

Список використаних джерел:

1. Ланин В. Онтологии как основа функционирования систем обработки электронных документов / В. Ланин // Материалы конференции с международным участием “Знания-Онтологии-Теории (ЗОНТ-09)”. – Новосибирск, 2009. – Т. 2. – С. 173–177.
2. Мерзляков Д. А. Генерация регулярных выражений для автоматизации проверки тестов открытого характера [Электронный ресурс] : материалы 5-й международной студенческой электронной научной конференции “Студенческий научный форум” – 15.02–31.03, 2013. / Д. А. Мерзляков. – Режим доступа : <http://www.scienceforum.ru/2013/147/2470>
3. Ефремов В. Search 2.0: огонь по “хвостам” / В. Ефремов // Открытые системы. СУБД. – 2007. – № 8. – С. 72–74.
4. Захарова И. В. Об одном подходе к реализации семантического поиска документов в электронных библиотеках / И. В. Захарова // Вестник УГАТУ. – 2009. – Т. 12. – № 1 (30): Серия “Управление, вычислительная техника, информатика”. – С. 133.
5. Takeda H. Collaborative development and Use of Ontologies for Design / H. Takeda, M. Takaai, T. Nishida // Proceedings of the Tenth International IFIP WG 5.2/5.3 Conference PROLAMAT 98. – Trento, Italy. – September 9–12.
6. Guarino N. OntoSeek: Content-Based Access to the Web / N. Guarino, C. Masolo, G. Vetere // IEEE Intelligent Systems. – May/June 1999. – P. 70–80.
7. Гаврилова Т. А. Онтологический подход к управлению знаниями при разработке корпоративных информационных систем / Т. А. Гаврилова // Новости интеллекта. – 2003. – № 2. – С. 24–30.



УДК 519.6

О. В. Трофімов, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри транспортних систем та технологій Університету митної справи та фінансів

ЗАСТОСУВАННЯ ЛОКАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ФУР’Є ДЛЯ КОНСТРУЮВАННЯ БАГАТОСІТКОВИХ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ ПРУЖНИХ ТА ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ШАРУВАТИХ ОСНОВ

Проаналізовано можливості сучасного локального аналізу Фур’є для конструювання робастних багатосіткових алгоритмів розв’язання пружних і пружнопластичних граничних задач для шаруватих основ.

Ключові слова: багатосіткові методи; алгоритм корекції на грубих сітках; локальний аналіз Фур’є; шаруваті основи.

Features of modern Local Fourier Analysis for constructing of robust Coarse Grid Correction Cycle Multigrid Algorithm for layered basis elastic and elasto-plastic boundary value problems were analyzed.

Key words: multigrid methods; coarse grid correction cycle; local Fourier analysis; layered basis.

© О. В. Трофімов, 2015

Постановка проблеми. Запропонований ще на початку 60-х р. ХХ ст. Р. П. Федоренком багатосітковий ітераційний метод для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь [1], отриманих у результаті дискретизації граничних задач для диференційних (інтегральних, інтегро-диференційних) рівнянь, набув поширення наприкінці ХХ – на початку ХХІ століття. Дотепер цей метод вважається одним з найефективніших для розв'язання, зокрема, еліптичних граничних задач, забезпечуючи отримання наближеного розв'язку “на рівні похибки апроксимації” за число арифметичних операцій, що є пропорційним числу невідомих у системі рівнянь. Така висока ефективність методу пояснюється насамперед використанням певних особливостей систем (лінійних) рівнянь, отриманих у результаті дискретизації диференційних граничних задач, зокрема їх спектральних властивостей.

Сучасні багатосіткові методи складаються із взаємодіючих обчислювальних процедур: релаксаційних схем, проектування нев'язки у простір меншої розмірності, прямих методів розв'язання системи на найгрубішій сітці, інтерполяції поправок на дрібніші сітки тощо. Власне багатосітковий метод характеризується набором певних параметрів, що визначають тип, спосіб виконання та взаємодії таких процедур. Досвід застосування багатосіткових методів показує, що для певних класів задач та методів дискретизації, які становлять значний практичний інтерес, і в котрих, зокрема, проявляється фізична та геометрична анізотропія та неоднорідність, досягнення стандартної ефективності багатосіткових методів можливо лише за ретельного “налагодження” низки таких параметрів. Звичайно, для кожного конкретного класу задач проблема налагодження має розв'язуватись окремо. Для полегшення подолання цієї проблеми наприкінці 1970-х рр. був запропонований так званий локальний аналіз гармонік (або локальний аналіз Фур'є), певним чином подібний до аналізу стійкості нестационарних різницевих схем для гіперболічних і параболічних диференційних задач [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Перші згадки про можливість використання такого аналізу з'явилися у працях А. Брандта [3]; метод аналізу в подальшому розвинув В. Хакбуш [4] та інші дослідники [5]. Остання монографія, присвячена локальному аналізу Фур'є, була опублікована у 2005 р. [6], в якій також містилося посилання на певне програмне забезпечення для цього аналізу. На жаль, робота зі створення такого забезпечення не була доведена до логічного кінця.

Суть локального аналізу Фур'є полягає у наближеній заміні скінченної розрахункової області нескінченною, неоднорідних коефіцієнтів диференційної задачі – однорідними (тобто розглядається задача з постійними коефіцієнтами), нерівномірної сітки – рівномірною. Зрозуміло, що з таким спрощенням ми нехтуємо ефектами впливу скінченності реальної розрахункової області на хід обчислювального процесу, а також ефектами впливу граничних умов. У рамках цього аналізу дискретні аналоги диференційного оператора (а також операторів релаксаційної схеми, проектування, інтерполяції та інших складових багатосіткового методу) застосовуються до елементів множини дискретних власних функцій, визначених на нескінченній рівномірній сітці. Дії таких операторів являють собою певні лінійні перетворення у просторі спеціально визначених вектор-функцій. Загальний оператор багатосіткового методу є також лінійним перетворенням у цьому просторі, і його матриця виражається через матриці лінійних перетворень операторів відповідних процедур – складових частин багатосіткового методу. Локальний аналіз Фур'є фактично є дослідженням спектра такої матриці багатосіткового методу, обчисленої для всіх компонент Фур'є – власних функцій дискретизованого оператора.

