй констант інших підсіткових моделей. Таке калібрування здійснюється зазвичай шляхом розв'язування відповідної задачі про виродження однорідної ізотропної турбулентності.

При цьому слід використовувати різні значення константи і добору такого її значення, за якого розрахунковий спектр розрізненої кінетичної енергії турбулентності якнайкраще узгоджується з експериментальними даними або з результатами DNS і підпорядковується закону “ $-5/3$ ” в інерційному діапазоні хвильових чисел.

На рис. 6 зображено енергетичні спектри, отримані під час розв'язування такої задачі з використанням схем із різним порядком апроксимації нев'язких складових газодинамічних потоків і фіксованого значення константи $C_s = 0,2$ [5, 6].

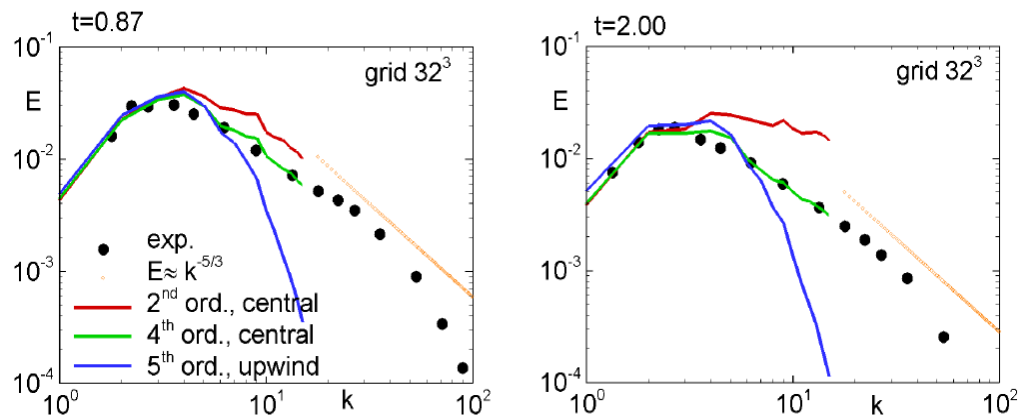


Рис. 6. Спектри розрізненої енергії турбулентності в два моменти часу з розв'язком задачі про виродження однорідної ізотропної турбулентності, що отримані на основі LES з моделлю Смагоринського з використанням різних числових методів за $C_s = 0,2$ [5, 6]

З графіків (рис. 6) видно, що числовий метод значно впливає на результати LES, причому за цього значення константи C_S правильна поведінка спектрів забезпечується під час використання тільки однієї з трьох даних схем апроксимації нев'язких потоків, а саме симетричної схеми четвертого порядку точності. У разі використання протипотокової схеми короткохвильові моди спектра практично не розрізняються через занадто високу числову дисипацію навіть за підвищеного (п'ятого) порядку апроксимації точності схем [5, 6]. Під час розрахунку вільних турбулентних течій з використанням монотонних числових алгоритмів ця обставина уможливило взагалі відмовитися від явного моделювання підсіткової турбулентності, оскільки в цьому випадку функції підсіткової моделі з успіхом виконує властива таким методам числова дисипація [5, 8, 22]. Цей напрям у LES дістав назву Monotonically Integrated LES (MILES) або Implicit LES (ILES).

На противагу цьому під час використання симетричної схеми другого порядку точність з тим же значенням константи $C_S = 0,2$ навіть сумарна дисипація моделі й методу виявляється недостатньою для правильного опису каскаду турбулентності (енергія турбулентності “генерується” і накопичується в короткохвильових модах спектра) [5, 6, 8].

На рис. 7 зображено енергетичні спектри, отримані за різних значень C_S за допомогою коду NTS [23], у якому для LES використовується симетрична апроксимація нев'язких потоків з четвертим, а в'язких – з другим порядком точності. З графіка (рис. 7) видно, що оптимальним значенням константи Смагоринського для цього коду є $C_S = 0,2$.

Отже, вважають, що модель Смагоринського (1.9) не забезпечує рівності нулю підсіткової в'язкості на твердій поверхні й тому не може безпосередньо застосовуватися для розрахунку пристінних течій. Для усунення цього недоліку в неї вводиться демпфуючий множник [24], що є аналогом множника Ван Дріста в моделі Прандтля для RANS

$$v_{SGS} = (C_S \Delta)^2 \left[1.0 - \exp\left(-\left(d_w^+/25\right)^3\right) \right] S, \quad (11)$$

де $d_w^+ = d_w u_\tau / \nu$ – безрозмірна відстань до стінки;

$u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамічна швидкість;

τ_w – дотичне напруження на стінці.

