МІНІСТЕРСТВО ФІНАНСІВ УКРАЇНИ
Дніпропетровська державна фінансова академія

О.А.Рядно
Ю.В. Шерстенников

Математичне моделювання підприємницької діяльності

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
економічних спеціальностей

Дніпропетровськ - 2011

УДК 334.75:519.876.5
ББК 65в6

Рекомендовано
Міністерством освіти, науки, молоді
та спорту України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів України
(Лист № 1/11-4854 від 15.06.11)

Рядно О.А., Шерстенников Ю.В.
Р 97 Математичне моделювання підприємницької діяльності : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів економічних спеціальностей. – Дніпропетровськ: ДДФА, 2011. – 352 с.
ISBN 978-966-8866-60-9

У навчальному посібнику викладено процедури вибору оптимальних варіантів виробничої програми підприємства на етапі стратегічного управління виробничо-фінансовою діяльністю. Особливе значення приділено дослідженню моделей управління фірмою.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, приклади, питання для самоконтролю, задачі для самостійного розв’язку.

Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та всіх, кто цікавиться проблемами екноміко-математичного моделювання підприємницької діяльності.

Рецензенти

Н.К. Васильєва – доктор економічних наук, професор

С.Л. Лондар – доктор економічних наук, професор

В.Є. Момот – доктор економічних наук, професор

Затверджено вченою радою
Дніпропетровської державної фінансової академії
Протокол № 9 від 30.06.2010

ISBN 978-966-8866-60-9

ЗМІСТ

ВСТУП

Сутність підприємницької діяльності

Поняття «підприємництво» вперше було вжито на початку XVIII ст. англійським економістом Р. Кантільоном і означало особливу економічну функцію, важливою рисою якої є ризик. У наступний період воно розвивалось, збагачувалося у працях А. Сміта, Д. Рікардо, Ж.-Б. Сея, А. Маршалла. Серед відомих західних економістів XX ст. важливий внесок в обґрунтування нових функцій та рис підприємця зробили Й. Шумпетер, Ф. Хаєк, П. Дракер, П. Самуельсон, У. Ростоу, Р. Арон та ін. [16].

Найповніше сутність цієї категорії серед західних економістів розкрив американський економіст Й. Шумпетер. Основними функціями підприємця він називав виготовлення нового блага (або старого блага нової якості), освоєння нового ринку збуту, джерел сировини та матеріалів, нових методів виробництва, його реалізації тощо.

Теоретичні і практичні аспекти підприємницької діяльності відображені в наукових працях таких вітчизняних учених, як Б. Адамов, О. Амоша, Я. Берсуцький, Л. Буряк, З. Варналій, Л. Воротіна, А. Воронков, В. Геєць, М. Єрмошенко, О. Кириченко, Т. Клебанова, К. Ковальчук, А. Козаченко, Ю. Лисенко, В. Ляшенко, Ю. Макогон, Л. Мартинюк, Л. Матросова, В. Сахаров, О. Стороженко, М. Чумаченко та багатьох інших.

Сучасними основними функціями підприємництва є новаторська, організаційна, господарська, соціальна та особистісна. Основними рисами підприємця є насамперед орієнтування на особистісний фактор економічного зростання, вміння об'єднати людей, висока професійна підготовка, прагнення задовольнити інтереси споживачів, цілеспрямованість, енергійність, сміливість, гнучкість та ін.

На основі всебічної характеристики головних функцій підприємництва можна дати комплексне визначення його сучасної сутності.

Підприємництво *– самостійне організаційно-господарське новаторство на основі використання різних можливостей для випуску нових товарів або старих новими методами, відкриття нових джерел сировини, ринків збуту тощо з метою отримання прибутків та самореалізації власної мети.*

Підприємницька діяльність *– праця індивіда, заснована на розвитку особистісних чинників, розширенні знань про свої можливості, що спрямована на досягнення найкращого результату в господарській діяльності, отримання економічної вигоди і насамперед привласнення додаткового продукту.*

Суб’єктом підприємницької діяльності є фірма. Мікроекономічна теорія дає такі визначення [17].

Фірма *– це основна виробнича одиниця (виробник), яка купує виробничі ресурси, використовує їх для виготовлення товарів і послуг з метою подальшої реалізації на товарному ринку та отримання максимального прибутку.* Прибуток є тим визначником, що оцінює становище фірми як у довгостроковому, так і в короткостроковому періодах і стимулює її до конкуренції.