На практиці насамперед цікавляться одним параметром – показником збіжності алгоритму, який у даному аналізі представляється верхньою границею спектрального радіуса матриці загального оператора багатосіткового алгоритму, що взята по всій множині компонент Фур'є.

Мета статті – дослідження ефективності (і взагалі доцільності) застосування локального аналізу Фур'є для конструювання ефективних багатосіткових алгоритмів на прикладі певного класу пружних і пружнопластичних задач антипоскої деформації шаруватих пакетів.

Виклад основного матеріалу.

1. Задача антипоскої деформації шаруватого пакета. Розглянемо задачу антипоскої деформації багатосарового прямокутного у розрізі пружного пакета (рис. 1).

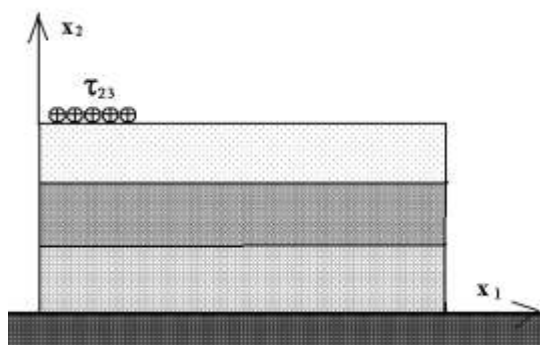


Рис. 1. Багатосаровий пружний пакет.
Вісь x_3 направлена перпендикулярно площині рисунка

Оскільки деформація антипоска, тільки компонента u_3 переміщення відмінна від нуля і залежить від координат x_1 та x_2 : $u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Відмінними від нуля компонентами тензора напружень будуть

$$\sigma_{13} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

де $\mu = \mu(x_1, x_2)$ – локальний модуль зсуву. Якщо пакет складається з однорідних матеріалів, цей модуль є кусочно-сталюю функцією (окремий модуль для кожного шару пружного пакета), тобто $\mu(x_1, x_2) = \mu_i$, якщо точка (x_1, x_2) належить до i -го шару пакета. У випадку пружнопластичної деформації в рамках моделі Генкі–Надаї–Іл'юшина [7]

$$\mu = \mu(u_3) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2}{3}},$$

де $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ – задана функція залежності інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій.

Задача розрахунку пакета полягає у знаходженні невідомої функції $u = u_3(x_1, x_2)$, що задовольняє в області Ω диференціальне співвідношення

$$Lu = F, \quad (1)$$

де диференціальний оператор $L(\cdot)$ виражається як

$$L(\cdot) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_2} \right). \quad (2)$$

Граничні умови на верхній грані пакета, як правило, задаються у напруженнях, а на бокових та нижній грані – у переміщеннях або напруженнях

$$\begin{aligned} \tau_{i3}(x_1, x_2) &= T(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in S_\tau, i = 1, 2, \\ u_3(x_1, x_2) &= u(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in S_u, S = \partial\Omega = S_\tau \cup S_u. \end{aligned} \quad (3)$$

Для дискретизації задачі застосуємо метод Бубнова–Гальоркіна з лагранжевими прямокутними скінченними елементами першої степені. Варіаційне (гальоркінське) формулювання задачі (1)–(3) має вигляд: знайти функцію $u(x_1, x_2) \in H^1(\Omega)$, що задовольняє співвідношення

$$L(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), v(x_1, x_2) = 0, (x_1, x_2) \in S_u. \quad (4)$$

Білінійна форма $L(u, v)$ (у випадку пружнопластичної задачі форма лінійна тільки за другим аргументом v) та лінійний функціонал $f(v)$ виражаються як

$$L(u, v) = \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) d\Omega,$$

$$f(v) = \int_{S_\tau} T \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} F v d\Omega,$$

n – вектор зовнішньої нормалі до границі області Ω .

Дискретизацію проведемо на рівномірній сітці Ω_h , що характеризується векторним параметром $h = (h_1, h_2)$ – кроком сітки вздовж координатних осей. У результаті дискретизації диференціальна задача (1)–(3) замінюється дискретною задачею знаходження невідомої функції $u^h \in \Omega_h$, що задовольняє систему рівнянь

$$L^h u^h = F^h, \quad (5)$$

де L^h – дискретизована “версія” диференційного оператора L , F^h – вектор правих частин системи. У випадку пружної задачі дискретний оператор L^h є лінійним, а для пружно-пластичної задачі застосовуються певні схеми лінеаризації (метод фіктивних навантажень, змінних параметрів пружності тощо).

2. Багатосітковий метод та його складники. Для розв’язання задачі (5) за допомогою багатосіткового методу її визначають не на одній сітці, а на послідовності просторових сіток Ω_{hk} з параметрами дискретизації h_0, h_1, \dots, h_K . Індекс “0” відповідає найкрупнішій сітці (сітці найнижчого рівня), індекс “K” – найдрібнішій (сітці найвищого рівня). Тобто замість дискретизованої задачі (5) ми маємо послідовність задач

$$L^k u^k = F^k, \quad u^k \in \Omega_{hk}, \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (6)$$

Основою будь-якого багатосіткового алгоритму є так званий *цикл уточнення наближеного розв’язку* рівняння (6) *на грубих сітках* (Coarse-Grid Correction Cycle, CGC-Cycle, CGC-алгоритм) [1], який визначається рекурсивно в такий спосіб.

