

жує банкрутство. З огляду на це проведено польове дослідження одного з таких маршрутів, зібрано внутрішню статистику маршруту і зроблено оцінку якості перевезень для двох типів автобусів. Виявилось, що внутрішні показники, які формують оцінку якості, перебувають на високому рівні. Отже, це означає відмінну налаштованість маршруту, але, не зважаючи на це, ключовими факторами, що впливають на пасажиропотік, є фактори зовнішнього впливу, а саме налаштування паралельних маршрутів. Таким чином, це ще раз підтверджує необхідність повноцінної експлуатації інтелектуальної системи керування пасажиропотоками.

Список використаних джерел:

1. Фірсов О. Д. Проектування інтелектуальної транспортної системи міста / О. Д. Фірсов, А. Н. Бібля // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2015. – № 1 (53). – С. 20–31.
2. Алексеев О. П. Интеллектуализация транспортных систем в задачах развития больших городов [Электронный ресурс] / О. П. Алексеев, С. В. Пронин // Автомобильный транспорт. – 2007. – Вып. 21. – Режим доступа : <http://cyberleninka.ru/article/n/intellektualizatsiya-transportnyh-sistem-v-adachah-razvitiya-bolshih-gorodov>
3. Палант О. Ю. Огляд методів обстеження пасажиропотоків / О. Ю. Палант // Бізнесінформ. – 2014. – № 11. – С. 142–148.
4. Спирин И. В. Организация и управление пассажирскими автомобильными перевозками / Спирин И. В. – М. : Академия, 2003. – 400 с.
5. Володин Е. П. Организация и планирование перевозок пассажиров автомобильным транспортом / Е. П. Володин, Н. Н. Громов. – М. : Транспорт, 1982. – 224 с.



УДК 519.6

А. В. Трофимов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры транспортных систем и технологий Университета таможенного дела и финансов

МНОГОСЕТОЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ ПАКЕТОВ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Предложена методика настройки многосеточного итерационного алгоритма приближённого решения упругих и упругопластических граничных задач для слоистых оснований с криволинейными границами раздела между слоями. Задача распадается на две стадии: настройку алгоритма коррекции поправки на грубых сетках (CGC-алгоритма) и полного многосеточного алгоритма (FMG-алгоритма).

© А. В. Трофимов, 2016

Рассмотрены некоторые критерии оценки настраиваемых параметров алгоритмов. Выполнение указанной методики требует, помимо общего инструментария для реализации многосеточных алгоритмов, использования набора релаксационных процедур, что, однако, составляет небольшую часть работы по разработке всего многосеточного программного инструментария.

Ключевые слова: многосеточные методы; криволинейные границы; слоистые основания.

Запропоновано методику налаштування багатосіткового ітераційного алгоритму наближеного розв'язку пружних і пружнопластичних граничних задач для шаруватих основ з криволінійними границями розділу між шарами. Задача розпадається на дві стадії: налаштування алгоритму корекції поправки на грубих сітках (FMG-алгоритму) та налаштування повного багатосіткового алгоритму (FMG-алгоритму). Розглянуто деякі критерії оцінки налаштовуваних параметрів алгоритмів. Застосування вказаної методики вимагає, окрім загального інструментарію для реалізації багатосіткових алгоритмів, використання набору релаксацийних процедур, що при тому складає невелику частину роботи з розробки всього багатосіткового програмного інструментарію.

Ключові слова: багатосіткові методи; криволінійні границі; шаруваті основи.

Methods for tuning the parameters of Multigrid Algorithm for solving the Boundary-Value Problems for elastic and/or elasto-plastic layered package with curvilinear boundaries between layers were considered. The regular grid based on linear algebraic interpolation [1] was used. Tuning of Coarse Grid Correction part (CGC-Cycle) of total Multigrid Algorithm includes two stages: 1) choice of appropriate Relaxation operator; 2) obtaining the triple of parameters (v_1, v_2, γ) , where v_1, v_2 – number of pre- and post-relaxation iterations, γ – number of recursively used CGC-Cycle iterations performed on lower grid levels [2], to optimize work efficiency. Some criteria for such choices were considered. Tuning of Full Multigrid Algorithm (FMG-Cycle) was also examined. The main parameters for such tuning are the numbers μ_k of CGC-iterations performed on each grid level k of FMG-Cycle to obtain the approximate solution “at the level of discretization error”. Some estimation for μ_k was obtained. Practical efficiency of chosen μ_k was examined based on known analytical solutions for homogenous rectangular package (all layers with curvilinear boundaries have the same elastic properties).

Proposed methods for tuning the parameters for components of Multigrid Algorithm may be used for wide classes of elliptic boundary-value problems, where regular grids can be applied for the discretization. One needs to have, except for common multigrid program toolkit, the realization of several relaxation procedures, but it's the minor part of work for total Multigrid Package development.

Key words: multigrid methods; curvilinear boundaries; layered basis.

Постановка проблемы. Основные классы обратных задач для упругих и упругопластических слоистых пакетов связаны в основном с определением упру-

гих и упругопластических параметров слоёв пакета, а также конфигурации самих слоёв [1]. Для исследования решений таких задач применяются преимущественно градиентные методы для минимизации определённого невязочного функционала, а также методы статистического моделирования (Монте-Карло) для исследования поведения этого функционала вблизи экстремальных точек. При использовании любого из этих методов ключевым вопросом является эффективное решение “прямой задачи” для пакета, обладающего заданными характеристиками исследуемых параметров.

Анализ последних исследований и публикаций. Одним из наиболее эффективных на сегодняшний день методов решения эллиптических граничных задач является многосеточный метод [2], впервые предложенный в 1960-х гг. и активно разрабатываемый в конце XX – начале XXI вв. Однако эффективность метода существенно зависит от качественной его “настройки” в зависимости от особенностей исходной дифференциальной задачи, а также топологии сетки, используемой для дискретизации этой задачи [3]. В число параметров такой настройки входят, в частности, тип релаксационной схемы, операторов интерполяции и проектирования из одного сеточного пространства в другое, способ дискретизации дифференциальной задачи на грубых сетках, количество применяемых пре- и поститераций релаксационного оператора и т. п.