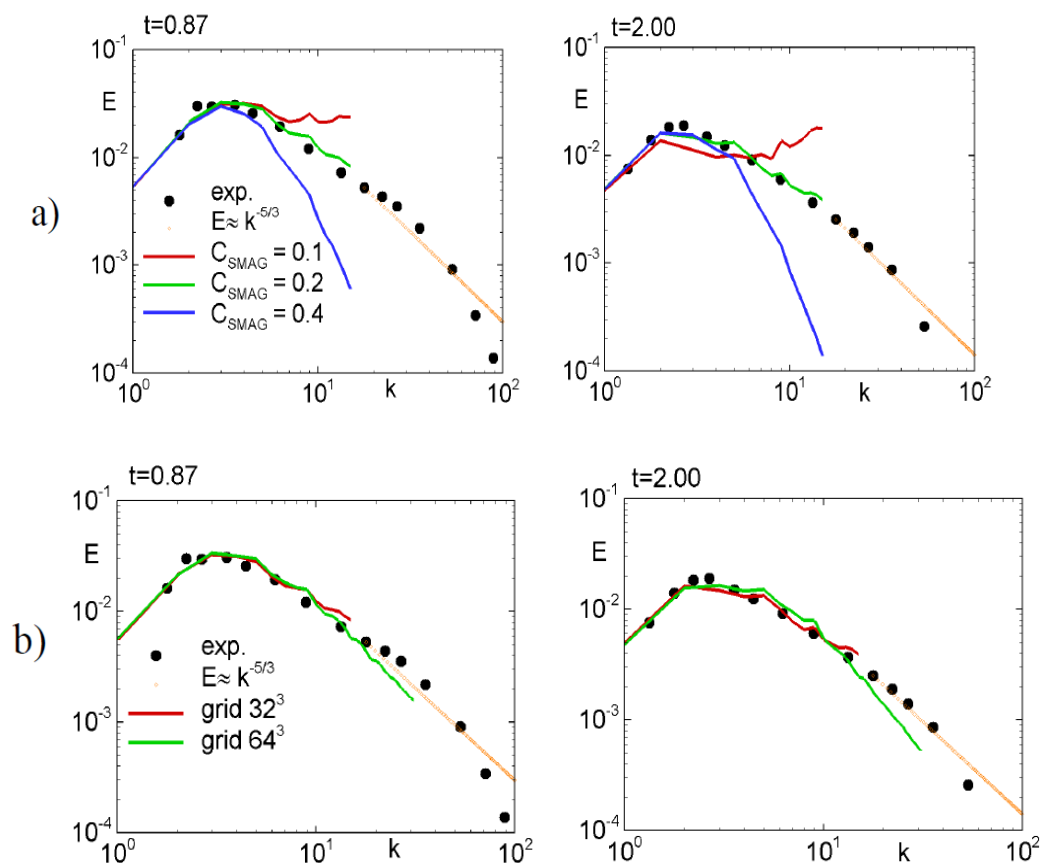


Рис. 7. Спектри розрізної енергії турбулентності в задачі про виродження однорідної ізотропної турбулентності, отримані з LES з моделлю Смагоринського [23]: а) вплив вибору константи на результати розрахунку на сітці $32 \times 32 \times 32$; б) вплив сітки на результати розрахунків за $C_s = 0,2$

Крім того, досвід показує, що під час розрахунку пристінних течій необхідно використати приблизно в два рази менше значення константи Смагоринського, ніж під час розрахунку вільних турбулентних течій [5, 6, 7]. Цей факт ілюструє рис. 8, на якому порівнюються результати розрахунку течії, що встановилася в плоскому каналі, отримані за допомогою модифікованої моделі Смагоринського (1.11) з використанням коду NTS за $C_s = 0,2$ і $0,1$.

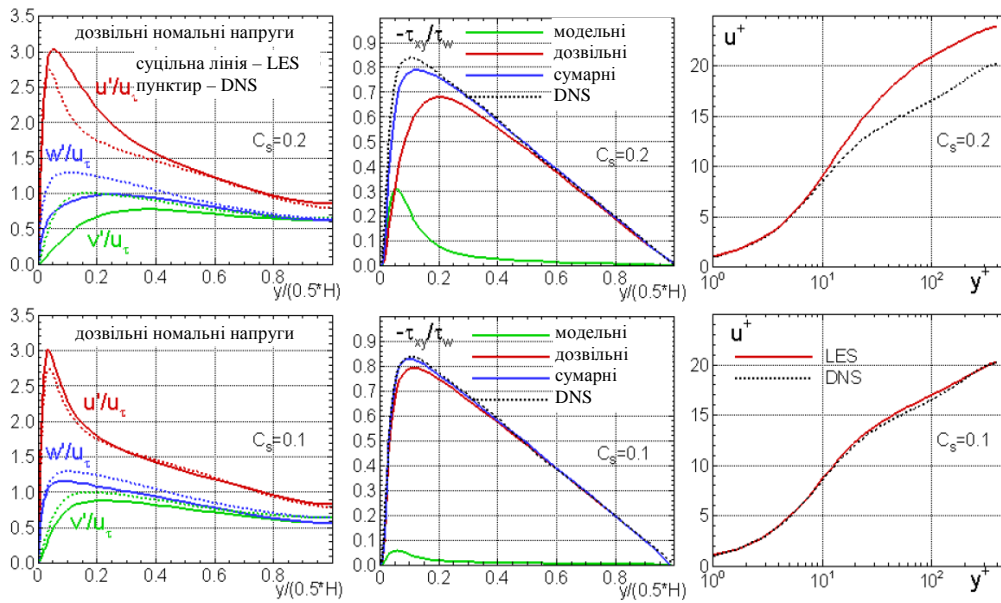


Рис. 8. Порівняння результатів LES течії, що встановилася, в плоскому каналі, якщо число Рейнольдса $Re_\tau = u_\tau H / \eta = 400$, отриманих із використанням моделі Смагоринського за різних значень C_s , з результатами DNS [25]

З рис. 8 видно, що в першому випадку, тобто з використанням значення $C_s = 0,2$, яке отримане під час калібрування цієї константи на задачі про загасання вільної ізотропної турбулентності, результати розрахунку суттєво відрізняються від відповідних результатів DNS [25], а за $C_s = 0,1$ – практично відповідають цим результатам [5, 6, 7, 25].