Алгоритм **CGC_CYCLE**($k, u_k^{(0)}, \gamma$)

// k – рівень сітки Ω_{hk} , $u_k^{(0)}$ – початкове наближення, γ – параметр циклу.

Begin

1. Якщо $k = 0$, рівняння (6) розв’язується прямим методом. У результаті розв’язку отримується величина $u_k^{(1)}$. Перейти до п. 9.

2. (Пре-релаксація). Провести ν_1 згладжувальних ітерацій за формулою

$$\tilde{u}_k^{(0)} \leftarrow S_k^{\nu_1} u_k^{(0)},$$

де S_k – оператор релаксаційної схеми.

3. Обчислення нев’язки за формулою

$$r^k \leftarrow L^k \tilde{u}_k^{(0)} - F^k.$$

4. Проектування нев’язки на грубу сітку (рівня на одиницю нижче)

$$r^{k-1} \leftarrow R_k^{k-1} r^k,$$

де R_k^{k-1} – оператор проектування з дрібної сітки на грубішу.

5. Обчислення та уточнення вектора поправки e^{k-1} на грубій сітці, тобто наближеного розв'язання рівняння

$$L^{k-1} e^{k-1} = r^{k-1}, \quad (7)$$

рекурсивно за допомогою цього ж алгоритму, починаючи з нульового початкового наближення

$$\tilde{e}_k^{(0)} \leftarrow 0.$$

$$\text{For } i \leftarrow 1 \text{ to } \gamma \text{ do } \tilde{e}_{k-1}^{(i)} \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(k-1, \tilde{e}_{k-1}^{(i-1)}, \gamma).$$

6. Інтерполяція отриманої поправки $\tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)}$ на дрібну сітку (рівня на одиницю вище)

$$e^k \leftarrow P_{k-1}^k \tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)},$$

де P_{k-1}^k – оператор інтерполяції з грубої сітки на дрібнішу.

7. Корекція

$$u_k^{(1)} \leftarrow u_k^{(0)} + e^k.$$

8. (Пост-релаксація). Проведення додаткових ν_2 згладжувальних ітерацій за формулою

$$u_k^{(1)} \leftarrow S_k^{1/2} u_k^{(1)}.$$

9. Повернути результат $u_k^{(1)}$.

End

Залежно від значення параметра γ в алгоритмі CGC_CYCLE розрізняють V-цикл ($\gamma = 1$) та W-цикл ($\gamma = 2$).

Основною характеристикою “якості” сформульованого алгоритму є показник зменшення норми похибки ρ , що задовольняє співвідношення

$$\|u_k^{(1)} - u_k\| \leq \rho \|u_k^{(0)} - u_k\|, \quad (8)$$

де u_k – точний розв'язок задачі (6) на рівні k .

Для побудови конкретного багатосіткового алгоритму найважливіші такі фактори.

1. Спосіб побудови ієрархії сіток, на яких ми розв'язуємо задачі (6), (7).
2. Тип і спосіб формування операторів, що фігурують в алгоритмі CGC_CYCLE.

На практиці для формування багаторівневої системи сіток спочатку визначають розміри найгрубішої сітки (на рівні $k = 0$), а потім застосовують певні схеми подрібнення.

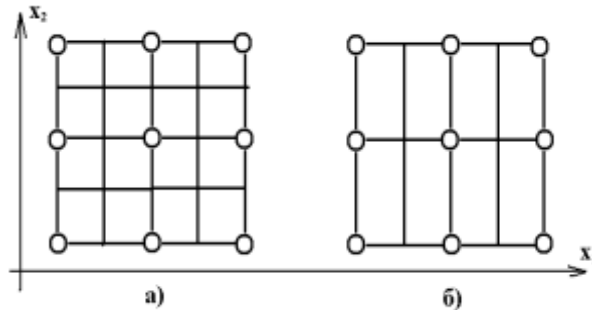


Рис. 2. Схеми подрібнення. Стандартне подрібнення (а); анізотропне подрібнення вздовж напрямку x_1 (б). Вузли грубішої сітки позначені колами

Як правило, використовується стандартне подрібнення (рис. 2а), коли крок сітки зменшується вдвічі вздовж обох координатних осей; інколи застосовують анізотропне подрібнення (semi-coarsening), коли сітка подрібнюється лише в одному з напрямків (рис. 2б). Спосіб подрібнення визначає насамперед оператори інтерполяції та проектування, а також побудову сіткових операторів нижчого рівня через оператори вищого рівня.

Розглянемо тепер основні оператори – складові частини ітераційного процесу описаного алгоритму корекції наближеного розв'язку. Обговорення властивостей усієї низки таких операторів виходить за рамки даної роботи, тому лише коротко перелічимо ті з них, які використовувались у даному дослідженні, відсилаючи за подробицями до монографії [6].

А. Ключову роль відіграє *оператор релаксації* S_k . Його роль полягає у суттєвому зменшенні високочастотних компонент похибки наближеного розв'язку, залишаючи обчислення низкочастотних складників грубим сіткам. У даному дослідженні використовувались такі релаксаційні схеми.