Фірма може володіти та управляти одним або кількома підприємствами. ***Підприємство*** *– це той підрозділ фірми, де розміщується виробництво – вхідні виробничі фактори трансформуються у вихідну продукцію.* Прикладом підприємства є магазин, фабрика, шахта, ферма, стоматологічний кабінет тощо. Коли підприємство виробляє предмети споживання (одяг, цукерки, іграшки), – то це ***фабрика.*** Коли підприємство виробляє інвестиційні блага (автобуси, телевізори, обладнання), – то це ***завод***.

Коли фірма володіє та управляє кількома подібними підприємствами, то їй властива ***горизонтальна структура.*** Якщо кожне з підприємств є особливою стадією виробництва, то такій фірмі властива ***вертикальна структура***. Великим фірмам властива одночасно і вертикальна, і горизонтальна структури.

Існують ***фірми-конгломерати,*** що виробляють широкий асортимент різних товарів і послуг для продажу на ринку. У конгломераті провідне місце займає «батьківська фірма», яка купує певну кількість різних, уже існуючих підприємств, щоб сформувати конгломерат. Придбані підприємства розглядаються як допоміжні щодо контролюючої «батьківської» фірми. Конгломерат може виробляти папір, цукор, автозапчастини, дитячі іграшки тощо.

Загалом на ринку є різноманітні фірми. З одного боку, це великі гіганти, такі як «Дженерел Моторс», що захоплюють своїми товарами більшу частину ринку, з іншого – це багато малих фірм, таких як ресторани, магазини, салони тощо, кожна з яких виробляє порівняно незначний обсяг продукції і володіє мізерною частиною ринку.

Фірма є юридичною особою, що діє в рамках зобов'язань і обмежень, визначених законом. Розрізняють три основні правові форми фірм, кожна з яких має свої переваги і недоліки:

- одноосібне підприємство;
- партнерство;
- корпорація.

Одноосібне підприємство. Сама назва вказує на те, що власник і підприємець поєднуються в одній особі, яка приймає всі рішення і несе повну відповідальність за роботу фірми. Прикладом одноосібного підприємства може бути ферма, магазинчик, перукарня, стоматологічний кабінет, юридична консультація тощо.

Переваги: 1) лише власник є господарем і має повний контроль над діяльністю фірми; 2) одноосібне підприємство легко заснувати і зареєструвати. Виняток становлять сфери діяльності, де потрібно мати ліцензію.

Недоліки: 1) необмежена відповідальність за борги і зобов'язання. Якщо власник збанкрутує, то його особиста власність і майно можуть бути захоплені кредиторами фірми; 2) сам власник повинен виконувати багато різносторонніх обов'язків щодо керівництва та роботи фірми; 3) ресурси одноосібного підприємства обмежені розмірами грошового капіталу, яким володіє або який може взяти в позику власник;

4) одноосібне підприємство – це малий обсяг виробництва і праці, незначний асортимент продукції.

Партнерство. Партнерство формується тоді, коли двоє чи більше людей об'єднуються і погоджуються на спільне володіння та управління фірмою. Кожен із партнерів виконує визначені обов'язки і є особисто відповідальним за діяльність фірми.

Переваги: 1) оскільки власників більше, ніж один, то фінансові ресурси є значно більшими, ніж за умов одноосібного підприємства. А отже, є можливість отримувати більші кредити; 2) обов'язки між партнерами розподіляються, що дозволяє поглибити спеціалізацію та підвищити економічну ефективність фірми.

Недоліки: 1) необмежена відповідальність партнерів за борги і зобов'язання фірми, що породжує певну несправедливість: партнери, які володіють різною власністю фірми – чи то 10%, чи 50%, чи 90% - однаково відповідають за її збитки і банкрутство; 2) партнерські угоди щоразу змінюються і реорганізуються при виході партнера зі справи.

В інтересах розвитку фірми може бути сформоване так зване обмежене (лімітоване), або «мовчазне», партнерство, яке передбачає часткову відповідальність за борги фірми. «Лімітований» партнер ризикує лише тією часткою капіталу, яку інвестує у фірму. Він не бере участі в управлінні фірмою, не укладає від її імені угод, а тільки отримує певну частку від прибутку фірми за вкладений капітал.