Зазначені труднощі, пов'язані із застосуванням моделі Смагоринського та інших подібних моделей для розрахунку пристінних турбулентних течій, можуть бути покращені при використанні так званих динамічних підсіткових моделей. Детальний аналіз сучасних версій динамічних підсіткових моделей наведено у ряді наукових досліджень [5, 6, 7, 21, 26–29].

Незважаючи на великі переваги LES, його недоліком є те, що цей підхід потребує великих обчислювальних ресурсів, у рази більших, ніж RANS. Це пов'язано з необхідністю, як і у випадку DNS, проведення тривимірних нестационарних розрахунків на досить дрібних сітках навіть в тих випадках, коли метою розрахунку є тільки визначення параметрів осередненої течії.

Проте в LES дрібномасштабна частина спектра моделюється, а не розраховується “точно”, як у DNS, а ресурси, необхідні для реалізації LES, виявляються істотно меншими, ніж для DNS.

Зокрема, для розрахунку турбулентності далеко від твердих стінок кількість комірок сітки, необхідна для проведення LES, збільшується зі зростанням числа Рейнольдса набагато повільніше, ніж у випадку DNS пропорційно $Re^{0.4}$, а не $Re^{2.25}$ [30]. Проте поблизу стінок, де навіть найбільші енергонесучі вихори мають дуже маленькі розміри, вимоги до сіток для LES істотно посилюються і наближаються до аналогічних вимог для DNS. Кількість комірок, необхідних для LES таких течій пропорційно $Re^{1.8}$ [30]. Це робить LES для складних пристінних течій, що становлять практичний інтерес високим числам Рейнольдса, лише трохи менше ресурсоємним, ніж DNS, причому основні обчислювальні витрати пов’язані при цьому з розрізненням турбулентності в тонкій пристінній області.

На рис. 9 зображено залежності від числа Рейнольдса кількості комірок сітки, які повинні міститись у внутрішній і зовнішній областях турбулентного примежового шару на пластині під час його розрахунку в рамках LES [31]. З графіків (рис. 9) видно, що за $Re = 10^6$ повна кількість осередків дорівнює $\sim 10^{8.5}$, причому 99 % з них міститься у внутрішній частині примежового шару. Така обставина стимулювала пошук альтернативних підходів, що дають можливість без помітного зниження точності розв’язати проблему. Це сприяло появі так званих гібридних RANS – LES підходів.

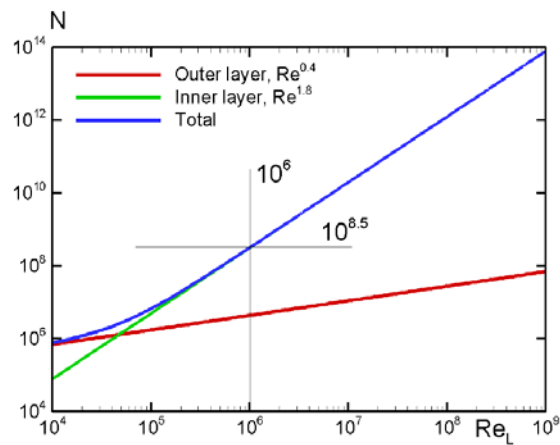


Рис. 9. Залежність від числа Рейнольдса кількості комірок сітки у внутрішній і зовнішній областях примежового шару на плоскій пластині і загальної кількості комірок, необхідних для LES цієї течії [31]

Гібридні RANS–LES підходи. Гібридні RANS–LES моделі з’явилися порівняно недавно: в дев’яності роки минулого століття. Найпоширенішим методом став метод моделювання від’єднаних вихорів – Detached Eddy Simulation або DES [32].

На сьогодні принаймні поширені декілька десятків таких моделей. Їх подальшому вдосконаленню й розвитку присвячено величезну кількість досліджень [5, 6, 7, 32–36]. DES тримав подальший розвиток – Delayed Detached Eddy Simulation (DDES) [41]. Це свідчить про позитивні сторони ідеї, що лежить в основі гібридних моделей. З іншого боку, немає повної задоволеності вже існуючими моделями такого типу.

Загальна концепція, що лежить в основі гібридних моделей, відбивається в їх назві. Вона полягає в спробі побудови комбінованих моделей, які функціонували б як RANS в одних і як LES в інших областях течії. Така можливість відкривається завдяки формальній схожості рівнянь Рейнольдса (4) і рівнянь LES (7). Проте шляхи реалізації цієї можливості можуть бути абсолютно різноманітними. Це пояснюється відмінністю різних форм гібридних моделей.

Детальний огляд цих гібридних моделей представлено в цілому ряді наукових праць [5, 6, 7, 37, 38, 39, 40]. Проблеми розробки та вдосконалення гібридних RANS–LES моделей постійно обговорюються на різноманітних міжнародних конференціях, симпозіумах і т. д. [34, 35].