1. Точкова релаксація Якобі.
2. Точкова релаксація Гауса–Зейделя (впорядкування невідомих у напрямку “схід-захід”, тобто вздовж осі x_1).
3. Точкова релаксація Гауса–Зейделя (впорядкування невідомих у напрямку “південь-північ”, тобто вздовж осі x_2).
4. “Шахівниця” Якобі (спочатку релаксація “парних” вузлів, а потім “непарних”, застосовуючи оновлені “парні” значення).
5. “Шахівниця” Гауса–Зейделя “схід-захід”.
6. “Шахівниця” Гауса–Зейделя “південь-північ”.
7. Релаксація Якобі з одночасним оновленням змінних на x_1 -лінії (x_1 -лінія Якобі).
8. Релаксація Якобі з одночасним оновленням змінних на x_2 -лінії (x_2 -лінія Якобі).
9. x_1 -лінія Гауса–Зейделя.
10. x_2 -лінія Гауса–Зейделя.
11. x_1 -“зебра” (спочатку оновлюються “парні” x_1 -лінії, а потім – “непарні”).
12. x_2 -“зебра” (аналогічно для x_2 -ліній).

Б. Оператор інтерполяції P_{k-1}^k з грубої сітки (рівня $k-1$) на дрібнішу (рівня k). Для вибраних скінченних елементів застосовується стандартна білінійна інтерполяція, притаманна цьому типу скінченного елемента.

В. Оператор проектування P_{k-1}^k у сітковий простір меншої розмірності (тобто на грубішу сітку). Застосовуються звичайний спряжений оператор до оператора інтерполяції P_{k-1}^k .

Г. Різницевий аналог L^k диференційного оператора L на грубих сітках ($k = 0, 1, \dots, K-1$); див. рівняння (7). Згідно з методом дискретизації (4), (5) природньо викорисовувати так зване “гальоркінське” визначення через оператори P_{k-1}^k та R_k^{k-1} за формулою

$$L^{k-1} = R_k^{k-1} L^k P_{k-1}^k. \quad (9)$$

3. Локальний аналіз Фур’є (загальний огляд). Як уже було згадано у введенні, локальний аналіз Фур’є базується на таких положеннях.

1. Задача (6) розглядається на послідовності нескінченних просторових сіток Ω_{hk} .
2. Оператори L^k вважаються лінійними з постійними коефіцієнтами на множині сіткових функцій, що визначені на множині точок Ω_{hk} .
3. На кожній сітці розглядається система сіткових функцій

$$\varphi_{hk}(\theta, x) = \prod_{j=1}^2 \exp\left(i\theta_j x_j / h_j^{(k)}\right), \quad \theta = (\theta_1, \theta_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_{hk}, \quad (10)$$

які називаються *гармоніками* або *компонентами Фур’є*. Параметри (θ_1, θ_2) називають *частотами* відповідної гармоніки. Множина всіх гармонік для $|\theta| = \max\{|\theta_1|, |\theta_2|\} \leq \pi$ становить повну систему функцій на множині всіх обмежених сіткових функцій. Простір, натягнутий на всі такі функції, називається також *простором Фур’є*:

$$\mathfrak{S}_k = \text{span}\{\varphi_{hk}(\theta, x) : \theta \in \Theta = (-\pi, \pi]^2, x \in \Omega_{hk}\}. \quad (11)$$

Зрозуміло, що в силу припущення 2 компоненти Фур’є будуть власними функціями дискретизованого лінійного оператора L^k . Власні числа відповідних гармонік $\tilde{L}^k(\theta)$ називають ще *Фур’є-символами* оператора L^k . Проте не для всіх операторів – компонент багатосіткового алгоритму гармоніки будуть власними функціями. Більше того, деякі оператори, наприклад оператор проектування R_k^{k-1} , переводять множину функцій, визначених на сітці Ω_{hk} , у зовсім іншу множину функцій, взагалі визначених на зовсім іншій сітці Ω_{hk-1} . Постає проблема визначення простору функцій, який був би інваріантним відносно перетворень, що здійснюються всіма операторами – компонентами багатосіткового алгоритму. Елегантний розв’язок цієї проблеми був даний на початку ХХІ ст. [5].

По-перше, множину всіх частот $\Theta = (-\pi, \pi]^2$ поділяємо на дві підмножини: “низьких” $\Theta_{2h} = \Theta_{\text{low}} = (-\pi/2, \pi/2]^2$ та “високих” $\Theta_{\text{high}} = \Theta \setminus \Theta_{2h}$ (ми розглядаємо лише стандартне подрібнення сітки; для інших типів подрібнення визначення низьких і високих частот дещо відрізняються). Відповідні компоненти Фур’є утворюють простір низькочастотних та високочастотних гармонік. Виявляється, що низькочастотні гармоніки на сітці з параметром h_k є “непоганим наближенням” для всіх гармонік на сітці $h_{k-1} = 2h_k$. Кажуть, що низькочастотні гармоніки “добре видні” на грубій сітці $\Omega_{h_{k-1}}$. Високочастотні компоненти похибки наближеного розв’язку задачі (2) ефективно подавляються в процесі релаксації, а низькочастотні обробляються засобами грубих сіток у процесі реалізації багатосіткового алгоритму.

Така ідея поділу множини гармонік розв’язує одну частину проблеми: замість розгляду множини гармонік \mathfrak{T}_{k-1} на сітці $\Omega_{h_{k-1}}$ розглядають множину низькочастотних гармонік на сітці Ω_{h_k} .

По-друге, для забезпечення інваріантності перетворень гармонік у процесі багатосіткового алгоритму вводять простір вектор-функцій, визначених на сітці Ω_{h_k} :

$$\mathfrak{T}_k^{2h}(\theta) = \text{span}\{\varphi_{hk}(\theta^\alpha, x) \mid \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \alpha_j \in \{0, 1\}, j=1, 2\}, \quad (12)$$

$$\theta = \theta^{(0,0)} \in \Theta_{2h}, \quad \theta^\alpha = \theta^{(0,0)} - (\alpha_1 \text{sign}(\theta_1), \alpha_2 \text{sign}(\theta_2))\pi, \quad x \in \Omega_{h_k}.$$

Кожна з компонент вектор-функції цього простору визначається мультиіндексом $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$; перенумерувати ці компоненти можна, розташувавши у певному порядку всі значення мультиіндексу, наприклад так:

$$(0,0), (1,1), (1,0), (0,1). \quad (13)$$

Графічне зображення частот відповідних компонент означеної вектор-функції наведено на рис. 3.