Как известно, основой современных многосеточных методов являются два алгоритма: алгоритм коррекции приближенного решения средствами грубых сеток (Coarse Grid Correction Cycle, CGC-алгоритм) и полный многосеточный алгоритм (Full Multigrid Cycle, FMG-алгоритм). Задачей первого алгоритма является уменьшение нормы ошибки приближенного решения на данном сеточном уровне с использованием приближенных решений некоторых сеточных задач, определенных на сеточных пространствах меньшей размерности. “Настройка” CGC-алгоритма составляет основную часть работы по конструированию многосеточного алгоритма и его приспособления к решению данной дифференциальной задачи. Для решения задачи такой настройки алгоритма на рубеже XX–XXI вв. были разработаны достаточно мощные теоретические инструменты, в частности, локальный анализ Фурье [4]. Однако в некоторых работах отмечены определенные ограничения, не позволяющие в полной мере использовать его преимущества для определенных дифференциальных операторов и практически важных случаев дискретизации [5]. В таких случаях целесообразной представляется непосредственная проверка параметров эффективности алгоритма на определенных модельных задачах.

Задачей полного многосеточного алгоритма (FMG-алгоритма) является получение приближенного решения сеточной задачи на “самом верхнем” уровне дискретизации (на самой мелкой сетке) – “на уровне погрешности аппроксимации”, когда ошибка приближенного решения сеточных уравнений примерно равна (в определенной норме) погрешности дискретизации исходной дифференциальной задачи. Решение задачи начинается на “нулевом уровне” (на самой грубой сетке), и на каждом последующем уровне после соответствующей коррекции приближенное решение интерполируется на более мелкую сетку. Настройка FMG-алгоритма за-

ключается, таким образом, в выборе типа оператора интерполирования и числа шагов CGC-алгоритма на каждом сеточном уровне, используемого для уточнения приближенного решения на этом уровне.

Цель статьи – исследование эффективности CGC- и FMG-алгоритма для решения граничной задачи плоской деформации упругого (упругопластического) пакета.

Изложение основного материала. Рассмотрим задачу плоской деформации упругого (упругопластического) слоистого пакета, нагруженного по его верхней поверхности (рис. 1). Слои пакета предполагаются жестко сцепленными (склееными); сам пакет может быть как жестко сцепленным с жестким основанием, так и проскальзывать относительно него без трения.

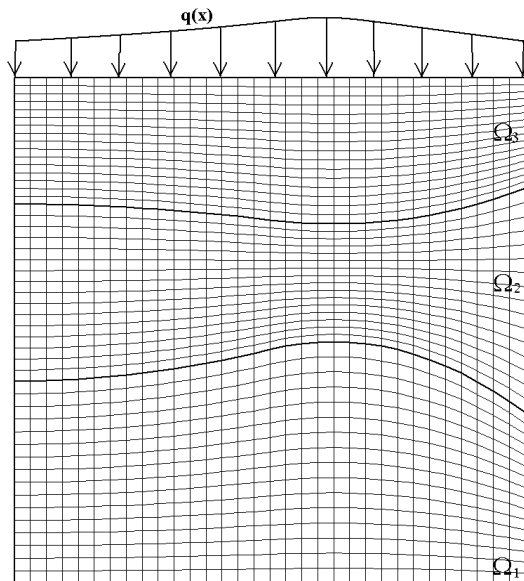


Рис. 1. Упругий слоистый пакет с криволинейными границами между слоями с построенной регулярной сеткой

Дифференциальная статическая задача расчета пакета состоит в определении вектор-функции $u(x)=(u_1(x), u_2(x))^T$ двумерных координат $x=(x_1, x_2)$, удовлетворяющая в области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\dots\cup\Omega_m$ (m – число слоёв пакета) соотношение:

$$Lu = F, \quad (1)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= T(x) = (T_1(x), T_2(x))^T, \quad x \in S_\sigma, \quad i=1,2, \\ u(x) &= u_u(x), \quad x \in S_u, \quad S = \partial\Omega = S_\sigma \cup S_u. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальный векторный оператор $L(u)$ выражается соотношением:

$$L(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}(u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}(u)}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с компонентами малых деформаций ε_{ij} соотношениями закона Гука для изотропной среды:

$$\sigma_{ij}(u) = G \cdot \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} \theta(u) \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}(u) \right), \quad (4)$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \theta(u) = \varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u), \quad i, j = 1, 2.$$

В случае упругих пакетов параметры G , ν рассматриваются как кусочно-постоянные функции в области Ω (постоянные в каждой области Ω_k , $k = 1, 2, \dots, m$); в случае упругопластической деформации в рамках модели Генки–Надаи–Ильюшина [6] модуль сдвига G в каждом слое пакета определяется как функция перемещения u соотношением (как обычно в тензорном анализе, используется суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 2):

$$G = G(u) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i(\varepsilon_i(u))}{\varepsilon_i(u)}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_i(u) = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij}(u) - \frac{1}{3} \theta(u) \delta_{ij},$$

где $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ – заданная функция зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций (своя для каждого слоя), e_{ij} – компоненты девиатора деформаций.

В соотношениях (1), (2) $F = -(F_1(x), F_2(x))^T$ – вектор объёмных сил, $\sigma_n(x)$ – вектор поверхностных напряжений с компонентами $\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$, $i = 1, 2$, $n = (n_1, n_2)^T$ – вектор внешней нормали к поверхности пакета.