Насамперед до дуже поширених гібридних RANS–LES моделей слід зарахувати згаданий вище історично перший гібридний метод DES. Він був запропонований як альтернатива RANS і LES методам для розрахунку течій з великими відривними зонами. Відомо, що RANS-моделі не здатні забезпечити прийнятну для практики точність розрахунку таких течій. LES потребує надмірно великих обчислювальних витрат, лівова частка яких пов’язана з розрахунком пристінної частини приєднаних примежових шарів, які містять енергонесучі вихори малих розмірів.

Це спонукало авторів DES [32–36] до створення такої моделі, яка функціонувала б як RANS в області приєднаного примежового шару і забезпечувала цілком прийнятну точність, і як LES у відривних областях потоку, де його використання не потребує надмірно дрібних сіток. Назва методу (“моделювання від’єднаних вихорів”) підкреслює принципову відмінність DES від LES.

Таким чином, у рамках DES “точно” розрізняються лише “від’єднані” вихори, які містяться у відривній зоні. Відносно дрібні вихори, що формуються у приєднаному примежовому шарі, описуються звичайними напівемпіричними RANS моделями.

Ще одна важлива особливість DES полягає в тому, що в рамках цього підходу у RANS і LES областях використовується одна й та ж “базова” модель турбулентності, яка функціонує як RANS-модель усередині пристінного примежового шару і як її підсітковий аналог далеко від твердих стінок. При цьому межа між областями RANS і LES визначається в процесі розрахунку автоматично і залежить від кроків використовуваної обчислювальної сітки, від відстані від даної точки потоку до обтічної поверхні та від локальних параметрів потоку.

Інтенсивний розвиток обчислювальної аеродинаміки сприяв появі цілого ряду гібридних DES-методів [42–47]. У зв’язку з цим DES та інші аналогічні DES-подібні методи: Extra – Large Eddy Simulation або X – LES [45] і Limited Numerical Scales або LNS [46] часто не зовсім точно називають “незонними” (“non-zonal”) гібридними методами, щоб відрізнити їх від зонних гібридів, в яких RANS і LES області пропонуються з тих або інших міркувань. До таких методів належить, наприклад, зонний DES (Zonal DES або ZDES), що розвивається в дослідженні [47]), а також ряд інших зонних підходів. Цей метод має ряд переваг у порівнянні з DES, що полягають у більшій гнучкості. Проте його основний недолік – це необхідність апріорних уявлень про структуру течії, наприклад, про положення точки (лінії) відриву потоку.

Окрему групу гібридних RANS–LES методів становлять так звані моделі LES з пристінним моделюванням (Wall Modeled LES–WMLES) [48], які можуть використовуватися для розрахунку не лише відривних, але й складних приєднаних турбулентних течій. Ідея цих методів полягає у використанні RANS не в усьому пристінному примежовому шарі, як це робиться в DES, а тільки в його внутрішній області, тобто саме в тій області, на розрахунок якої припадають основні обчислювальні витрати LES. Проте спектр застосування WMLES досить широкий [5, 6, 49].

Останніми роками набув розвитку ще один підхід до RANSSLES моделювання турбулентності, що є найбільш загальною формою зонних методів і дістав назву вбудованого LES (Embedded LES), у рамках якої область LES може довільно розташовуватись усередині області RANS (рис. 10) [5, 6].

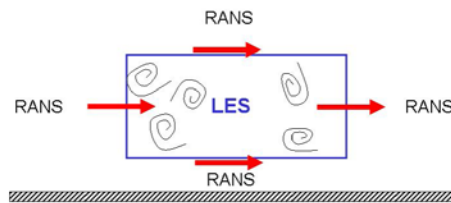


Рис. 10. Схема RANS і LES областей у вбудованому LES

Це відкриває можливість використання обчислювального трудомісткого методу LES тільки в тих областях потоку, які не піддаються опису у рамках RANS, або в областях, для яких потрібно отримання інформації не лише про осереднені, але й про пульсаційні характеристики потоку. Така задача може виникнути під час розв'язування зв'язаних задач аеродинаміки та пружності, акустики.

Проте для їх практичної реалізації потрібно розв'язання ряду складних фізичних проблем, пов'язаних зі “зшиванням” RANS і LES-розв'язків.

Так, під час переходу від LES до RANS розв'язуванню необхідне забезпечення плавного пригнічення турбулентних пульсацій [50].

На противагу цьому для досягнення швидкого переходу від повністю модельованої турбулентності в RANS-області до “дозволеної” турбулентності в LES-області на відповідних межах останньою необхідно вводити штучні збурення [5, 6]. Незважаючи на значні моделювання турбулентних течій, цілком задовільного вирішення цих питань досі не знайдено. Окрім цього, програмна реалізація запропонованих методів досить складна й суттєво спирається на специфіку використовуваних обчислювальних сіток і структуру зберігання даних у відповідних обчислювальних кодах. Це утруднює, а іноді й унеможливорює перенесення цих методів з одного коду в інший.

На сьогодні розроблено ще й так звані “безшовні” (seamless) RANS–LES гібриди, в яких обидва підходи тим або іншим чином “зважаються” і одночасно функціонують у всій розрахунковій області. Найбільш відомим із них є метод, що базується на частково осереднених рівняннях Нав'є–Стокса, – Partially Averaged Navier–Stokes або PANS [51]. Проте проблема побудови вагових функцій, що автоматично забезпечують адекватні, відповідно до локальних розмірів сітки, ваги RANS і LES моделей в даній точці потоку залишається, по суті, невирішеною. Це істотно обмежує практичне використання безшовних підходів RANS–LES.