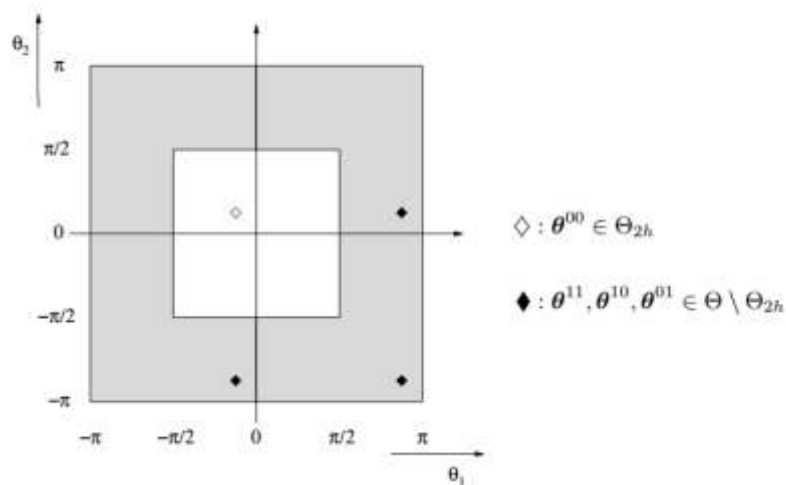


Рис. 3. Графічне зображення частот компонент вектор-функції, що належить інваріантному простору $\mathfrak{T}_k^{2h}(\theta)$

У просторі $\mathfrak{S}_k^{2h}(\theta)$ можна виділити такі основні функції:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{hk}(\theta^{(0,0)}, x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{hk}(\theta^{(1,1)}, x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_{hk}(\theta^{(1,0)}, x) \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_{hk}(\theta^{(0,1)}, x) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Низькочастотні гармоніки в цій системі представляє функція φ_1 , решта являє собою високочастотні компоненти. Будь-яка вектор-функція $\varphi(\theta, x) \in \mathfrak{S}_k^{2h}(\theta)$ виражається як лінійна комбінація базисних функцій

$$\varphi = \sum_{j=1}^4 \beta_j \varphi_j, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Введення у розгляд простору вектор-функцій (12) розв'язує другу частину сформульованої проблеми аналізу: простір $\mathfrak{S}_k^{2h}(\theta)$ виявляється інваріантним відносно відображень, що задаються операторами – складовими частинами багатосіткового алгоритму. По суті кожен такий оператор є лінійним перетворенням у просторі $\mathfrak{S}_k^{2h}(\theta)$ і характеризується відповідною матрицею перетворення (розмірністю 4×4), що називається *Фур'є-символом оператора*. Так, для оператора релаксації S_k символом Фур'є буде матриця \tilde{S}_k , для якої

$$\gamma = \tilde{S}_k \beta, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}, \quad S_k \varphi = \psi, \quad \psi = \sum_{j=1}^4 \gamma_j \varphi_j,$$

φ визначається формулою (15). Оскільки загальний оператор CGC-алгоритму M_k є певною комбінацією його складових, то його Фур'є-символ \tilde{M}_k також буде матрицею, що виражається через Фур'є-символи операторів релаксації, проектування, інтерполяції тощо. Через складність виразу для Фур'є-символу загального оператора \tilde{M}_k , для його аналізу застосовуються певні наближення, які характеризуються кількістю рівнів сітки в загальній ієрархії багатосіткового алгоритму, що розглядаються в процесі наближення (рис. 4).

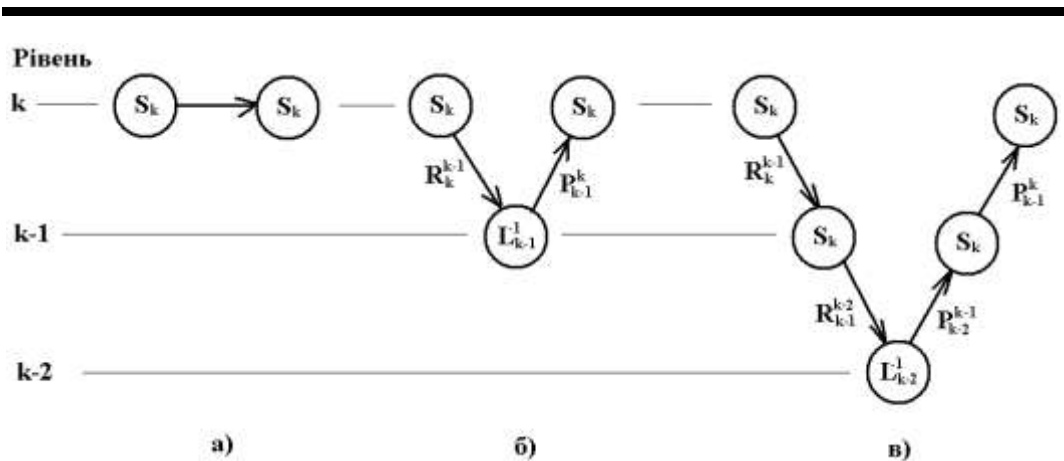


Рис. 4. Наближення до загального CGC-алгоритму в процесі аналізу:
 а – однорівневий аналіз, б – дворівневий аналіз, в – триврівневий аналіз

