

УДК 539.3

В. А. Пасічник, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного моделювання Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара
Д. О. Гончаренко, магістр Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара
Я. А. Криницький, студент Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара

РОЗРАХУНОК ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ЗГИНУ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ ПЛАСТИН

Побудовано аналітичний та числові розв'язки задачі нелінійного циліндричного згину пластини рівномірним навантаженням за умови шарнірного закріплення її країв.

Построено аналитическое и численное решение задачи нелинейного цилиндрического изгиба пластины равномерной нагрузкой при шарнирном закреплении ее краев.

An analytical and numerical solution of the problem of nonlinear cylindrical bending plate under uniform load hinged securing its edges.

Ключові слова. Нелінійний циліндричний згин пластини, конструктивний елемент, аналітичні та числові розв'язки.

Вступ. Подальший розвиток різних галузей машинобудування передбачає широке застосування як конструктивних рішень пластин та стрижневих систем і таких конструкцій. Особливо важливий тип задач пов'язаний з урахуванням нелінійності крайових умов.

Широке застосування тонких пружних пластин як конструктивних елементів сучасних транспортних засобів ставить нові вимоги до їх міцності та надійності, а також потребує підвищення точності розрахунку напружено-деформованого стану таких конструкцій з урахуванням нелінійності процесів деформування. Проблеми врахування нелінійного характеру крайових умов у задачах розрахунку та дослідження напружено-деформованого стану таких систем присвячено значну кількість праць, в яких використовуються різні варіанти наближених аналітичних методів [1–6] і числових розрахунків [7–10].

Постановка проблеми. Нині особливий інтерес як з теоретичного, так і практичного поглядів становить розробка методів дослідження впливу нелінійного характеру деформування пластини. Зауважимо, що побудова і дослідження розв'язків нелінійних крайових задач циліндричного згину тонких пружних пластин дозволяє виявити ефекти, які не враховуються лінійними теоріями, що зумовлює їх актуальність.

Результати дослідження. Розглянемо задачу про згин довгої прямокутної пластини сталої товщини h із шарнірно опертими краями поперечним незмінним за її довжиною навантаженням. Вигнуту поверхню такої пластини можна вважати циліндричною, з віссю циліндра, паралельною до довжини пластини. Як координатну площину Oxy візьмемо середину поверхню пластини. Нехай вісь y збігається з одним із подовжніх країв пластини, додатним же напрямком осі z вважатимемо напрямок вниз. Ширину пластини позначимо l . У таких умовах пластина перебуває у стані так званого циліндричного згину [1], а дослідження її напружено-деформованого стану передбачає розрахунок елементарної смужки, вирізаної з пластини двома площинами, перпендикулярними до довжини пластини. Отже, прогин смужки описуємо таким нелінійним диференціальним рівнянням [4]:

© В. А. Пасічник, Д. О. Гончаренко, Я. А. Криницький, 2013

$$\frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ql}{2D}x + \frac{qx^2}{2D}. \quad (1)$$

Тут $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, де D – циліндрична жорсткість пластини під час згину;

E – модуль пружності матеріалу, ν – коефіцієнт Пуассона.

Крайові умови для рівняння (1):

$$w = 0, \text{ якщо } x = 0, l. \quad (2)$$

Застосовуючи методологію асимптотичного аналізу [6], вводимо безрозмірну величину:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad (3)$$

тоді рівняння (1) набуває вигляду:

$$\frac{\frac{d^2 w}{d\xi^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{d\xi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{ql}{2D}\xi + \frac{q\xi^2}{2D}, \quad (4)$$

а крайові умови:

$$w = 0, \text{ якщо } \xi = 0, 1. \quad (5)$$

Крайова задача (4)–(5) описує задачу нелінійного циліндричного згину пластини рівномірним навантаженням за умови шарнірного закріплення кінців.

Побудова аналітичного розв'язку. Для побудови аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку (4) за методикою [2] введемо позначення:

$$\begin{aligned} w'(\xi) &= u(\xi), \\ w''(\xi) &= u'(\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Також для спрощення викладу припустимо, що

$$k = \frac{q}{2D}. \quad (7)$$

З урахуванням цих позначень маємо нелінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{u'}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = k\xi^2 - k\xi, \quad (8)$$

яке розв'язуємо методом відокремлення змінних [8]:

$$\frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = (k\xi^2 - k\xi)d\xi. \quad (9)$$

Інтегруємо обидві частини рівняння (9):

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int (k\xi^2 - kl\xi)d\xi. \quad (10)$$

Інтеграл праворуч табличний, а той, що ліворуч, обчислюємо за допомогою тригонометричної підстановки:

$$u = \sin t, \quad du = \cos t dt, \quad (11)$$

тоді

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos t dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + c. \quad (12)$$