Широкий досвід використання лінійних моделей свідчить про те, що й у наш час найбільш високий “рейтинг” серед них отримали дві моделі та їх модифікації:

– модель перенесення турбулентної в'язкості [52] (модель Спаларта–Аллмараса або SA модель).

– модель перенесення кінетичної енергії турбулентності та питомої швидкості її дисипації [53, 54] – ($k - \omega$ Shear Stress Transport модель Ментера або SST модель).

Проте серед гібридних RANS–LES методів найпоширенішим залишається гібридний метод DES [32–36] та його пізніші модифікації.

Оцінка обчислювальних ресурсів, необхідних для застосування різних підходів. Існуючі підходи до моделювання турбулентних течій значно розрізняються між собою не лише своїми можливостями відображати фізичні

процеси, але й потребами в обчислювальних ресурсах, які необхідні для їх практичного застосування.

Якісна оцінка ресурсів, необхідних для проведення обчислювальних експериментів, дається в працях [27, 45]. Основні результати подано в табл. 1. У другому і третьому стовпцях цієї таблиці наведено типові розміри сіток та кількість кроків інтеграції за часом, необхідних для розрахунку обтікання типового цивільного транспортного засобу (літака чи автомобіля) з використанням методів, що базуються на RANS, DES, LES і DNS.

Ці дані ґрунтуються на аналізі просторових і часових масштабів турбулентності, що розрізняються у рамках перерахованих методів.

Таблиця 1

Обчислювальні ресурси і перспективи практичного застосування різних підходів до моделювання турбулентних течій [27, 45]

Підхід	Необхідна кількість вузлів	Необхідна кількість кроків	Рік реалізації
Стационарний тривимірний RANS	10^7	10^3	1985
DES	10^8	10^4	2000
LES	$10^{11,5}$	$10^{6,7}$	2045
DNS	10^{16}	$10^{7,7}$	2080

У останньому стовпці таблиці наводиться час “готовності” відповідних методів до практичного використання. Під готовністю розуміється можливість розрахунку одного варіанта протягом доби на найпотужніших із доступних комп’ютерів. Зазначимо, що для RANS ці оцінки спиралися на реальний досвід їх використання. На противагу цьому прогнози для методів DES, LES і DNS базуються на припущенні про зростання продуктивності комп’ютерів у два рази кожні п’ять років. Хоча вважається, що це занадто оптимістично [5, 6, 7].

У повній відповідності до прогнозу, наведеному в табл. 1, перший розрахунок обтікання літака за допомогою методу DES був виконаний у 2000 р. [55]. Це підтверджує достовірність наведених у ній оцінок. Вважають, що принаймні впродовж найближчих десяти років, основним робочим інструментом для виконання прикладних завдань аеродинаміки, пов’язаних із розрахунком турбулентних течій, залишатимуться методи, що базуються на використанні RANS у поєднанні з різними напівемпіричними моделями турбулентності, і гібридні RANS–LES методи.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Сучасні досягнення в галузі моделювання турбулентних течій, свідчать, що трудомісткість методів прямого числового моделювання (DNS) та методу великих вихорів (LES), які могли б використовуватися для практичного використання у визначенні аеродинамічних характеристик транспортних засобів, нині надзвичайно велика. Сучасний рівень розвитку ЕОМ не дає змоги проводити їх реалізацію в практичних цілях протягом однієї доби.

Виходячи з аналізу сучасних досягнень у розробці методів розрахунку турбулентних течій упродовж найближчих десятироків, основним робочим інструментом для виконання прикладних завдань аеродинаміки, пов'язаних із розрахунком турбулентних течій, залишатимуться методи, що базуються на використанні RANS у поєднанні з різними напівемпіричними моделями турбулентності, і гібридні RANS–LES.

Таким чином, для визначення аеродинамічних характеристик перспективних транспортних засобів п'ятого покоління доцільно використовувати і гібридні RANS–LES методи.

Список використаних джерел:

1. *Гесць В. М., Волошин О. І., Дзензерський В. О., Никифорок О. І.* Розвиток економічних та науково-технічних основ транспорту п'ятого покоління ; НАН України, ДУ “Ін-т екон. та прогноз. НАН України” ; Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України; Інститут транспортних систем і технологій НАН України. Київ, 2020. 254 с.

2. *Дзензерский В. А., Омеляненко В. И., Васильев С. В., Матин В. И. и др.* Высокоскоростной магнитный транспорт с электродинамической левитацией. Киев: Наукова думка, 2001. 480 с.

3. *Приходько А. А.* Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене. Киев: Наукова думка, 2003. 380 с.

4. *Приходько А. А., Сохацкий А. В.* Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана. Днепропетровск: Наука и образование, 1998. 160 с.

5. *Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л.* Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 86 с.

6. *Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Травин А. К., Шур М. Л.* Современные подходы к моделированию турбулентности. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. 234 с.

7. *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.

8. *Reynolds O.* On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Trans. Roy. Soc., 1895. P. 123–161.