I. Односітковий (однорівневий) аналіз (аналіз згладжувальних характеристик релаксаційної схеми, рис. 4а). У процесі цього аналізу алгоритм розглядається тільки на вищому рівні k ; низькочастотні гармоніки після релаксації просто “зрізаються” спеціальним оператором Q_k з Фур’є-символом

$$\tilde{Q}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку Фур’є-символ загального CGC-алгоритму матиме вигляд

$$\tilde{M}_k = \tilde{Q}_k \tilde{S}_k^V, \quad (16)$$

де $v=v_1+v_2$. Однорівневий аналіз дозволяє дослідити згладжувальні властивості релаксаційної схеми, її здатність ефективно зменшувати амплітуди високочастотних гармонік у складі похибки наближеного розв’язку. Основний кількісний показник – фактор згладжування релаксаційного процесу – виражається формулою

$$\rho_1(v) = \sup_{\theta \in \Theta_{low}} \left\{ \rho(\tilde{M}_k) \right\}, \quad (17)$$

де $\rho(\tilde{M}_k)$ – спектральний радіус (модуль найбільшого за абсолютною величиною власного числа) матриці \tilde{M}_k .

II. Двосітковий (дворівневий) аналіз, рис. 4б. У цьому випадку алгоритм розглядають на рівнях k та $k-1$, причому вважається, що на рівні $k-1$ система рівнянь (7) для поправки розв’язується точно. Дослідження на цьому рівні дозволяють не тільки оцінити згладжувальні властивості релаксаційної схеми, але і її взаємодію з операторами проектування та інтерполяції. Вираз для Фур’є-символу оператора M_k у цьому випадку має вигляд

$$\tilde{M}_k^{(2)} = \tilde{S}_k^{v_2} \left(\tilde{I}_k - \tilde{P}_{k-1}^k (\tilde{L}_{k-1})^{-1} \tilde{R}_k^{k-1} \tilde{L}_k \right) \tilde{S}_k^{v_1}, \quad (18)$$

де I_k – тотожний оператор на рівні k (відповідно \tilde{I}_k – одинична матриця). Дворівневий фактор збіжності алгоритму $\rho_2(v_1, v_2)$ обчислюється аналогічно до $\rho_1(v)$

$$\rho_2(v_1, v_2) = \sup_{\theta \in \Theta_{low}} \left\{ \rho \left(\tilde{M}_k^{(2)} \right) \right\}. \quad (19)$$

III. Трисітковий (трирівневий) аналіз, рис. 4в. У цьому аналізі задіюються три рівні сіткової ієрархії: k , $k-1$ та $k-2$. Область “низьких” частот при цьому звужується до діапазону $\Theta_{low} = \Theta_{4h} = (-\pi/4, \pi/4]^2$, а область “високих” частот має два рівні: $\Theta_{high}^{(1)} = \Theta_{2h} \setminus \Theta_{low}$ та $\Theta_{high}^{(2)} = \Theta_h \setminus \Theta_{high}^{(1)}$. Відповідно, підвищується розмірність інваріантного простору для гармонік (12), оскільки мультиіндекс матиме чотири компоненти, а розмірність матриці Фур’є-символу $\tilde{M}_k^{(3)}$ алгоритму буде 16×16 (нагадаємо, що ми розглядаємо тільки випадок стандартного подрібнення сітки). Трирівневий фактор збіжності алгоритму залежатиме від параметра γ – числа повторів рекурсивного CGC-алгоритму для наближеного обчислення поправки на рівні $k-1$ згідно з рівнянням (7):

$$\rho_3(v_1, v_2, \gamma) = \sup_{\theta \in \Theta_{low}} \left\{ \rho \left(\tilde{M}_k^{(3)} \right) \right\}. \quad (20)$$

Трирівневий аналіз дозволяє додатково проаналізувати роботу CGC-алгоритму у вигляді V - та W -циклів.

Як уже було зазначено, необхідним фактором реалізації локального аналізу Фур’є є вимога про постійність коефіцієнтів диференційного оператора (2). У випадку змінних коефіцієнтів задачі (1), а також нелінійних пружнопластичних задач для аналізу застосовують стандартний метод “заморожених коефіцієнтів”. Згідно з цим методом отримані фактори збіжності ρ_i , $i = 1, 2, 3$, залежатимуть від векторного параметра ξ , до складу якого можуть входити як координати (у випадку змінних коефіцієнтів), так і певні наближення до розв’язку задачі (1) (у випадку нелінійних задач). Тоді загальний фактор збіжності знаходитиметься як верхня границя, взята за відповідною множиною значень параметра ξ :

$$\rho_i^{total} = \sup_{\xi \in D_\xi} \left\{ \rho_i(\xi) \right\}. \quad (21)$$

3. Порівняльні характеристики параметрів локального аналізу Фур'є та показників збіжності реального CGC-алгоритму. Наше завдання полягає у побудові так званих “робастних” алгоритмів, які були б малочутливими до зміни певних фізичних і геометричних властивостей диференційної задачі (1)–(3). Як подібні властивості розглянемо два такі параметри.

I. Відношення висоти всього пружного пакета H до його довжини L : $d=H/L$. Цей параметр характеризує “геометричну анізотропію” задачі.

II. У випадку двошарового кусково-однорідного пакета відношення модуля зсуву верхнього шару μ_2 до нижнього μ_1 : $\zeta=\mu_2/\mu_1$. Цей параметр є характеристикою “фізичної анізотропії” (точніше, неоднорідності).