Корпорація **–** це акціонерне товариство, що діє на основі обмеженої відповідальності через володіння акціями. Правова суть акціонерного товариства є докорінно відмінною від одноосібного підприємства або партнерства. Корпорація може брати участь в угодах, надавати борги і приймати зобов'язання, подавати позов і підлягати позову, але все це здійснюється від імені корпорації, а не від імені її власників. Власники, або акціонери, зацікавлені в діяльності фірми через володіння акціями. Вони отримують частину прибутку фірми відповідно до своєї частки в акціях. Типова корпорація випускає акції, які купують приватні особи. Гроші, отримані від продажу частини акцій, називаються чистою вартістю корпорації і відображають боргові вимоги (претензії) акціонерів. Звичайні акціонери мають право одного голосу за одну акцію, якою володіють. На зборах акціонерів вони обирають директорський склад, який визначає загальну стратегію корпорації та вирішує питання найму вищого управлінського складу, насамперед головного менеджера. Акціонери мають право брати участь у розподілі прибутку корпорації. Розподілений прибуток корпорації називається дивідендами, які не є обов'язковими і постійними. Нерозподілений прибуток корпорації законно належить акціонерам, але реінвестується в діяльність фірми. Коли корпорація ліквідується, акціонери розподіляють усе майно, що залишилося після сплати боргів.

Переваги: 1) обмежена відповідальність власників, що приваблює як великих, так і малих інвесторів і залучає фінансовий капітал із різних джерел; 2) акції корпорації легко купити і продати на ринку цінних паперів. Зміна власника акцій не впливає на діяльність фірми.

Недоліки: 1) порівняно великі витрати та складний процес організації чи призупинення діяльності корпорації. Наприклад, антимонопольне законодавство США передбачає для корпорації 41 тис. вимог; 2) найвагоміший вплив у корпорації має той, хто володіє більшою часткою акцій, тому контроль над корпорацією з боку акціонерів є обмеженим; 3) подвійне оподаткування прибутку корпорації: спочатку оподатковується прибуток у цілому, а потім оподатковуються дивіденди акціонерів. Щодо акціонерів така схема оподаткування є несправедливою і дискримінаційною.

Нині корпоративна форма організації домінує в ринковому світі. Причиною цього є обмежена відповідальність власників-акціонерів.

Незалежно від правової форми, кожна фірма працює для того, щоб отримати прибуток. Для цього вона купує вхідні виробничі фактори або ресурси, тобто здійснює виробничі витрати для виготовлення кінцевої продукції.

***Прибуток** – це різниця між доходом і витратами фірми.* Економічна наука досліджує три види прибутку: економічний, бухгалтерський і нормальний.

***Економічний прибуток (ЕР)** – це різниця між загальним доходом і загальними витратами, що складаються як з явних, так і неявних витрат фірми.* Можемо записати:

$$EP = TR - TC,$$

$$TC = EC + IC,$$

де EP – економічний прибуток;
TR – загальний дохід;
TC – загальні витрати;
EC – явні витрати;
IC – неявні витрати.

***Бухгалтерський прибуток (ВР)** – це різниця між загальним доходом і явними витратами фірми.* Його ще називають ***розрахунковим прибутком**,* оскільки явні витрати – це грошові платежі, що розраховуються в бухгалтерії.

$$BP = TR - EC,$$

де BP – бухгалтерський прибуток;
TR – загальний дохід;
EC – явні витрати.

***Нормальний прибуток (NP)** – це той мінімальний прибуток, який має отримати підприємець, щоб продовжувати свою виробничу діяльність, тобто залишатися в бізнесі.* Це плата за виконання підприємницьких функцій. Інакше можна сказати, що нормальний прибуток – це той дохід, від якого власник фірми відмовляється, використовуючи власні ресурси у своїй фірмі, але цей дохід він міг би отримати, вкладаючи свої ресурси в іншу фірму. Нормальний прибуток є неявною витратою, що є складовою економічних витрат. За нульового економічного прибутку фірма покриває всі свої витрати – явні та неявні – і отримує нормальний прибуток.

Принципи моделювання підприємницької діяльності

Робота промислових підприємств, фірм в умовах ринку передбачає свободу господарської ініціативи, що визначає принципи стратегічного управління виробничо-фінансовою діяльністю.

