

И. В. Левыкин, кандидат технических наук,
доцент кафедры медиасистем и технологий
Харьковского национального университета
радиоэлектроники

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПРОЦЕССА ВЫПУСКА ПОЛИГРАФИЧЕСКОЙ ПРОДУКЦИИ

Одной из проблем оперативного управления деятельностью предприятия является разработка математической модели его функционирования. Эта задача классическими методами из-за слабой формализации трудно реализуема. В статье с использованием теоретико-категорного аппарата разработаны математическая модель структуры и модель последовательности реализации компонентов жизненного цикла процесса выпуска продукции.

Однією з проблем оперативного управління діяльністю підприємства є розробка математичної моделі його функціонування. Проте через слабку формалізацію класичними методами це завдання важко реалізувати. У статті з використанням теоретико-категорного апарату розроблено математичну модель структури та модель послідовності реалізації компонентів життєвого циклу процесу випуску продукції.

One of the problems with the business of the company is to develop a mathematical model of its operation. This challenge conventional methods because of the weak formalization difficult to realize. In this paper, using category-theoretic apparatus, developed a mathematical model of the structure and sequencing of model components of the life cycle of the process output.

Ключевые слова. Категория, функтор, жизненный цикл, теоретико-категорный аппарат, морфизмы, структурированные множества.

Введение. Для реализации задач оперативного управления деятельностью полиграфического предприятия используются методы и модели структурного анализа, многокритериальной теории полезности, теории расписаний и т. д. [1, 2]. Однако эти методы слабо учитывают особенности производственных процессов полиграфических предприятий, характеристик печатной продукции. Поэтому проблему оперативного управления полиграфического предприятия и его подразделений рассматриваем в виде комплекса задач векторной оптимизации. Для их решения могут быть использованы различные методы, к которым относится метод лексикографической оптимизации, позволяющий учитывать векторную функцию оценки интегральной эффективности деятельности полиграфического предприятия с учётом взаимосвязи множества реализуемых задач и ограничений.

Постановка задачи. Эффективное управление такой сложной организационной системой, как полиграфическое предприятие, прежде всего, подразумевает разработку математической модели жизненного цикла (ЖЦ) процесса выпуска полиграфической продукции, который зависит от множества взаимосвязанных задач, влияющих на эффективность деятельности предприятия. В первую очередь, к ним относятся: формирование цели выпуска продукции (u), ориентированной на получение максимальной прибыли предприятий; определения оптимальной номенклатуры выпускаемой продукции (g) исходя из сформированной цели (u) потребности рынка и возможностей предприятия; формирование на основе выбранной номенклатуры (g) портфеля заказов (z) на выпуск продукции; формирование кадрового состава (s), участвующего в реализации заказов (z) как для предприятия в целом, так и для его отдельных

© И. В. Левыкин, 2013

подразделений; разработка технологий производства (n) под сформированный портфель заказов (z); определение необходимого оборудования (e) для реализации заказов (z) и разработанной технологии (n); организация производства выпуска продукции (v) в соответствии с заказами (z); определение оценки качества продукции (q); организация отгрузки готовой продукции (v) по отдельному заказу и заказам в целом (z). Кроме того, важными факторами, определяющими повышение качества выпуска продукции, а следовательно, и удовлетворение требований заказчика, является формирование мероприятий (m) требуемого качества продукции, которые влияют на формирование кадров (ms), разработку технологий производства (mn), формирование и функционирование оборудования (me), а также организацию производства выпуска продукции (mv). Фактически данные задачи определяют ЖЦ выпуска полиграфической продукции, структурная модель которой представлена на рис. 1.