Розглянемо задачу розрахунку двошарового пружного пакета із шарами рівної товщини $H/2$; пакет перебуває під дією рівномірних дотичних зусиль τ , докладених до половини довжини L верхньої грані (вважається, що значення безрозмірного параметра навантаження $T = \tau/\mu_1 = 1$). Шари пакета вважаються “склеєними” (між ними немає проковзування). Нижня грань пакета вважається міцно зчепленою з основою, а бокові грані вільні від навантажень. У процесі дослідження обчислювалися значення трьох факторів збіжності (17), (19), (20), розрахованих згідно з локальним аналізом Фур'є. Замість супремуму в цих формулах обчислювався максимум на рівномірній сітці 16×16 , що розбиває область низьких частот Θ_{low} .

По-перше, дослідимо чутливість CGC-алгоритму до зміни параметра d . У табл. 1 наведено результати розрахунків факторів збіжності алгоритму за формулами (17), (19), (20) та їх порівняння з показником зменшення норми похибки (8) (осереднених для певної кількості ітерацій CGC-алгоритму), обчислених для одношарового однорідного пакета. Обчислення за CGC-алгоритмом реалізовані у вигляді V -циклу ($\gamma = 1$) із значеннями $v_1 = 1$, $v_2 = 0$. Ієрархія сіток будувалась, починаючи з найгрубішої сітки 2×2 (рівень $k = 0$); найдрібніша сітка 64×64 мала рівень $k = 5$. CGC-алгоритм був реалізований саме на цій сітці.

Таблиця 1

Результати обчислення залежності факторів збіжності та показника зменшення норми похибки від значення параметра d

Релаксаційна схема	$d=1$				$d=0,5$				$d=0,1$			
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ
1*	0,35	0,3457	0,3489	0,3155	0,79	0,79	0,79	0,7582	0,9903	0,9903	0,9903	0,9567
2	0,4319	0,2757	0,3244	0,2860	0,5639	0,5491	0,5443	0,5060	0,9762	0,9762	0,9743	0,9209
3	0,4319	0,2758	0,3244	0,3187	0,5854	0,5618	0,5528	0,5048	0,9707	0,9707	0,9707	0,9250
4	0,5	0,4908	0,4977	0,4778	0,5	0,49	0,5752	0,5568	0,9705	0,9705	0,9766	0,9173
5	0,3299	0,2260	0,2252	0,2087	0,49	0,49	0,5599	0,5537	0,9705	0,9705	0,9753	0,9280
6	0,3299	0,2260	0,2252	0,2026	0,6196	0,5738	0,5875	0,5478	0,9765	0,9764	0,9772	0,9072
7*	0,475	0,475	0,475	0,4561	0,745	0,745	0,745	0,7091	0,9859	0,9859	0,9859	0,9517
8*	0,475	0,475	0,475	0,4646	0,5588	0,5570	0,5584	0,4940	0,6	0,5969	0,5970	0,5686
9	0,4472	0,3291	0,3384	0,3274	0,5385	0,5385	0,5385	0,4954	0,9707	0,9707	0,9707	0,9247
10	0,4472	0,3291	0,3384	0,3267	0,4472	0,3226	0,3384	0,3307	0,4472	0,3299	0,3384	0,3248
11	0,1250	0,0938	0,1056	0,1495	0,49	0,49	0,5577	0,5462	0,9705	0,9705	0,9758	0,9380
12	0,1250	0,0938	0,1056	0,1684	0,1696	0,1633	0,1679	0,1616	0,3603	0,3603	0,3753	0,3645

Для всіх релаксаційних схем, окрім помічених зіркою, розглялося значення ітераційного параметра $\omega = 1$; для помічених схем за значення для цього параметра вибиралося оптимальне, розраховане в процесі локального аналізу Фур'є.

Результати розрахунків свідчать, що обчислені згідно з локальним аналізом Фур'є фактори збіжності (особливо дво- та тривірневі) добре узгоджуються із значеннями реального зменшення норми похибки, обчисленого для конкретної дискретизованої задачі. "Робастними" щодо виродження "геометрії" області (малі товщини шарів порівняно з їх довжинами) будуть, як і очікувалося, схеми релаксації на x_2 -лініях.

По-друге, розглянемо, як змінюються показники збіжності CGC-алгоритму під час зміни параметра ζ , тобто зі збільшенням "ступені розривності" коефіцієнтів рівняння (1). Зробимо розрахунок параметрів локального аналізу Фур'є для точок, що розташовані на границі розділу двох середовищ (шарів пакета, рис. 5).

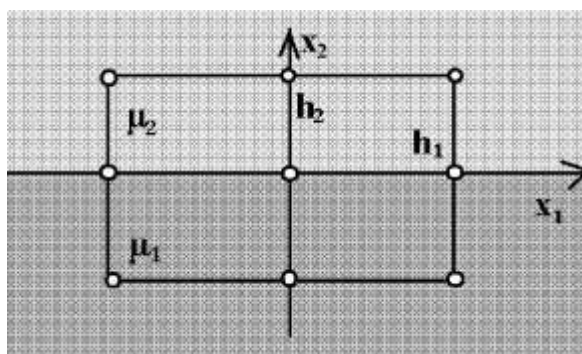


Рис. 5. Просторова область на границі двох середовищ для розрахунку коефіцієнтів дискретизованих операторів