-
9. Freund J. B., Moin P., Lele S. K. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer // Flow Physics and Computation Division. Technical Report TF-72. Stanford University, 1997.
 10. Boersma B. L., Lele S. K. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. Center for Turbulence Research. Stanford University, 1999. P. 365–377.
 11. Spalart P. R. Philosophies and fallacies in turbulence modeling. Progress in Aerospace Sciences, 2015. № 74 (1). P. 1–15.
 12. Hanjalić K., Launder B. Modelling Turbulence in Engineering and the Environment: Second-Moment Routes to Closure. Cambridge University Press, 2011. 402 p.
 13. Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov> (page curator and responsible official C. Rumsey).
 14. ERCOFTAC QNET-CFD Knowledge Base Wiki. URL: http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki
 15. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M. A., Müller U. R. (Eds.). ECARP – European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models. Notes on Numerical Fluid Mechanics, 1997. V. 58.
 16. Haase W., Aupoix B., Bunge U., Schwaborn D. (Eds.) FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, 2006. V. 94. URL: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/flomania>
 17. ATAAC – Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges. URL: <http://cfd.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>
 18. Ferziger J. H. Recent Advances in Large Eddy Simulation, Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3, W. Rodi and G. Bergeles (Eds.), 1996, Elsevier. P. 163–176.
 19. Garnier E., Adams N., Sagaut P. Large eddy simulation for compressible flows, Springer, 2009. 276 p.
 20. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, Monthly Weather Review, 1963, 91. P. 99–164.
 21. Deardorff. J. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, Journal of Fluid Mechanics, 1970. 41 (2). P. 453–480.
 22. Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J. Implicit Large Eddy Simulation, Cambridge University Press, 2007. 577 p.
 23. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier–Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows, Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology. October 5–7, 2004. Huntington Beach, USA.

-
24. *Piomelli U., Zang T., Speziale C., Hussaini M.* On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows. *Physics of Fluids A*, 1990. 2. P. 257–265.
25. *Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J.* *Implicit Large Eddy Simulation*, Cambridge University Press, 2007. P. 577.
26. *Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H.* A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991, 3 (7). P. 1760–1765.
27. *Lilly D. K.* A proposed modification of the Germano closure method, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1992. 4 (3). Pp. 633–635
28. *Meneveau C., Katz J.* Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, 32. Pp. 1–32. 24.
29. *You D., Moin P.* A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries, *Physics of Fluids*, 2007, 19 (6), 065110.
30. *Chapman D. R.* Computational aerodynamics development and outlook, *AIAA Journal*, 1979, 17. P. 1293–1313.
31. *Piomelli U., Balaras E.* Wall-layer models for large-eddy simulations, *Annual Rev. Fluid Mech.*, 2002, 34. P. 349–374.
32. *Spalart P. R., Allmaras S. R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flow // *AIAA Paper*, 1992. № 0112. P. 439–478.
33. *Spalart P. R., Shur M.* On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature // *Aerospace science and technology Journal*. 1997. Vol. 1. № 5. P. 297–366.
34. *Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. Kh., Travin A. K.* Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate // *Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference*, Paris, France, 9–13 September 1996. Chichester: John Wiley & Sons, 1996. P. 676–682.
35. *Spalart P. R., Jou W. H., Strelets M., Allmaras S. R.* Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // *Proceedings 352 Список літератури of the 1 st AFOSR International Conference on DNS/LES*, Ruston, Louisiana, 4–8 August 1997. Louisiana Technical University, 1997. P. 137–148.
36. *Spalart P. R.* Strategies for turbulence modelling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. V. 21. № 3. P. 252–263.
37. *Sagaut P., Deck S., Terracol M.* *Multiscale and multiresolution approaches in turbulence*, Imperial College Press, 2006. 340 p
38. *Menter F. R., Schütze J., Gritskevich M. S.* Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. *Hybrid RANS-LES Modelling, Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2012. 117. P. 15–28.

39. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions, *Mechanical Engineering Reviews*, 2015.

40. Peng S.-H., Haase W., (Eds.) *Advances in Hybrid RANS-LES Modeling. Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Corfu, Greece, 17–18 June 2007. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2008. V. 97.*

41. Spalart P. R., Deck S., Shur M. L., Squires K. D., Strelets M. Kh., Travin A. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. July, 2006. P. 181–195.

42. Peng S.-H., Doerffer P., Haase W., (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Gdansk, Poland, June 2009. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2010. V. 111.*

43. Fu S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Beijing, China, September 2011. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2012. V. 117.*

44. Girimaji S., Peng S.-H., Haase W., Schwamborn D. (Eds.) *Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, College Station, A&M University, Texas, USA, 19–21 March 2014. Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design. 2015. V. 130.*

45. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. Extra-large eddy simulation of massively separated flows, *AIAA Paper*, AIAA-2004-0264.

46. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance, *AIAA Paper*, AIAA-2000-0473.

47. Deck S. Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 2011. № 26 (6). P. 523–550.

48. Piomelli U., Balaras E. Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2002. № 36 (1). P. 505–374.

49. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2008. № 29. P. 1638–1649.

50. Terzi D., Frohlich J. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows, *Progress in Aerospace Sciences*, 2008. № 44 (5). P. 349–377.

51. Girimaji S., Sreenivasan R., Jeong E. PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary

Results. FEDSM2003-45336, Proceedings of ASME 222 FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences, July 13–16, Honolulu, Hawaii USA, 2003.

52. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows, AIAA Paper, AIAA-1992-0439.