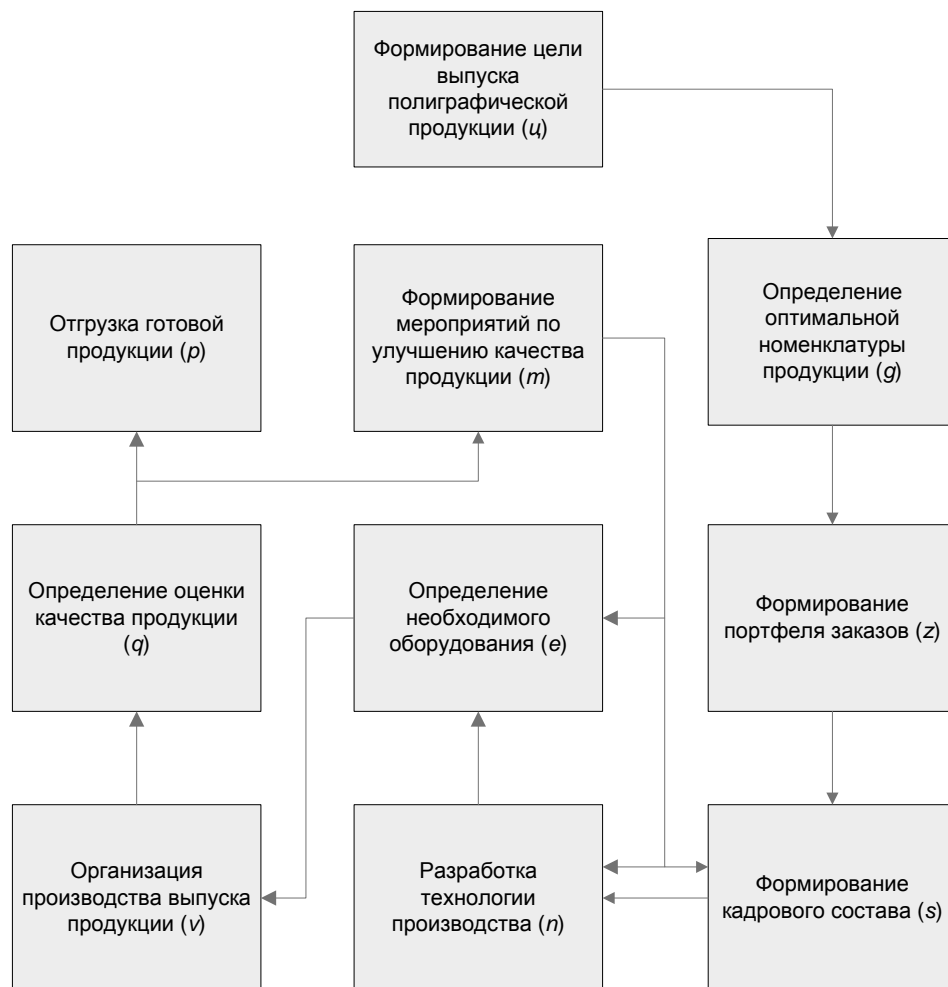


Рис. 1. Структурная модель жизненного цикла выпуска полиграфической продукции

Указанные задачи взаимосвязаны между собой, прежде всего, последовательностью их реализации. Так, например, задачи формирования цели определения номенклатуры продукции не могут решаться после задач управления качеством.

Результаты исследования. Разработка модели (ЖЦ) позволит описать организацию процесса функционирования полиграфического предприятия в целом, начиная с проведения необходимых маркетинговых исследований до управления качеством и сбытом продукции, что даст возможность оптимизировать процесс качественного управления предприятием в соответствии с представленными задачами.

Описание такой модели, учитывающей последовательность реализации задач по всем стадиям ЖЦ классическими математическими методами, из-за слабой формализации связей между ними крайне сложно, поэтому для этих целей используем теоретико-категорный аппарат [1–3].

Категория подразумевает проектирование объектов на некоторую совокупность “родственных” ей объектов и по свойствам проекций (отображений) позволяет определять внутреннюю структуру исследуемых объектов. В общем виде категорию можно представить совокупностью однозначных математических структур (объектов) и отображений между этими структурными (морфизмами), в которой выполняются ряд дополнительных условий (функциональность между объектами). Объектами категорий могут быть не только физические процессы (производственные, проектирования и т. д.), но и математические модели.

При использовании категорий существует инвариантность способов описания различных объектов, результаты которого не зависят от средств описания, объекты остаются целостными, а отображения, представленные морфизмами, позволяют сравнивать (сопоставлять) объекты и находить в них сходные (изоморфные) элементы (морфизмы должны быть функциональными). Категория считается определённой, если задан класс объектов, представленных структурированными множествами, а также множество морфизмов между ними.