Отже, рівняння (8) має такий розв'язок:

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} &= k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + c_1, \\ u &= \frac{k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + c_1}{\sqrt{1 - \left(k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + c_1 \right)^2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Підставивши вихідні змінні (6), одержимо:

$$w' = \frac{k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + c_1}{\sqrt{1 - \left(k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + c_1 \right)^2}}. \quad (14)$$

Для знаходження інтегралу рівняння (14) скористаємося пакетом Mathematica. Як наслідок, маємо загальний розв'язок рівняння (4) у вигляді:

$$\begin{aligned} w = \xi &\left(k\xi^3 \left(\frac{36k^2 - 3k^2l\xi^2 - 6kc_1^2}{12k^4\xi^6} \right) \left(\frac{-36k^2 - 3k^2l\xi^2 - 6kc_1^2}{32k^4\xi^6(kl\xi^2 - 2c_1)} \right) \right) \times \\ &\sqrt{\frac{6k + k^2 - 31\xi^2 - 2\xi^3 - 6kc_1}{2k + k^2l\xi^2 - 2kc_1}} \sqrt{\frac{6k + k^2 - 31\xi^2 + 2\xi^3 + 6kc_1}{2k - k^2l\xi^2 + 2kc_1}} + c_2. \end{aligned} \quad (15)$$

Підставляючи розв'язок (15) в крайові умови (5), знаходимо:

$$c_1 = \frac{1}{2} (l-1), \quad c_2 = 0. \quad (16)$$

Отже, розв'язок крайової задачі (4), (5) такий:

$$w = \xi \left(k \xi^3 \left(\frac{36k^2 - 3k^2 l \xi^2 - 3k kl - 1^2}{12k^4 \xi^6} \right) \left(\frac{-36k^2 - 3k^2 l \xi^2 - 3k kl - 1^2}{32k^4 \xi^6 (kl \xi^2 - kl + 1)} \right) \right) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{6k + k^2 - 31\xi^2 - 2\xi^3 - 3k(kl - 1)}{2k + k^2 l \xi^2 - k(kl - 1)}} \sqrt{\frac{6k + k^2 - 31\xi^2 + 2\xi^3 + 3k(kl - 1)}{2k - k^2 l \xi^2 + k(kl - 1)}}}{\left(6\sqrt{36 - k^2 - 31\xi^2 - 2\xi^3}^2 + 6k - 31\xi^2 - 2\xi^3 (kl - 1) - 9(kl - 1)^2 \right) k \left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{l\xi^2}{2} \right) + \frac{1}{2}(kl - 1)}. \quad (17)$$

Побудова числового розв'язку. Зведемо нелінійне диференціальне рівняння другого порядку (5) до системи двох нелінійних рівнянь першого порядку з відповідними крайовими умовами:

$$\begin{cases} w'(x) = u(x), \\ \frac{u'(x)}{[1 + u^2(x)]^{3/2}} = kx^2 - klx. \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ w(l) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Таким чином, вихідна крайова задача зводиться до двох задач Коші, розв'язок яких знаходимо методом стрільби.

Задамо довільне значення $u(0) = \lambda$, де λ – деякий параметр. Отримаємо початкові умови для системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} u(0) = \lambda, \\ w(0) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Розв'язок задачі Коші (18), (20) побудуємо методом Рунге–Куты. Зведемо розрахункові формули методу Рунге–Куты 4-го порядку для даної задачі. Розбиваємо відрізок $[0, l]$ рівновіддаленими точками з кроком h :

$$h = \frac{l-0}{N}, N > 0, x_n = x_0 + nh, x_0 = 0, n = \overline{0, N}$$

та послідовно обчислюємо $w_n \approx w(x_n), u_n \approx u(x_n)$ за правилом:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{1}{6} K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)} ;$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6} M_1^{(n)} + 2M_2^{(n)} + 2M_3^{(n)} + M_4^{(n)} ,$$

де

$$K_1^{(n)} = hu_n ;$$

$$K_2^{(n)} = hu_n + \frac{M_1^{(n)}}{2} ;$$

$$\begin{aligned}
K_3^{(n)} &= hu_n + \frac{M_2^{(n)}}{2}; \\
K_4^{(n)} &= hu_n + \frac{M_3^{(n)}}{2}; \\
M_1^{(n)} &= hg(x_n, u_n); \\
M_2^{(n)} &= hg\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{M_1^n}{2}\right); \\
M_3^{(n)} &= hg\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{M_{21}^n}{2}\right); \\
M_4^{(n)} &= hg\left(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{M_3^n}{2}\right); \\
g(x, u(x)) &= (kx^2 - klx)(1 + u^2(x))^{3/2}.
\end{aligned}$$

Визначаємо $w_{n+1}, u_{n+1}; w_{n+2}, u_{n+2}; \dots w_n, u_n$. Одержуємо розв'язок, що залежить λ :

$$u(x) \equiv u(x, \lambda), w(x) \equiv w(x, \lambda).$$

Очевидно, що на правому кінці $x=l$, $w(l, \lambda) \neq 0$. Позначимо нев'язку другої із початкових умов (2.20) як

$$\varphi(\lambda) = w(l, \lambda)$$

та знайдемо значення параметра λ за умови, що

$$\varphi(\lambda) = 0. \tag{21}$$

Співвідношення (21) можна розглядати як для нелінійного рівняння.