У ринковій економіці підприємство самостійно визначає раціональні варіанти всіх складових виробничо-фінансової діяльності на основі балансу інтересів виробників і споживачів продукції, що випускається. При цьому однією з економічних оцінок ефективності підприємства є прибуток, що залишається в його розпорядженні. Тому основним завданням в умовах ринку є підвищення ефективності функціонування підприємства шляхом оптимізації використання його ресурсів, у тому числі фінансових, і розробка найбільш раціональної виробничої програми, а також планів підприємства щодо підвищення ефективності його функціонування.

Саме ці принципи й лягли в основу побудови розглянутих у цьому посібнику економіко-математичних моделей.

Ключовим питанням при оптимізації діяльності підприємства є побудова його виробничої програми з урахуванням найбільш раціонального використання ресурсів підприємства. Для визначення обсягів прибутку від реалізації продукції при різних варіантах виробничої програми необхідно мати дані про ціну реалізації продукції й собівартості її виготовлення, а також дані про обсяг випуску продукції по кожному виду продукції. Виробнича програма формується виходячи з наявних у підприємств ресурсів (матеріально-сировинних, виробничих, фінансових і т.ін.).

Процедура вибору оптимального варіанта виробничої програми підприємства на етапі стратегічного управління виробничо-фінансовою діяльністю включає: генерацію варіантів перспективної виробничої програми; розрахунки обсягу товарної продукції, відповідного до кожного варіанта виробничої програми й запланованого балансового прибутку; визначення витрати матеріально-сировинних і інтенсивності використання виробничих ресурсів для кожного варіанта.

При розв'язку такого завдання стратегічного управління як формування плану технічного переозброєння підприємства, особливо в умовах використання ним кредитних коштів для реалізації даного проекту, виникає необхідність генерації й порівняння альтернативних варіантів його виробничо-технологічної й організаційно-технічної структур із наступним вибором найбільш раціональних варіантів, що забезпечує досягнення рівня, який відповідає критерію оптимальності. В умовах директивної економіки при здійсненні заходів щодо реконструкції виробництва умови оптимальності ігнорувалися з причин великої трудомісткості генерації альтернативних варіантів і їх різноманіття, а також складності визначення показника ефективності для кожного варіанта.

При здійсненні економічної оцінки варіантів фінансування робіт зі створення нового або реконструкції діючого підприємства із залученням для фінансування кредиту найкращим варіантом визнається той, який забезпечує, по-перше, найбільшу ефективність від використання ресурсів для реалізації проекту й, по-друге, що забезпечує його учасникам найбільшу рентабельність виробництва. Тому основною метою, яка ставиться при моделюванні, є знаходження оптимального розв'язку задачі одержання підприємством максимального прибутку як найважливішого завдання підприємства шляхом оптимізації виробничої програми в умовах обмежень на час використання обладнання, матеріальних і фінансових ресурсів, а також в умовах використання кредиту для поповнення обігових коштів і реалізації інвестиційних програм. Крім того, важливим є розв'язок завдання мінімізації терміну окупності проекту з метою зробити кредит більш доступним для підприємства й скоротити витрати на обслуговування боргу.

Розв'язок завдання управління кредитними ресурсами підприємства з використанням моделей реалізується шляхом аналізу результатів, отриманих у процесі моделювання різних варіантів виробничо-господарської діяльності підприємства з урахуванням використання ним позикових коштів.

Запропонований механізм дозволяє вирішувати питання управління підприємством у ході поточної діяльності й при проведенні реорганізаційних заходів, коли підприємство використовує банківський кредит у своїй діяльності. До таких заходів відноситься реалізація програм розширення й реорганізації виробництва, переходу на випуск нової продукції тощо. Використання моделей дозволяє вирішувати питання формування оптимальної виробничої програми підприємства, здійснення інвестицій у виробництво, а також допомагає при здійсненні стратегічного планування розвитку підприємства.

Особливе значення має дослідження моделей управління фірмою, які є придатними для періоду перехідної економіки, пов'язаного з проведенням ринкових реформ. Характерним для цього періоду є, з одного боку, оцінка діяльності фірми з погляду одержуваного прибутку (валового, балансового, чистого і т.ін.) або динаміки зростання курсової вартості акцій фірми, а з іншого – поява таких атрибутів перехідної економіки як: високий темп інфляції, дефіцит матеріальних, фінансових, сировинних та інших видів ресурсів, недосконалість законодавства, нерозвиненість банківського сектору економіки тощо.