В общем виде модель категории L изображена как объекты (процессы, задачи, функции) ObL и морфизмы $MorL$, описывающие связи между родственными объектами в следующем виде:

$$L = \langle ObL, MorL \rangle. \quad (1)$$

Для получения категорно-функторной модели жизненного цикла выпуска полиграфической продукции в соответствии с его структурой, представленной на рис. 1, определим категории $u, g, z, s, n, e, m, v, q, p$, объектами которых являются множества задач, реализуемых соответствующими элементами жизненного цикла выпуска продукции.

Рассмотрим процесс получения таких категорий. Для определения категорий целей выпуска продукции L^u зададим её множества объектов и соответствующих морфизмов. Объектами целей (u) являются: A^u – множество целей предприятий по выпуску продукции, B^u – множество целей цехов по выпуску продукции, C^u – множество целей по выпуску продукции участков.

Исходя из такого структурного распределения целей по выпуску продукции в рамках полиграфических предприятий множество целей цехов B^u распределено между множеством целей предприятий A^u таким образом, что каждому множеству целей A^u принадлежит определённый набор целей $B_{a^u}^u$ из множества B^u . Распределение множества целей B^u между множеством целей A^u ставится такое соответствие (отображение) F , когда с любым набором целей предприятий $a^u, a^u \in A^u$ сопоставляется как минимум определённый набор целей $b^u, b^u \in B^u$. Тогда распределение множества целей B^u среди множества целей A^u представим в следующем виде:

$$F_{B^u}^{A^u} \begin{cases} A^u \rightarrow 2^{B^u} \\ a^u \rightarrow B_{a^u}^u \end{cases}, \quad (2)$$

где 2^{B^u} – множество всех подмножеств целей B^u (булеан B^u), входящих во множество целей A^u , тогда

$$F_{B_{a^u}^u}^{A^u}(a^u) = B_{a^u}^u, \quad B_{a^u}^u \in B^u, \quad (3)$$

где $B_{a^u}^u$ – множество целей цеха, входящих во множество целей конкретного предприятия a^u , $a^u \in A^u$. По определению должно выполняться следующее условие:

$$B^u = \bigcup_{a^u \in A^u} B_{a^u}^u. \quad (4)$$

Это означает, что множество целей цехов B^u должно принадлежать множеству целей одного из предприятий a^u , $a^u \in A^u$ либо оно вообще не имеет прообраза. Следовательно, должно выполняться условие:

$$b^u \in B^u : /F^{-1}[b^u]/ \leq 1, \quad (5)$$

где F^{-1} – инверсия (преобразования) F .

По аналогии каждому множеству целей цехов B^u соответствует определённый набор целей участков C^u . Тогда распределение множества целей C^u между множеством B^u аналогично представим в виде следующего отображения:

$$F_{C^u}^{B^u} \begin{cases} B^u \rightarrow 2^{C^u} \\ b^u \rightarrow C_{b^u}^u \end{cases}, \quad (6)$$

где 2^{C^u} – множество всех подмножеств целей C^u (булеан C^u), входящее во множество целей B^u , тогда

$$F_{C_{b^u}^u}^{B^u}(b^u) = C_{b^u}^u, \quad C_{b^u}^u \in C^u, \quad (7)$$

где $C_{b^u}^u$ – множество целей задач цеха, входящих во множество целей конкретного предприятия b^u , $b^u \in B^u$. По определению должно выполняться следующее условие:

$$C^u = \bigcup_{b^u \in B^u} C_{b^u}^u. \quad (8)$$

Такое распределение означает, что множество целей C^u должно принадлежать множеству целей цехов b^u , $b^u \in B^u$. Это распределение F является инъективным отображением C^u в B^u , если каждый набор целей c^u есть образ только одного набора целей конкретного цеха b^u , $b^u \in B^u$ либо совсем не имеет прообраза, то есть

$$c^u \in C^u : /F^{-1}[c^u] / \leq 1. \quad (9)$$

Так как множество целей участков C^u в свою очередь входят во множество целей предприятий A^u , то распределение C^u в A^u представим следующим образом:

$$F_{C^u}^{A^u} = F_{B^u}^{A^u} \times F_{C^u}^{B^u}, \quad (10)$$

где * указывает композицию распределений.