Далі робимо “пробні постріли”, тобто задаємо довільні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ та обчислюємо відповідні $\phi(\lambda_1), \phi(\lambda_2), \dots, \phi(\lambda_n)$, доки не знайдуться такі сусідні λ_i, λ_{i+1} , де $\phi(\lambda_i)\phi(\lambda_{i+1}) < 0$. На цьому проміжку $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ уточнюємо корінь рівняння (21) методом простої ітерації. Знайшовши наближене значення кореня $\tilde{\lambda}$, знову розв'язуємо задачу Коші (18), (20), за умови, що $\lambda = \tilde{\lambda}$. Отриманий розв'язок і буде наближеним розв'язком вихідної крайової задачі.

Для перевірки отриманих результатів розв'язуємо вихідну задачу і в математичному пакеті Maple 7.

Висновки. Результати числових розрахунків прогину пластини на основі побудованого розв'язку (крива 1), числових методів Рунге–Кута 4-го порядку (крива 3) і пакета програм Maple (крива 2) показано на рис. 1.

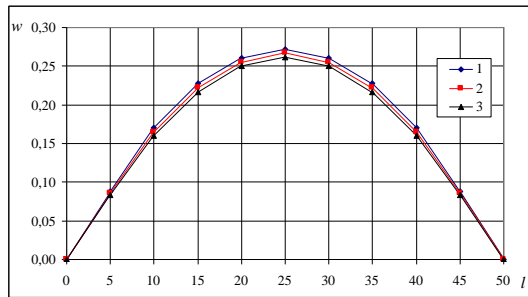


Рис. 1. Порівняльний аналіз результатів числових розрахунків

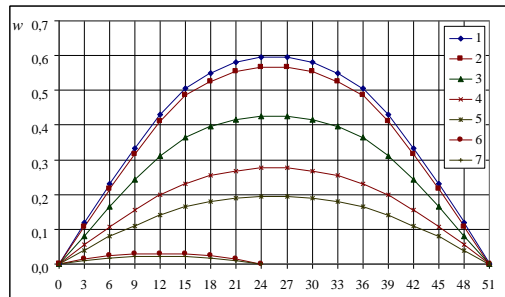


Рис. 2. Залежність прогину пластини для різних параметрів

Результати розрахунку залежності прогину пластини за шириною для різних значень геометрико-жорсткісних параметрів на основі отриманого аналітичного розв'язку наведено на рис. 2. Розрахунки виконано для таких значень параметрів: $q = 10^5 - 1,4 \cdot 10^5$ Н/м²; $E = 10^{11} - 2,1 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $l = 0,25$ м (криві 6, 7 для пластини товщиною $h = 0,01$ м та $0,015$ м); $l = 0,5$ м (криві 1–5 для пластини товщиною $h = 0,01$ м).

Порівнявши результати, отримані за допомогою побудованих аналітичного, числового та наближеного розв'язків, робимо висновок, що застосований числовий метод має порядок точності $O(h^3)$, а за допомогою математичного пакета отримали ближчий до аналітичного розв'язок з порядком точності $O(h^4)$. Аналіз числових результатів показує задовільну точність побудованого розв'язку задачі, а також можливість його застосування для розрахунків конструктивних елементів транспортних засобів, які працюють з навантаженнями в режимі циліндричного згину.

Література

1. Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости / Тимошенко С. П. – К. : Наукова думка, 1975. – 564 с.
2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / Вольмир А. С. – М. : Наука, 1967. – 984 с.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки / Вольмир А. С. – М. : Изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика / Каудерер Г. – М. : Изд-во иностранной лит., 1961. – 777 с.
5. Найфэ А. Введение в методы возмущений / Найфэ А. – М. : Мир, 1984 – 535 с.
6. Образцов И. Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. – М. : Машиностроение, 1991. – 416 с.
7. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций / Блейх Ф. – М. : Физматгиз, 1959. – 544 с.
8. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1964.
9. Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Попов Е. П. – М. : Гостехиздат, 1948. – 170 с.
10. Муницын А. И. Собственные колебания балки с нелинейными опорами / А. И. Муницын // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1998. – № 2. – С. 36–39.