Внаслідок цього зростає роль урахування невизначеності й ризиків при аналізі тієї або іншої економічної ситуації. У розглянутих моделях пропонуються декілька підходів аналізу невизначеності: а) підхід, за яким для параметрів може бути встановлений імовірнісний розподіл; б) дослідження невизначеності, при якій імовірнісний розподіл величини є невідомим, але визначена область їхньої зміни.

Важливим питанням підприємницької діяльності є проблема реалізації товарів і послуг. Відповідні математичні підходи до цієї проблеми розглянуті в заключній частині посібника.

ЧАСТИНА 1. ПЛАНУВАННЯ ПІДПРИЄМНИЦЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

РОЗДІЛ 1. **ОБҐРУНТУВАННЯ ВИБОРУ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПРОЕКТУ**

Підприємницька діяльність вимагає постійної модернізації власних форм і методів: розширення виробництва, переозброєння підприємства, переходу на випуск нової продукції, створення нових фірм і підприємств. Організація нових підприємств і модернізація діючих передбачає залучення додаткових інвестицій. При цьому інвестиції можуть здійснюватися як самим підприємством, його власниками, так і сторонніми кредитними організаціями. Проблема пошуку найбільш ефективних умов інвестування, що враховують оптимальну виробничу програму підприємства, має неабияке значення. Причому дана проблема актуальна не тільки для підприємства, але й для інвестора. Адже обидва ці суб'єкти вирішують завдання визначення умов інвестування для одержання від них максимального економічного ефекту.

У цьому розділі ми розглянемо один із найбільш важливих методів моделювання мікроекономічних систем, який заснований на розробці й застосуванні широкого класу лінійних оптимізаційних моделей. Основний метод дослідження в цьому розділі – метод лінійного програмування (див. [11]).

1.1. Вибір інвестиційних проектів в умовах обмежених фінансових ресурсів

При виборі інвестиційного проекту інвесторові, як правило, доводитися приймати рішення в умовах обмежених фінансових ресурсів. Завдання вибору інвестиційних проектів в умовах обмежених фінансових ресурсів розглянемо на наступному прикладі.

Приклад. Перед менеджерами компанії постає завдання вибору інвестиційних проектів в умовах обмежених фінансових ресурсів. Інвестиційна компанія розглядає як можливі об'єкти для інвестування чотири проекти. Проект *A* може принести прибуток 23 тис. дол., проект *B* - 20 тис. дол., проект *C* - 19 тис. дол., проект *D* - 22 тис. дол. Проекти можуть бути реалізовані протягом одного року й вимагають поквартального фінансування. Необхідні обсяги інвестицій зведено в таблиці.

Проект	**Потреба в коштах (тис. дол. / квартал)**				**Очікуваний прибуток**
	1-й	**2-й**	**3-й**	**4-й**	
A	10,8	10,8	13,5	13,5	23,0
B	9,45	12,15	12,15	14,85	20,0
C	6,75	9,45	12,15	14,85	19,0
D	12,15	10,8	9,45	8,1	22,0

Можливості компанії дозволяють їй інвестувати в першому кварталі не більше 30 тис. дол., у другому - не більше 32, у третьому - не більше 36 й у четвертому - не більше 37 тис. дол.

Які з проектів доцільно вибрати і яка кількість коштів буде потрібна в кожному кварталі для того, щоб дістати максимальний прибуток?

Етапи розв’язку

1. Зведемо всю наявну інформацію в таблицю.

Проект	**Потреба в коштах (тис. дол.)**				**Очікуваний прибуток**
	1-й	**2-й**	**3-й**	**4-й**	
A	10,8	10,8	13,5	13,5	23,0
B	9,45	12,15	12,15	14,85	20,0
C	6,75	9,45	12,15	14,85	19,0
D	12,15	10,8	9,45	8,1	22,0
Доступні кошти	30	32	36	37	

2. Введемо в розгляд бульові змінні x_1, x_2, x_3, x_4, кожна з яких приймає тільки два значення - нуль або одиниця, а саме:

$x_i = 1$, якщо *i*-й проект вибирається як об'єкт для інвестування (i = 1, 2, 3, 4);

$x_i = 0$, якщо *i*-й проект не вибирається як об'єкт для інвестування (i = 1, 2, 3, 4).