53. Menter F. R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows, AIAA-Paper, AIAA-1993-2906.

54. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model, Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 (ed.: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers), 2003. P. 625–632.

55. Forsythe J., Squires K., Wurtzler K., Spalart P. Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha, AIAA Paper, AIAA-2002-0591.

References:

1. Rozvytok ekonomichnykh ta naukovo-tekhnichnykh osnov transportu p'iatoho pokolinnia / Heiets V. M., Voloshyn O. I., Dzenzerskyi V. O., Nykyforuk O.I. ; NAN Ukrainy, DU "In-t ekon. ta prohnozuv. NAN Ukrainy" ; Instytut heotekhnichnoi mekhaniky im. M.S. Poliakova NAN Ukrainy ; Instytut transportnykh system i tekhnolohii NAN Ukrainy. Elektron. resurs. K., 2020. 254 s.

2. Vysokoskorostnoy magnitnyiy transport s elektrodinamicheskoy levitatsiyei / Dzenzerskiy V. A., Omelyanenko V. I., Vasilev S. V., Matin V. I. i dr. Kyiv : Naukova dumka, 2001. – 480 s.

3. Prihodko, A. A. Kompyuternyye tehnologii v aerogidrodinamike i teplo mas-soobmene / Prihodko A. A. K.: Naukova dumka, 2003. 380s.

4. Prihodko A.A. Matematicheskoe i eksperimentalnoe modeli-rovanie aerodinamiki elementov transportnykh sistem vblizi ekrana / A. A. Prihodko, A. V. Sokhatskiy. Dnepropetrovsk : Nauka i obrazovanie, 1998. 160 s.

5. Garbaruk A. V., Strelets M. H., Shur M. L. Modelirovanie turbulentnosti v raschetah slozhnykh techeniy. SPb, Izd-vo Politehn. un-ta, 2012. 86 s

6. Garbaruk A. V., Strelets M. H., Travin A. K., Shur M. L. Sovremennyye podhody k modelirovaniyu turbulentnosti. SPb, Izd-vo Politehn. un-ta, 2016. 234 s.

7. Volkov K. N., Emelyanov V. N. Modelirovanie krupnykh vihrey v raschetah turbulentnykh techeniy. M. : FIZMATLIT, 2008. 368 s.

8. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion, Phil. Trans. Roy. Soc., 1895. P. 123–161.

9. Freund J. B., Moin P., Lele S. K. Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer // Flow Physics and Computation Division. Technical Report TF-72. Stanford University, 1997.

10. Boersta B. I., Lele S. K. Large eddy simulation of compressible turbulent jets. Center for Turbulence Research. Stanford University, 1999. P. 365–377.

11. Spalart P. R. Philosophies and fallacies in turbulence modeling, Progress in Aerospace Sciences, 2015, 74(1), 1–15

-
12. Hanjalić K., Launder B. *Modelling Turbulence in Engineering and the Environment: Second-Moment Routes to Closure*, Cambridge University Press, 2011. 402 p.
 13. Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center. URL: <http://turbmodels.larc.nasa.gov> (page curator and responsible official C. Rumsey). <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>
 14. ERCOFTAC QNET-CFD Knowledge Base Wiki, http://www.ercoftac.org/products_and_services/wiki/ 8. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M. A., Müller U. R. (Eds.). "ECARP - European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models", *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 1997, v. 58.
 15. Haase W., Chaput E., Elsholz E., Leschziner M. A., Müller U. R. (Eds.). "ECARP – European Computational Aerodynamics Research Project: Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models", *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 1997, v. 58
 16. Haase W., Aupoix B., Bunge U., Schwamborn D. (Eds.) "FLOMANIA – A European Initiative on Flow Physics Modelling", *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2006, v. 94 (<http://cfm.mace.manchester.ac.uk/flomania/>).
 17. "ATAAC - Advanced Turbulence Simulation for Aerodynamic Application Challenges". <http://cfm.mace.manchester.ac.uk/twiki/bin/view/ATAAC>.
 18. Ferziger J. H. "Recent Advances in Large Eddy Simulation", *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3*, W. Rodi and G. Bergeles (Eds.), 1996, Elsevier, pp. 163–176.
 19. Garnier E., Adams N., Sagaut P. *Large eddy simulation for compressible flows*, Springer, 2009. 276 p.
 20. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment, *Monthly Weather Review*, 1963, 91, pp. 99–164.
 21. Deardorff. J. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, 41(2), pp. 453–480.
 22. Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J. *Implicit Large Eddy Simulation*, Cambridge University Press, 2007. 577 p.
 23. Shur M., Strelets M., Travin A. High-Order Implicit Multi-Block Navier-Stokes Code: Ten-Years Experience of Application to RANS/DES/LES/DNS of Turbulent Flows, Invited lecture. 7th Symposium on Overset Composite Grids and Solution Technology, October 5–7, 2004, Huntington Beach, USA.
 24. Piomelli U., Zang T., Speziale C., Hussaini M. On the large-eddy simulation of transitional wall-bounded flows, *Physics of Fluids A*, 1990, 2, pp. 257–265.
 25. Grinstein F. F., Margolin L. G., Rider W. J. "Implicit Large Eddy Simulation", Cambridge University Press, 2007. – 577 p.
 26. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W. H. "A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model", *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991, 3(7), pp. 1760–1765