Таким образом, введенные структурированные множества C^u, B^u, A^u и отображения $F_{C^u}^{A^u}, F_{B^u}^{A^u}, F_{C^u}^{B^u}$ являются элементами математической модели структуры целей предприятий в виде:

$$M^u = \langle A^u, B^u, C^u, F_{C^u}^{A^u}, F_{B^u}^{A^u}, F_{C^u}^{B^u} \rangle. \quad (11)$$

Для получения категорий целей выпуска продукции определим следующие морфизмы $\varphi_{A^u} : A^u \rightarrow A'^u, \varphi_{B^u} : B^u \rightarrow B'^u, \varphi_{C^u} : C^u \rightarrow C'^u$.

Структурированные множества целей C^u, B^u, A^u , образующие область целей D^u , являются составным элементом обобщающего множества целей предприятий D'^u со структурированными множествами C'^u, B'^u, A'^u при условии, что $D'^u \subset D^u$.

По определению категории такие морфизмы должны быть функциональными, что подтверждается коммутативными диаграммами верхнего уровня (рис. 2).

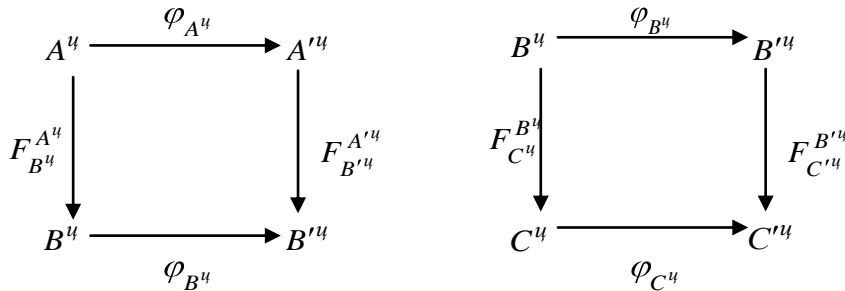


Рис. 2. Коммутативные диаграммы верхнего уровня

Описание коммутативных диаграмм верхнего уровня представлено соответствующими тождествами:

$$F_{B^u}^{A^u} * \varphi_{B^u} = \varphi_{A^u} * F_{B'^u}^{A'^u}, \quad F_{C^u}^{B^u} * \varphi_{C^u} = \varphi_{B^u} * F_{C'^u}^{B'^u}.$$

При этом внутренние связи между структурированными множествами C^u, B^u, A^u , в D^u , сохраняются и в D'^u вследствие их функционального назначения, а следовательно, выполняется условие определения морфизмов.

Таким образом, используя введенные структурированные множества целей предприятий

(A^u, B^u, C^u) вместе с заданными морфизмами $(\varphi_{A^u}, \varphi_{B^u}, \varphi_{C^u})$, образуют категорную модель целей по выпуску продукции полиграфических предприятий в следующем виде:

$$L^u = \langle A^u, B^u, C^u, \varphi_{A^u}, \varphi_{B^u}, \varphi_{C^u} \rangle. \quad (12)$$

Цель выпуска продукции предприятиями и их подразделениями, прежде всего, связана с определением выбора номенклатуры выпуска продукции g . Для получения категории номенклатуры g введём следующие структурированные множества: A^g – множество видов продукции, выпускаемой предприятиями; B^g – множество видов продукции, выпускаемой цехами; C^g – множество видов продукции, выпускаемой участками.