Для перехода от дифференциальной задачи (1), (2) к сеточной используем так называемую “слабую” формулировку: найти вектор-функцию $u(x) \in H_u$, удовлетворяющую соотношению:

$$L(u, v) = f(v) \quad \forall v(x) = (v_1(x), v_2(x))^T \in H_0. \quad (6)$$

Здесь

$$L(u, v) = \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \quad (7)$$

билинейная (в случае упругого пакета) или линейная только по второму аргументу (в случае упругопластической деформации) непрерывная форма от двух аргументов u и v ,

$$f(v) = \int_{\Omega} F_i v_i dx + \int_{S_{\sigma}} T_i v_i ds \quad (8)$$

линейный непрерывный функционал от v , H_u – пространство функций $u(x)$, удовлетворяющих второе из условий (2) на множестве S_u , H_0 – пространство функций $v(x)$, равных нулю на этом же множестве.

Как известно, регулярными называются сетки определённой сравнительно простой структуры, построенные в так называемой *расчётной области* $\Xi \in R^2$, и которые затем отображаются в *физическую область* $\Omega \in R^2$ с помощью некоторого отображения:

$$x = x(\xi), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Xi. \quad (9)$$

Задача (6) при этом решается в расчётной области Ξ на равномерной прямоугольной сетке, а отображение (9) формирует в физической области Ω соответствующие криволинейные *линии сетки* (рис. 1).

Задача (6) в обобщённых координатах $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ запишется в виде:

$$\tilde{L}(u, v) = \tilde{f}(v), \quad u(\xi) \in H_{u\xi}, \quad \forall v(\xi) = (v_1(\xi), v_2(\xi))^T \in H_{0\xi}. \quad (10)$$

Здесь $H_{u\xi}$ – пространство функций, удовлетворяющих второе условие (2) на том подмножестве $S_{u\xi}$ границы расчётной области Ξ , которое в силу (9) отображается в S_u , $H_{0\xi}$ – пространство функций, тождественно равных нулю на этом подмножестве. Выражения (7) и (8) для формы и функционала задачи (6) в криволинейных координатах ξ запишутся в виде:

$$\tilde{L}(u, v) = \int_{\Xi} \sigma_{ij}(u(\xi)) \sqrt{g^\xi} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} d\xi, \quad (11)$$

$$\tilde{f}(v) = \int_{\Xi} \sqrt{g^\xi} F_i v_i d\xi + \int_{S_{\alpha\xi}} \sqrt{g^\xi} T_i v_i ds_\xi. \quad (12)$$

Квадрат якобиана $J = \sqrt{g^\xi}$ отображения (9) выражается через ковариантные компоненты метрического тензора $g_{ij}^\xi = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}$ как $g^\xi = \det(g_{ij}^\xi)$ ($i, j=1, 2$).

Компоненты тензора малых деформаций в криволинейных координатах $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеют вид:

$$\varepsilon_{ij}(u(\xi)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \right). \quad (13)$$

Производные от компонент отображения $\xi = \xi(x)$, обратного отображению (6), фигурирующие в формулах (11), (13), выражаются так:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = \frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1}. \quad (14)$$

Дискретизация по методу Бубнова–Галеркина задачи (10) производится стандартным образом на базе пространств пробных и поверочных функций на равномерной прямоугольной сетке $\Xi_h \subset \Xi$, характеризуемой векторным параметром $h = (h_1, h_2)$, где h_i – величина шага сетки вдоль координаты ξ_i , $i=1, 2$. В результате дискретизации получим сеточную задачу: определить неизвестную сеточную функцию $u^h \in \Xi_h$, удовлетворяющую систему уравнений:

$$\tilde{L}^h u^h = \tilde{F}^h, \quad (15)$$

где \tilde{L}^h – дискретизированная “версия” дифференциального оператора, соответствующего форме (11), \tilde{F}^h – вектор правых частей системы (дискретизированный функционал (12)). В случае линейно-упругого пакета соотношение (15) является системой линейных уравнений; в случае упругопластической деформации система (15) является нелинейной и рассмотренный ниже многосеточный метод использу-

ется для решения соответствующей линейризованной “версии” соотношений (15). Анализ параметров многосеточного метода производится аналогично линейно-упругому случаю с использованием принципа “замороженных коэффициентов”.

Рассмотрим задачу определения отображения (9) расчётной области Ξ в физическую Ω . Успешное решение этой задачи во многом определяет качество и точность приближённого решения исходной дифференциальной задачи (1). В связи с этим к отображению (9) выдвинем следующие два требования: 1) границы раздела слоёв пакета должны совпадать с соответствующими линиями сетки; 2) линии сетки должны приблизительно равномерно заполнять пространство каждого слоя Ω_i пакета. В настоящее время известны две основные методики построения регулярных сеток: методики, основанные на интерполяционных формулах, и методики на базе определённых дифференциальных моделей [7]. В работе [8] проанализированы оба подхода к построению сеток для слоёв пакета. Поскольку по своей топологии слои близки к прямоугольникам (в некотором “гомеоморфном” смысле), то интерполяционные формулы для построения сеток дают весьма неплохой результат.

Будем предполагать, что каждый из слоёв Ω_i двумерного пакета ограничен слева и справа прямыми $x_1=0$ и $x_1=L$, а снизу и сверху кривыми $x_2=S_{i-1}(x_1)$ и $x_2=S_i(x_1)$, $i=1,2,\dots,m$. Расчётную область $\Xi=\Xi_1\cup\Xi_2\cup\dots\cup\Xi_m$ будем считать прямоугольником $(0,m)\times(0,1)$, составленным из единичных квадратов $\Xi_i=(i-1,i)\times(0,1)$, причём отображение (9) для каждой подобласти $\Xi_i\rightarrow\Omega_i$ задаётся формулами:

$$\begin{cases} x_1 = L\xi_1, \\ x_2 = S_{i-1}(\xi_1) + \xi_2(S_i(x_1) - S_{i-1}(x_1)), \end{cases} \xi=(\xi_1, \xi_2) \in \Xi_i. \quad (16)$$

Образец сетки, построенной для трёхслойного пакета по указанной методике, приведён на рис. 1.