-
27. Lilly D. K. "A proposed modification of the Germano closure method", *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1992, 4(3), pp. 633–635
28. Meneveau C., Katz J. "Scale-invariance and turbulence models for large eddy simulation", *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2000, 32, pp. 1–32. 24.
29. You D., Moin P. "A dynamic global-coefficient subgrid-scale eddy-viscosity model for large-eddy simulation in complex geometries", *Physics of Fluids*, 2007, 19(6), 065110.
30. Chapman D. R. "Computational aerodynamics development and outlook", *AIAA Journal*, 1979, 17, pp. 1293-1313. 26. Piomelli U., Balaras E. "Wall-layer models for large-eddy simulations", *Annual Rev. Fluid Mech.*, 2002, 34, pp. 349-374.
31. Piomelli U., Balaras E. "Wall-layer models for large-eddy simulations", *Annual Rev. Fluid Mech.*, 2002, 34, pp. 349-374.
32. Spalart, P.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow [Text] / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // *AIAA Paper*. – 1992. – № 0112. – P. 439 – 478.
33. Spalart, P. R., On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature [Text] / P.R. Spalart, M. Shur // *Aerospace science and technology Journal*. – 1997. – Vol. 1, No 5. – P. 297–366.
34. Шур М. Л. , Spalart P. R. , Strelets M. Kh., Travin A. K. Navier-Stokes simulation of shedding turbulent flow past a circular cylinder and a cylinder with a backward splitter plate // *Proceedings of the 3rd ECCOMAS CFD Conference, Paris, France, 9- 13 September 1996. - Chichester: John Wiley & Sons, 1996. - P. 676-682.*
35. Spalart P. R. , Joy W. H. , Strelets M. , Allmaras S. R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // *Proceedings 352 Список літератури of the 1 st AFOSR International Conference on DNS/LES, Ruston, Louisiana, 4-8 August 1 997. - Louisiana Technical University, 1997. - P. 137- 148.*
36. Spalart P. R. Strategies for turbulence modelling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. V. 21, No. 3. P. 252-263.
37. Sagaut P., Deck S., Terracol M. "Multiscale and multiresolution approaches in turbulence", *Imperial College Press*, 2006. – 340 p
38. Menter F. R., Schütze J., Gritskevich M. S. "Global vs. Zonal Approaches in Hybrid RANS-LES Turbulence Modelling. Hybrid RANS-LES Modelling", *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, 2012, 117, pp. 15–28.
39. Larsson J., Kawai S., Bodart J., Bermejo-Moreno I. "Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions", *Mechanical Engineering Reviews*, 2015, 00418.
40. Peng S.-H., Haase W., (Eds.) "Advances in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 2007 Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Corfu, Greece, 17–18 June 2007". *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, v. 97, 2008.
41. P. R. Spalart ·S. Deck ·M. L. Shur ·K. D. Squires, M. Kh. Strelets, A. Travin "A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities". *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* · July 2006- pp 181-195/

-
42. Peng S.-H., Doerffer P., Haase W., (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 3rd Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Gdansk, Poland, June 2009". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, v. 111, 2010.
43. Fu S., Peng S.-H., Haase W., Schwaborn D. (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 4th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, Beijing, China, September 2011". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, v. 117, 2012.
44. Girimaji S., Peng S.-H., Haase W., Schwaborn D. (Eds.) "Progress in Hybrid RANS-LES Modelling. Papers Contributed to the 5th Symposium on Hybrid RANS-LES Methods, College Station, A&M University, Texas, USA, 19-21 March 2014". Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design, v. 130, 2015.
45. Kok J. C., Dol H. S., Oskam B., van der Ven H. "Extra-large eddy simulation of massively separated flows", AIAA Paper, AIAA-2004-0264
46. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. "Sub-grid turbulence modeling for unsteady flow with acoustic resonance", AIAA Paper, AIAA-2000-0473.
47. Deck S. "Recent improvements in the Zonal Detached Eddy Simulation (ZDES) formulation", Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 2011, 26(6), pp. 523–550.
48. Piomelli U., Balaras E. "Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations", Annual Review of Fluid Mechanics, 2002, 36(1), pp. 505–374.
49. Shur M. L., Spalart P. R., Strelets M. K., Travin A. K. "A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modeled LES capabilities", International Journal of Heat and Fluid Flow, 2008, 29, pp. 1638-1649.
50. Terzi D., Frohlich J. "Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows", Progress in Aerospace Sciences, 2008, 44(5), pp. 349–377
51. Girimaji S., Sreenivasan R., Jeong E., "PANS Turbulence Model for Seamless Transition Between RANS, LES: Fixed-Point Analysis and Preliminary Results." FEDSM2003-45336, Proceedings of ASME 222 FEDSM'03 2003 4th ASME-JSME Joint Fluids Engineering Conferences, July 13-16, Honolulu, Hawaii USA, 2003.
52. Spalart P. R., Allmaras S. R. "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows", AIAA Paper, AIAA-1992-0439.
53. Menter F. R. "Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows", AIAA-Paper, AIAA-1993-2906.
54. Menter F. R., Kuntz M., Langtry R. "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model", Turbulence, Heat and Mass Transfer 4 (ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, M. Tummers), 2003, pp. 625 - 632
55. Forsythe J., Squires K., Wurtzler K., Spalart P. "Detached-eddy simulation of fighter aircraft at high alpha", AIAA Paper, AIAA -2002-0591