Використовуючи схему дискретизації (4) для області, зазначеної на рис. 5, побудуємо дев'ятиточковий різницевий шаблон дискретизованого оператора L^h :

$$[L^h] = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_2(h_1 + h_2)}{6(h_2 + h_1)} & \frac{\mu_2(h_2 - 2\frac{h_1}{h_2})}{3(h_1 - 2\frac{h_1}{h_2})} & -\frac{\mu_2(h_1 + h_2)}{6(h_2 + h_1)} \\ \frac{\mu_1 + \mu_2(h_1 - 2\frac{h_2}{h_1})}{6(h_2 - 2\frac{h_2}{h_1})} & \frac{2(\mu_1 + \mu_2)(h_1 + h_2)}{3(h_2 + h_1)} & \frac{\mu_1 + \mu_2(h_1 - 2\frac{h_2}{h_1})}{6(h_2 - 2\frac{h_2}{h_1})} \\ -\frac{\mu_1(h_1 + h_2)}{6(h_2 + h_1)} & \frac{\mu_1(h_2 - 2\frac{h_1}{h_2})}{3(h_1 - 2\frac{h_1}{h_2})} & -\frac{\mu_1(h_1 + h_2)}{6(h_2 + h_1)} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

На базі шаблону (21) побудуємо Фур'є-символи операторів релаксації та дискретизованих "версій" оператора L на грубих сітках, які застосуємо для обчислення факторів збіжності (17), (19), (20). Порівняльні результати цих факторів і показника зменшення норми похибки наближеного розв'язку з різними значеннями параметра $\zeta = \mu_2/\mu_1$ (значення параметра d у всіх випадках дорівнює одиниці) наведено в табл. 2.

**Результати обчислення залежності факторів збіжності
та показника зменшення норми похибки від значення параметра ζ**

Релаксаційна схема	$\zeta = 1$				$\zeta = 5$				$\zeta = 10$			
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ
1*	0,35	0,3457	0,3489	0,3155	0,5590	0,9524	2,8615	0,2980	0,6332	0,9660	2,9059	0,3917
2	0,4319	0,2757	0,3244	0,2860	0,7339	0,9557	2,8724	0,3214	0,8027	0,9717	2,9157	0,3332
3	0,4319	0,2758	0,3244	0,3187	0,4357	0,9143	2,7693	0,3066	0,4626	0,9218	2,7840	0,3092
4	0,5	0,4908	0,4977	0,4778	0,5526	0,9508	2,8570	0,4721	0,6728	0,9661	2,9023	0,4713
5	0,3299	0,2260	0,2252	0,2087	0,6501	0,9520	2,8641	0,2199	0,7273	0,9671	2,9074	0,1970
6	0,3299	0,2260	0,2252	0,2026	0,3589	0,9431	2,8326	0,1783	0,4365	0,9570	2,8702	0,1840
7*	0,475	0,475	0,475	0,4561	0,5547	0,9515	2,8619	0,4608	0,6332	0,9660	2,9059	0,4280
8*	0,475	0,475	0,475	0,4646	0,4826	0,9455	2,8501	0,4389	0,4998	0,9590	2,8893	0,4406
9	0,4472	0,3291	0,3384	0,3274	0,8220	0,9623	2,8791	0,3598	0,9054	0,9815	2,9229	0,3579
10	0,4472	0,3291	0,3384	0,3267	0,4737	0,9132	2,7659	0,3356	0,4933	0,9213	2,7813	0,3374
11	0,1250	0,0938	0,1056	0,1495	0,4006	0,9666	2,8816	0,1548	0,5286	0,9845	2,9232	0,1642
12	0,1250	0,0938	0,1056	0,1684	0,2091	0,9612	2,8291	0,1776	0,2492	0,9761	2,8633	0,1788

Результати розрахунків за CGC-алгоритмом показують, що алгоритм є “робастним” для всіх релаксаційних схем, які розглядалися в процесі аналізу. Однак локальний аналіз Фур’є дає зовсім інші результати: згідно з цим аналізом має місце вироджуваність параметрів збіжності для дво- та тривірневого аналізу (для тривірневого його варіанта аналіз показує навіть розбіжність).

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку.

1. Для однорідного пакета (або у випадку, коли модуль пружності змінюється плавно в розрахунковій області) локальний аналіз Фур’є дає результати, що добре узгоджуються з реальним обчислювальним процесом.

2. У випадку розривних коефіцієнтів початкового рівняння (1) для вузлів сітки, розташованих на границі розриву, застосування аналізу Фур’є в його стандартній формі не дає результатів (трисітковий аналіз взагалі показує розбіжність, водночас реальний CGC-алгоритм демонструє малу чутливість до величини розриву коефіцієнтів рівняння). Тобто для практичного застосування у цьому випадку стандартний аналіз має бути певним чином модифікованим.

3. Локальний аналіз Фур’є доцільно використовувати, якщо є можливість застосування вже розробленого програмного забезпечення для цього аналізу, особливо у випадках, коли пакет програм для розв’язання конкретного класу задач розробляється “з нуля”, оскільки створення такого забезпечення потребує чималих зусиль, незважаючи на прозорість ідей цього аналізу. Коли у розпорядженні розробника вже є певний інструментарій для реалізації багатосіткових алгоритмів, актуальність локального аналізу Фур’є дещо знижується, оскільки завжди є можливість на тестових задачах перевірити реальні показники роботи конкретного багатосіткового алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Trottenberg U. Multigrid / Trottenberg U., Oosterlee C. W., Schuller A. – New York : Academic Press, 2001. – 644 p.
2. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М. : Наука, 1977. – 440 с.
3. Brandt A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems / A. Brandt // Math. Comp. – 1977. – № 31. – P. 333–390.
4. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications / W. Hackbusch. – Berlin : Springer, 1985.
5. Wienands R. Extended local Fourier analysis for multigrid: Optimal smoothing, coarse grid correction, and preconditioning / Wienands R. – Germany, Cologne, 2001.
6. Wienands R. Practical Fourier Analysis for multigrid methods / R. Wienands, W. Joppich. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press, 2005. – 212 p.
7. Писаренко Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. – К. : Наук. думка, 1981. – 496 с.