Для применения многосеточного метода систему уравнений (15) формируют не на одном, а сразу на нескольких сеточных уровнях, составляющих определённую иерархию, с параметрами дискретизации h_0, h_1, \dots, h_K . Индекс “0” соответствует самой грубой сетке Ξ_{h_0} ; сетка на каждом последующем уровне Ξ_{h_i} получается определённым дроблением сетки предыдущего уровня $\Xi_{h_{i-1}}$. Самый верхний уровень сеточной иерархии с индексом K соответствует самой мелкой сетке Ξ_{h_K} . В соответствии с этой иерархией уровней строится последовательность сеточных задач:

$$\tilde{L}^{hi} u^{hi} = \tilde{F}^{hi}, \quad i=0,1,\dots,K, \quad (17)$$

или, более коротко, $L_k u_k = F_k$, аппроксимирующих исходную дифференциальную задачу (1), (2).

Рассмотрим теперь задачу настройки многосеточного алгоритма решения указанной задачи на последовательности сеток. Как уже упоминалось, CGC-алгоритм служит для уменьшения нормы ошибки приближённого решения системы

линейных уравнений (17) на сеточном уровне k . Последовательность его настройки распадается на два этапа.

1. Выбор основных сеточных операторов, используемых в алгоритме. Это прежде всего оператор релаксационной схемы S_k , оператор проектирования сеточной функции с мелкой сетки (уровень k) на более грубую (уровень $k-1$) R_k^{k-1} , способ формирования матрицы системы L_{k-1} уравнений на сеточном уровне $k-1$, оператор интерполирования P_{k-1}^k с грубой сетки на более мелкую.

Как правило, для большинства задач выбор последних трёх операторов носит стандартный характер и определяется в основном способом измельчения сетки при переходе к более высокому сеточному уровню (изотропное и анизотропное измельчение; в данной работе ограничимся случаем изотропного измельчения, Standard Coarsening) [4]. Поэтому сосредоточим основное внимание на выборе релаксационного оператора.

2. Определение тройки параметров (ν_1, ν_2, γ) , где ν_1, ν_2 – число сглаживающих пре- и поститераций релаксационной схемы S_k (значения этих параметров обычно предполагаются одинаковыми на всех уровнях), γ – число рекурсивно применяемых итераций CGC-алгоритма на сеточном уровне $k-1$ для уточнения поправки к приближённому решению на уровне k . В большинстве случаев выбор делается между значениями $\gamma=1$ (V-цикл) и $\gamma=2$ (W-цикл) этого параметра.

CGC-алгоритм формулируется следующим образом.

Алгоритм CGC_CYCLE($k, F_k, u_k^{(0)}, \nu_1, \nu_2, \gamma$)

/* Алгоритм приближённого решения системы линейных уравнений $L_k u_k = F_k$, где k – уровень сетки Ξ_{hk} , $u_k^{(0)}$ – начальное приближение, $L_k = \tilde{L}^{hk}$ – матрица системы, F_k – вектор правых частей, ν_1 – число преитераций релаксационной схемы, ν_2 – число поститераций, γ – параметр цикла, $u_k^{(1)}$ – уточнённое приближённое решение. */
Begin

1. Если $k=0$, система (17) решается прямым методом. В результате решения получается величина $u_k^{(1)}$. Перейти к пункту 9.

2. (Пререлаксация). Провести ν_1 сглаживающих итераций по формуле:

$$\tilde{u}_k^{(0)} \leftarrow S_k^{\nu_1} u_k^{(0)},$$

где S_k – оператор релаксационной схемы.

3. Вычисление невязки по формуле

$$r_k \leftarrow S_k u_k^{(0)} - F_k,$$

4. Проектирование невязки на грубую сетку (уровня на единицу меньше):

$$r^{k-1} \leftarrow R_k^{k-1} r^k,$$

где R_k^{k-1} – оператор проектирования с мелкой сетки на более грубую.

5. Вычисление и уточнение вектора поправки e^{k-1} на грубой сетке, то есть приближенного решения уравнения:

$$L_{k-1} e^{k-1} = r^{k-1}, \quad (18)$$

рекурсивно с помощью этого же алгоритма, начиная с нулевого начального приближения:

$$\tilde{e}_k^{(0)} \leftarrow 0.$$

$$\text{For } i \leftarrow 1 \text{ to } \gamma \text{ do } \tilde{e}_{k-1}^{(i)} \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(k-1, r^{k-1}, \tilde{e}_{k-1}^{(i-1)}, \nu_1, \nu_2, \gamma).$$

6. Интерполяция полученной поправки $\tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)}$ на мелкую сетку (уровня на единицу выше):

$$e^k \leftarrow P_{k-1}^k \tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)},$$

где P_{k-1}^k – оператор интерполяции с грубой сетки на более мелкую.

7. Коррекция:

$$u_k^{(1)} \leftarrow u_k^{(0)} + e^k.$$

8. (Пострелаксация). Проведение дополнительных ν_2 сглаживающих итераций по формуле:

$$u_k^{(1)} \leftarrow S_k^{\nu_2} u_k^{(1)}.$$

9. Возвратить результат $u_k^{(1)}$.

End

Рассмотрим следующие возможные релаксационные схемы (подробное описание см. в [7]).