По аналогии, используя введённые структурированные множества, определим между ними связи в виде отображения:

$$F_{B^g}^{A^g} \begin{cases} A^g \rightarrow 2^{B^g} \\ a^g \rightarrow B_{a^g}^g \end{cases}, \quad (13)$$

где 2^{B^g} – множество всех подмножеств видов продукции предприятий распределено на всё множество видов продукции цехов. При этом должны выполняться условия:

$$F_{B^g}^{A^g}(a^g) = B_{a^g}^g, B_{a^g}^g \in B^g. \quad (14)$$

Такое отображение (13) означает принадлежность видов продукции цехов B^g к множеству видов продукции конкретного предприятия a^g , что является инъекцией. Таким образом,

$$b^g \in B^g : /F^{-1}[b^g]/ \leq 1. \quad (15)$$

По аналогии установим связь между видами продукции цехов B^g и участками C^g следующим отображением:

$$F_{C^g}^{B^g} \begin{cases} B^g \rightarrow 2^{C^g} \\ b^g \rightarrow C_{b^g}^g \end{cases}. \quad (16)$$

При выполнении аналогичных условий

$$F_{C^g}^{B^g}(b^g) = C_{b^g}^g, C_{b^g}^g \in C^g, \quad (17)$$

$$C^g = \bigcup_{b^g \in B^g} C_{b^g}^g, \quad (18)$$

$$c^g \in C^g : /F^{-1}[c^g]/ \leq 1. \quad (19)$$

Используя введённые структурированные множества и полученные отображения, получим математическую модель структуры видов продукции предприятий в виде:

$$M^g = \langle A^g, B^g, C^g, F_{B^g}^{A^g}, F_{C^g}^{B^g}, F_{C^g}^{A^g} \rangle. \quad (20)$$

Для получения категории видов продукции предприятия по аналогии введём следующие морфизмы: $\varphi_{A^g} : A^g \rightarrow A'^g$, $\varphi_{B^g} : B^g \rightarrow B'^g$, $\varphi_{C^g} : C^g \rightarrow C'^g$.

По определению такие морфизмы должны быть функциональными, что подтверждается коммутативными диаграммами нижнего уровня (рис. 3).

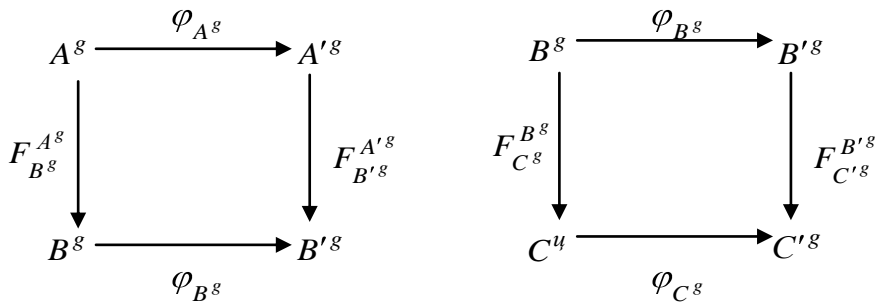


Рис. 3. Коммутативные диаграммы нижнего уровня

Описания коммутативных диаграмм нижнего уровня представлены соответствующими тождествами:

$$F_{B^g}^{A^g} * \varphi_{B^g} = \varphi_{A^g} * F_{B'^g}^{A'^g}, \quad F_{C^g}^{B^g} * \varphi_{C^g} = \varphi_{B^g} * F_{C'^g}^{B'^g}.$$

По аналогии внутренние связи между структурированными множествами выпуска видов продукции предприятий сохраняются в обобщённом множестве видов продукции, следовательно, выполняется условие определения морфизмов.

По определению категории структурированные множества A^g, B^g, C^g и морфизмы $\varphi_{A^g}, \varphi_{B^g}, \varphi_{C^g}$ образуют категорию (модель) выпуска видов продукции полиграфического предприятия в следующем виде:

$$L^g = \langle A^g, B^g, C^g, \varphi_{A^g}, \varphi_{B^g}, \varphi_{C^g} \rangle. \quad (21)$$