1. Точечная релаксация Якоби.
2. Точечная релаксация Гаусса–Зейделя (упорядочение неизвестных в направлении “восток–запад”, то есть вдоль оси ξ_1).
3. Точечная релаксация Гаусса–Зейделя (упорядочение неизвестных в направлении “юг–север”, то есть вдоль оси ξ_2).
4. “Шахматка” Якоби (сначала релаксация “четных” узлов, а потом “нечетных”, используя обновленные “четные” значения).
5. “Шахматка” Гаусса–Зейделя “восток–запад”.
6. “Шахматка” Гаусса–Зейделя “юг–север”.
7. Релаксация Якоби с одновременным обновлением значений переменных на ξ_1 -линии (ξ_1 -линия Якоби).
8. Релаксация Якоби с одновременным обновлением значений переменных на ξ_2 -линии (ξ_2 -линия Якоби).
9. ξ_1 -линия Гаусса–Зейделя.
10. ξ_2 -линия Гаусса–Зейделя.
11. ξ_1 -“зебра” (сначала обновляются “четные” ξ_1 -линии, а потом – “нечетные”).
12. ξ_2 -“зебра” (аналогично для ξ_2 -линий).

Основным фактором, характеризующим эффективность многосеточного CGC-алгоритма, является множитель ρ_k уменьшения нормы ошибки за одну итерацию:

$$\|u_k^{(1)} - u_k\| \leq \rho_k \|u_k^{(0)} - u_k\|. \quad (19)$$

Будем оценивать этот фактор как средний за определённое пробное количество итераций CGC-алгоритма, начиная с нулевого начального приближения, для значения тройки параметров (v_1, v_2, γ) , равного $(1, 0, 1)$.

Поскольку дифференциальная исходная задача (1) не обладает физической пространственной анизотропией, то главную роль в качестве того или иного релаксационного оператора играют свойства отображения (9), которые, в свою очередь, определяют топологию сетки в физической области Ω . Обычно считается, что если ячейки криволинейной области имеют значение аспектного коэффициента $A = h_x/h_y \cong 1$, то хорошо работают все схемы последовательной (поточечной) релаксации (Якоби, Гаусса–Зейделя, “шахматки”). В случае ячеек, вытянутых в ширину или в высоту, последовательные релаксационные схемы перестают работать и необходимо применение блочных релаксаций на ξ_1 - или ξ_2 -линиях. На практике не очень просто добиться равномерного и примерно равного единице распределения аспектного коэффициента для всего множества ячеек сетки, особенно в случае более-менее

выраженной вариабельности функций $S_i(x_1)$, определяющих границы слоёв пакета (см. значения ρ для сетки 192×192 в табл. 1). Кроме того, выяснилось, что релаксационные схемы на криволинейных ξ_1 -линиях работают хуже, чем на прямолинейных ξ_2 -линиях (см. столбцы для сеток 192×96 и 64×192 в табл. 1). Общая рекомендация для слоистых пакетов такова: следует выбирать значение длины слоя пакета $L > H$ и устанавливать число разбиений сетки на нулевом уровне таким, чтобы обеспечить значение аспектного коэффициента, большее единицы для всех ячеек сетки. В качестве релаксационной схемы необходимо выбирать одну из блочных релаксационных схем на ξ_2 -линиях (в случае рассмотренного пакета и сетки 64×192 это релаксация ξ_2 -“зебра” со значением параметра $\rho_6 = 0,4173$, табл. 1). Поскольку нагрузка на слоистые пакеты предполагается преимущественно вертикальной, то градиент упругих (упругопластических) перемещений вдоль координаты x_2 будет существенно больше, чем в направлении x_1 , поэтому аккуратный выбор числа разбиений сетки на нулевом уровне не повлияет на точность получаемого приближённого решения.

Таблица 1

Множитель ρ_k уменьшения нормы ошибки ($k = 6$)

Релаксационная схема	Сетка		
	192×96	192×192	64×192
Точечная Якоби *	0,9259	0,9558	0,9046
Точечная Гаусса–Зейделя “восток–запад”	0,9269	0,9431	0,8847
Точечная Гаусса–Зейделя “юг–север”	0,9273	0,9358	0,8728
“Шахматка” Якоби	0,9133	0,9332	0,8932
“Шахматка” Гаусса–Зейделя “восток–запад”	0,9182	0,9370	0,8967
“Шахматка” Гаусса–Зейделя “юг–север”	0,9281	0,9405	0,8991
ξ_1 -линия Якоби *	0,9203	0,9361	0,8886
ξ_2 -линия Якоби *	0,8800	0,8451	0,6133
ξ_1 -линия Гаусса–Зейделя	0,9030	0,9246	0,8455
ξ_2 -линия Гаусса–Зейделя	0,8505	0,8091	0,4491
ξ_1 -“зебра”	0,9013	0,9242	0,8705
ξ_2 -“зебра”	0,8740	0,8683	0,4173
ξ_2 -“зебра”	0,8740	0,8683	0,4173

В табл. 2 приведены значения фактора сходимости (множителя уменьшения евклидовой нормы ошибки для одной итерации алгоритма) приближённого решения задачи (1) для трёхслойного пакета на рис. 1 под действием однородной объёмной силы F , направленной вдоль оси x_2 ($F \cdot L / G_0 = 1$, где G_0 – модуль сдвига самого нижнего слоя), с помощью CGC-алгоритма со значениями параметров $\gamma = 1$ (так называемый V-цикл), $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ на сеточном уровне $k = 6$. Звёздочкой отмечены

релаксационные схемы, для которых подбиралось оптимальное значение параметра релаксации ω ; для остальных схем использовалось значение $\omega = 1$.

В процессе вычислений проводилось 15 итераций CGC-алгоритма, начиная с нулевого начального приближения; значение множителя уменьшения ошибки ρ_k усреднялось по последним пяти итерациям. Указанный подход учитывает “худший сценарий” сходимости алгоритма. На рис. 2 показано поведение фактора ρ_k в процессе итераций для релаксационной схемы 12 (ξ_2 -“зебра”) на всех сеточных уровнях $k = 1, 2, \dots, K = 6$ (сетка размером 64×192 на уровне 6). Из рисунка видно, что на протяжении первых двух–трёх итераций фактор ρ_k быстро возрастает и стабилизируется на уровне $\approx 0,3$, после чего с 8–9-й итерации начинается его постепенный рост до значений $\sim 0,4 \div 0,45$, что особенно проявляется на высших сеточных уровнях. На практике обычно редко используют более 10 CGC-итераций на каждом уровне FMG-алгоритма, поэтому в качестве “реалистичного сценария” можно принять в данном случае “значение стабилизации” $\rho_k = 0,3$.

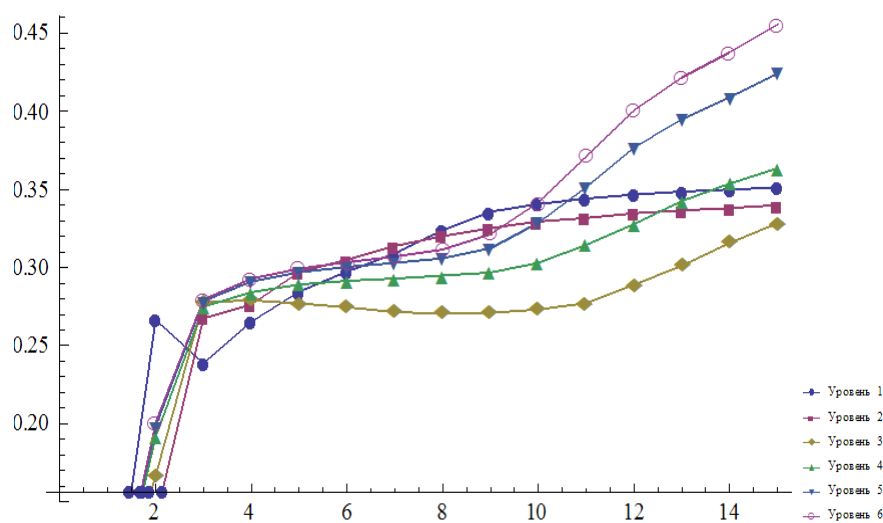


Рис. 2. График изменения множителя уменьшения нормы ошибки в процессе CGC-итераций

Рассмотрим теперь вопрос нахождения значений тройки параметров (ν_1, ν_2, γ) CGC-алгоритма. Обоснованием для выбора таких значений, отличных от тривиальных $(1, 0, 1)$, могло бы быть уменьшение коэффициента ρ_k за счёт дополнительных сглаживающих процедур как на уровне k , так и на более низких сеточных уровнях. Платой за такое возможное уменьшение ρ_k служит увеличение вычислительной работы, затрачиваемой на выполнение указанных процедур (в случае W -циклов добавляется по сравнению с V -циклами ещё работа на проектирование и интерполяцию сеточных функций с уровня на уровень). В качестве меры эффективности CGC-алгоритма рассмотрим показатель, определяющий количество вы-

числительной работы, необходимой для уменьшения нормы ошибки в определённое фиксированное число раз:

$$P_k^W = -\frac{W}{\ln \rho_k}. \quad (20)$$

За единицу вычислительной работы W принята одна итерация релаксационной схемы на верхнем (для CGC-алгоритма) сеточном уровне k . Поскольку при стандартном (изотропном) укрупнении число неизвестных на уровне $k-1$ будет в четыре раза меньше, одна релаксация на этом уровне будет стоить $1/4$ единицы, на уровне $k-2$ – $1/16$ единицы и т. д. В состав суммарной работы W одной итерации CGC-алгоритма не включается работа на интерполяцию, проектирование и решение системы (17) на нулевом уровне, поскольку эта работа одинакова для всех схем с разными значениями ν_1, ν_2 (для W -циклов, правда, эта работа примерно в 2 раза больше, чем для V -циклов).

Данные значений P_k^W из табл. 2 не подтверждают тезис о том, что дополнительная работа компенсируется уменьшением ρ_k за счёт производимого сглаживания поправок, и оптимальным является тривиальный выбор $(1,0,1)$ тройки параметров (ν_1, ν_2, γ) .

Таблица 2

Параметр удельной работы $P_k^W, k = 6$

ν_1	ν_2	γ	P_6^W
1	0	1	1,3742
1	1	1	1,9809
2	0	1	2,0066
2	1	1	2,5252
2	2	1	2,9734
3	0	1	2,5671
1	0	2	3,2754
1	1	2	5,1327
2	0	2	5,1742
2	1	2	6,9986
2	2	2	8,4331
3	0	2	7,03

Рассмотрим теперь полный многосеточный алгоритм. Он формулируется следующим образом.

Алгоритм FMG_CYCLE($\nu_1, \nu_2, \gamma, \mu_k$)

/* Алгоритм приближённого решения системы линейных уравнений $L_k u_k = F_k$ на самом высоком сеточном уровне K . Параметры ν_1, ν_2, γ те же, что и в алгоритме CGC_CYCLE, μ_k – число CGC-циклов на сеточном уровне k . */

Begin

1. Решить систему (17) прямым методом на сеточном уровне $k=0$. В результате решения получается величина $u_0^{(1)}$.

For $k=1$ to K do

Begin

2. Интерполяция полученного приближенного решения $u_{k-1}^{(1)}$ на более мелкую сетку:

$$u_k^{(0)} \leftarrow P_{k-1}^k u_{k-1}^{(1)}. \quad (21)$$

3. Уточнение решения на сеточном уровне k .

$$u_k^{(1)} \leftarrow u_k^{(0)}.$$

For $i \leftarrow 1$ to μ_k do $u_k^{(1)} \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(k, F_k, u_k^{(1)}, \nu_1, \nu_2, \gamma)$

End

4. Возвратить результат $u_K^{(1)}$.