Описание связи множества целей предприятия и его подразделений по выпуску номенклатуры продукции с определением изделий, которые должны выпускаться, считается невозможным, однако с использованием понятия функтора эта проблема может быть разрешена. По определению функтор описывает связи между структурированными множествами и морфизмами категорий L^u и L^g при условии функциональности их объектов ObL^g, ObL^u и морфизмов $MorL^u, MorL^g$. Функциональность связи категорий целей и номенклатуры выпуска объясняется соответствием выбора определения таких целей функционирования деятельности предприятия, которые однозначно должны быть реализованы в виде выпуска определённой номенклатуры полиграфической продукции. Поэтому такую взаимосвязь между введенными категориями L^u и L^g опишем соответствующим функтором:

$$\Phi_{L^g}^{L^u} : L^u \Rightarrow L^g. \quad (22)$$

Функтор представлен отображением категории L^u в категорию L^g , согласованным со структурой этих категорий. Объекты категории ObL^u отображаются в объектах категории ObL^g , а морфизмы категории $MorL^u$ отображаются в морфизмах категории $MorL^g$. В результате их функциональности ($ObL^u \rightarrow ObL^g$, $MorL^u \rightarrow MorL^g$) при выполнении двух условий:

Ф1. Для каждого объекта $U \in ObL^u$, $\Phi(1_U) = 1_{\Phi(U)}$ (единичный модуль);

Ф2. Для любых морфизмов $\varphi_{A^u} : A^u \rightarrow A^u$, $\varphi_{B^u} : B^u \rightarrow B^u$ из $MorL^u$

$$\Phi(\varphi_{A^u} \varphi_{B^u}) = \Phi(\varphi_{A^u}) \times \Phi(\varphi_{B^u}).$$

Обоснованность формализации связи между категориями L^u и L^g функтором (22) определяется функциональностью морфизмов этих категорий.

По аналогии, введя категории $L^u, L^g, L^z, L^s, L^n, L^e, L^v, L^q, L^p, L^m$ и соответствующие функторы, получим математическую модель структуры ЖЦ выпуска продукции:

$$M_{ЖЦ} = \langle L^u, L^g, L^z, L^s, L^n, L^e, L^v, L^q, L^p, L^m, \Phi_{L^g}^{L^u}, \Phi_{L^z}^{L^g}, \Phi_{L^s}^{L^z}, \Phi_{L^n}^{L^s}, \Phi_{L^e}^{L^n}, \Phi_{L^v}^{L^e}, \Phi_{L^q}^{L^v}, \Phi_{L^p}^{L^q}, \Phi_{L^m}^{L^p} \rangle. \quad (23)$$

Последовательность стадий ЖЦ опишем математической моделью в виде составного функтора:

$$\Phi_{L^m}^{L^u} = \Phi_{L^g}^{L^u} * \Phi_{L^z}^{L^g} * \Phi_{L^s}^{L^z} * \Phi_{L^n}^{L^s} * \Phi_{L^e}^{L^n} * \Phi_{L^v}^{L^e} * \Phi_{L^q}^{L^v} * \Phi_{L^p}^{L^q} * \Phi_{L^m}^{L^p}. \quad (24)$$

Выводы. Таким образом, получены математические модели структур отдельных стадий (компонентов) всего ЖЦ процесса выпуска полиграфической продукции. Кроме того, получено формализованное описание связей между стадиями ЖЦ в виде составного функтора, что в последующем позволяет перейти к структуризации функциональных задач, а также административным и производственным бизнес-процессам.

Литература

1. Подчасова Т. П. Управление в иерархических производственных структурах / Подчасова Т. П., Лагода А. П., Рудницкий В. Ф. // Институт кибернетики АН УССР. – К. : Наукова думка, 1989. – 184 с.
2. Шкурба В. В. Планирование и управление в автоматизированном производстве / Шкурба В. В., Белецкий С. А., Ефетова К. Ф. – К. : Наукова думка, 1985. – 224 с.
3. Шрейдер Ю. А. Системы и модели / Ю. А. Шрейдер, А. А. Шаров. – М. : Радио и связь, 1982. – 152 с.
4. Цаленко М. Ш. Основы теории категорий / М. Ш. Цаленко, Е. Г. Шульгейфер. – М. : Наука, 1974. – 256 с.
5. Букур Н. Введение в теорию категорий и функторов / Н. Букур, А. Деляну. – М. : Мир, 1972. – 259 с.