End

Как уже отмечалось, задача FMG-алгоритма – это решение сеточной задачи (17) на наивысшем сеточном уровне $k=K$ “на уровне погрешности дискретизации”. Такая погрешность на уровне k в случае использования кусочно-линейных (по каждому из аргументов ξ_1, ξ_2) пробных и поверочных функций (при переходе от задачи (10) к дискретизованной задаче (15) оценивается как:

$$\varepsilon_k^d = \|u_k - u\| \leq ch_k^2, \quad (22)$$

где u_k – “точное” решение сеточной задачи (15); u – решение исходной дифференциальной задачи (1); h_k – характерный размер сетки, который определяется как некоторая норма вектора h_k , c – константа, не зависящая от h_k . Суммарная погрешность

ε_k^t приближённого решения исходной дифференциальной задачи (1) оценивается как сумма погрешности дискретизации ε_k^d и “погрешности метода” – ошибки

ε_k^m приближённого решения системы (15):

$$\varepsilon_k^t = \|\tilde{u}_k - u\| \leq \varepsilon_k^d + \varepsilon_k^m = \|u_k - u\| + \|\tilde{u}_k - u_k\|, \quad (23)$$

где $\tilde{u}_k = u_k^{(1)}$ – приближённое решение системы (15), полученное на этапе 3 много-сеточного FMG-алгоритма на уровне k .

Из формулы (23) следует, что при приближённом решении задачи (1) “на уровне погрешности дискретизации” не следует сильно уменьшать ошибку ε_k^m (это приведёт к напрасному расходу вычислительной работы); вполне достаточно, чтобы

$$\varepsilon_k^m \cong \varepsilon_k^d \quad (24)$$

(по порядку величины). Настройка FMG-алгоритма, заключающаяся в рациональном выборе чисел μ_k ($k=1,2,\dots,K$), улучшающих итераций на этапе 3 этого алгоритма, должна исходить из указанного соображения. Попробуем оценить, во сколько раз нужно уменьшить ошибку ε_k^m приближённого решения, полученного на этапе 2 интерполяцией с сеточного уровня $k-1$ по формуле (21), т. е. оценим фактор ρ_{\max} :

$$\|u_k^{(1)} - u_k\| \leq \rho_{\max} \|u_k^{(0)} - u_k\|, \quad (25)$$

для которого выполняется соотношение (24).

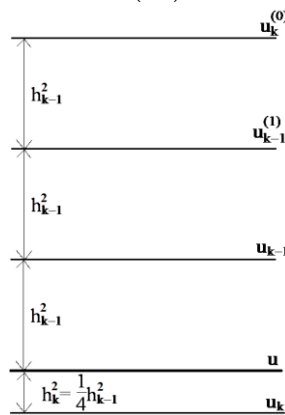


Рис. 3. Схема для оценки погрешностей в процессе применения FMG-алгоритма. Погрешность дискретизации на уровне $k-1$ имеет величину порядка h_{k-1}^2 (формула

(22), погрешность ε_{k-1}^m в конце этапа 3 по предположению (24) составляет такую

же величину; билинейная интерполяция приближённого решения $u_{k-1}^{(1)} \rightarrow u_k^{(0)}$ на уровне k на этапе (2) (формула (21)) вносит дополнительную погрешность также порядка $\sim h_{k-1}^2$; наконец, “точное” решение u_k сеточной задачи на уровне k отличается от “точного” решения дифференциальной задачи u на величину $\sim h_k^2$ (рис. 3). В итоге, для достижения “погрешностью метода” на уровне k величины $\sim h_k^2$ необходимо норму погрешности $\|u_k^{(0)} - u_k\|$ уменьшить в ~ 13 раз, что позволяет примерно оценить величину $\rho_{\max} \cong \frac{1}{13}$. Зная оценки для ρ_{\max} и ρ_k , можно получить оценку для числа уточняющих итераций μ_k :

$$\mu_k = \frac{\ln(\rho_{\max})}{\ln(\rho_k)}. \quad (26)$$

Например, для “пессимистичной” оценки для $\rho_k=0,4173$ и выбранной релаксационной схемы 12 получим $\mu_k=3$. На практике изучение поведения множителя уменьшения ошибки в процессе CGC-итераций на каждом уровне (табл. 3) свидетельствует о близости этого показателя к “реалистичной” оценке $\rho_k \cong 0,3$, указанной выше, что даёт значение $\mu_k=2$.

Таблица 3

**Множители уменьшения ошибки CGC-итераций
полного многосеточного алгоритма, $\mu_k = 3, k = 1, 2, \dots, 6$**

	Уровень 1			Уровень 2			Уровень 3		
Итерация	1	2	3	1	2	3	1	2	3
ρ	0,3562	0,2601	0,2407	0,3454	0,2534	0,2593	0,2918	0,2585	0,2556
	Уровень 4			Уровень 5			Уровень 6		
Итерация	1	2	3	1	2	3	1	2	3
ρ	0,2828	0,2757	0,2891	0,2832	0,2932	0,3075	0,2842	0,3012	0,3155

Поведение погрешностей $\varepsilon_k^d, \varepsilon_k^m, \varepsilon_k^t$ в процессе работы FMG-алгоритма представлено для $\mu_k=2$ на рис. 4. Вычисления проводились для пакета на рис. 1 с одинаковыми упругими константами для всех слоёв (по сути, для однослойного прямо-

угольного пакета), что допускает известное “аналитическое” решение u исходной дифференциальной задачи (1).

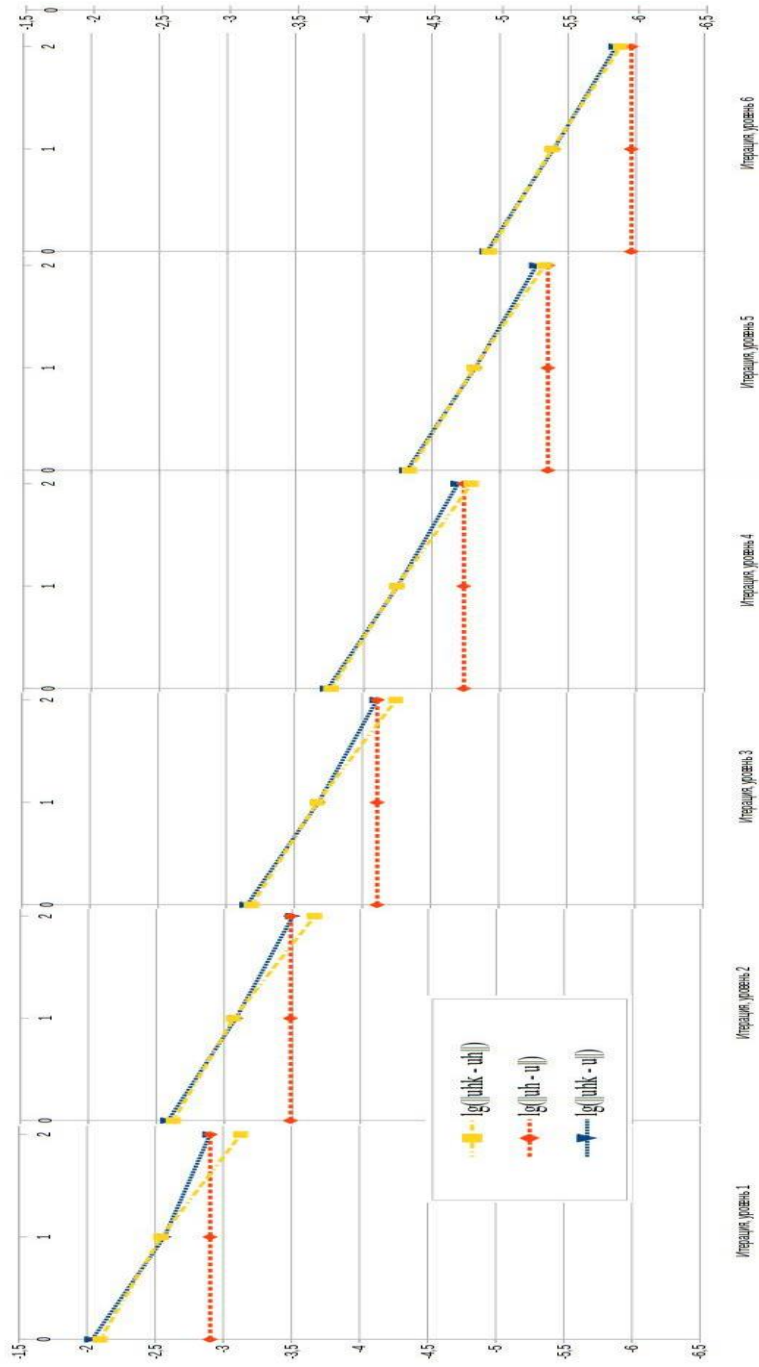


Рис. 4. График изменения логарифмов погрешностей $\varepsilon_k, \varepsilon_k^m, \varepsilon_k^t$ в процессе итераций FMG-алгоритма

Из графиков видно, что указанное значение числа итераций $\mu_k = 2$ на каждом сеточном уровне достаточно, чтобы получить приближённое решение задачи (1) “на уровне погрешности дискретизации” на наивысшем сеточном уровне K . Также заметна некоторая “переработка” CGC-итераций на нижних уровнях, что объясняется “точным” решением сеточной задачи (17) на нулевом уровне, то есть сведением к нулю на этом уровне “погрешности метода”. Это означает, что в принципе на нижних уровнях значения μ_k можно брать несколько меньшими. Впрочем, это лишь незначительно повлияет на общую “стоимость” алгоритма, поскольку основная часть вычислительной работы выполняется на самых верхних сеточных уровнях.

Выводы из данного исследования и перспективы дальнейших исследований в данном направлении. Изложенная в данной работе на примере граничных задач для упругих (упругопластических) слоистых пакетов с криволинейными границами методика эффективной настройки многосеточных алгоритмов может быть применена для достаточно широкого круга задач механики деформируемого твёрдого тела. Реализация этой методики требует разработанного программного инструментария для реализации многосеточных итерационных алгоритмов. Собственно, подобный инструментарий и необходим для разработки современных программных комплексов для решения эллиптических граничных задач. Правда, для реализации методик настройки необходимо разработать весь “спектр” релаксационных процедур (в данной работе их рассмотрено 12). Однако разработка таких процедур составляет лишь малую часть работы по созданию всего “многосеточного инструментария”.

Список использованных источников:

1. Трофімов О. В. Багатосіткові методи у зворотних задачах для систем із розподіленими параметрами / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2014. – № 1 (51). – С. 140–147.
2. Trottenberg U. Multigrid / Trottenberg U., Oosterlee C. W., Schuller A. – N.-Y. : Academic Press, 2001. – 644 p.
3. Wienands R. Extended local Fourier analysis for multigrid: Optimal smoothing, coarse grid correction, and preconditioning : thesis / Wienands R. ; University of Cologne. – Cologne, Germany, 2001.
4. Wienands R. Practical Fourier Analysis for multigrid methods / R. Wienands, W. Joppich. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press, 2005. – 212 p.
5. Трофімов О. В. Застосування локального аналізу Фур’є для конструювання багатосіткових ітераційних методів розв’язання пружних та пружнопластичних задач для шаруватих основ / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2015. – № 1 (53). – С. 140–155.
6. Писаренко Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. – К. : Наук. думка, 1981. – 496 с.
7. Thompson J. F. Handbook of Grid Generation / Thompson J. F., Soni B., Weatherill N. – N.-Y. : CRC Press, 1999. – 1096 p.
8. Трофімов О. В. Многосеточные итерационные алгоритмы построения сеток для упругих и упругопластических слоистых пакетов / О. В. Трофімов, Ю. В. Петрова // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2015. – № 2 (54). – С. 69–81.