3. З урахуванням введених позначень, складаємо цільову функцію задачі:

$$Z = 23x_1 + 20x_2 + 19x_3 + 22x_4.$$

4. Будь-який припустимий розв’язок розглянутого завдання (будь-який план інвестування) повинен задовольняти фінансовим можливостям компанії - обмеженням по коштах, доступних у кожному кварталі. Складаємо систему обмежень:

$$\begin{cases} 10{,}8x_1 + 9{,}45x_2 + 6{,}75x_3 + 12{,}15x_4 \le 30, \\ 10{,}8x_1 + 12{,}15x_2 + 9{,}45x_3 + 10{,}8x_4 \le 32, \\ 13{,}5x_1 + 12{,}15x_2 + 12{,}15x_3 + 9{,}45x_4 \le 36, \\ 13{,}5x_1 + 14{,}85x_2 + 14{,}85x_3 + 8{,}1x_4 \le 37. \end{cases}$$

5. Врахувуємо, що на змінні накладені умови:

x_1, x_2, x_3, x_4 рівні або 0, або 1.

6. Із застосуванням табличного процесора Excel знаходимо розв'язок задачі лінійного програмування, а саме – набір змінних x_1, x_2, x_3, x_4, що задовольняє обмеженням (п.п. 4 і 5), за якого цільова функція (п. 3) досягає максимуму:

Проект	**Потреба в коштах (тис. дол.)**				**Очікуваний прибуток**	**Значення зміних**
	1-й кв.	**2-й кв.**	**3-й кв.**	**4-й кв.**		
A	10,8	10,8	13,5	13,5	23,0	x_1=1
B	9,45	12,15	12,15	14,85	20,0	x_2=0
C	6,75	9,45	12,15	14,85	19,0	x_3=1
D	12,15	10,8	9,45	8,1	22,0	x_4=1
Доступні кошти	30	32	36	37		
Обмеження	29,70	31,05	35,10	36,45		
Цільова функція	64,00					

Відповідь.

- Для інвестування доцільно вибрати проекти A, B, D.
- При такому виборі буде отримано максимальний прибуток у розмірі 64 тис. дол.
- Для фінансування проектів буде потрібно: у першому кварталі – 29700 дол., у другому – 31050 дол., у третьому – 35100 дол., у четвертому – 36450 дол.

1.2. Оптимальний вибір з n проектів

Розглянемо задачу найекономічнішого вибору декількох із n різних виробничих інноваційних проектів. За умов забезпечення випуску заданих обсягів виробництва продукції й обмежень з кількості основних виробничих ресурсів ця задача може бути поданою так:

$$\left.\begin{aligned}
&y = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j \to \min,\\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m},\\
&\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j \ge d_k, \quad k = \overline{1,p},\\
&x_j \in \{0;1\}, \qquad j = \overline{1,n}.
\end{aligned}\right\}$$

У записі задачі використані такі позначення величин, які вважаються відомими: n – кількість різних продуктових інноваційних проектів; j - номер окремого проекту $(j=\overline{1,n})$; m - кількість видів дефіцитних виробничих ресурсів; i - номер окремого виду ресурсів $(i=\overline{1,m})$; p - кількість видів продукції; k - номер окремого виду продукції $(k=\overline{1,p})$; e_j зведені витрати, пов'язані з впровадженням j-го інноваційного проекту; a_{ij} потреба в ресурсах i-го виду для впровадження j-го проекту; b_j - наявний обсяг виробничих ресурсів i-го виду; c_{kj} - обсяг випуску k-го виду продукції за умов реалізації j-го інноваційного проекту; d_k - мінімально необхідний випуск k - ї продукції.

Невідомими в задачі виступають: x_j логічна змінна, що відбиває факт вибору для впровадження j-го інноваційного проекту $x_j=1$, якщо j-й проект буде обраним для впровадження, і $x_j=0$, якщо цей проект буде відхилено; y- сукупні зведені витрати, пов'язані з впровадженням усіх тих інноваційних продуктових проектів, що будуть обраними.

Ця задача, як і задача з п. 1.1, відноситься до класу задач лінійного програмування типу з бульовими змінними.

Як приклад, опрацюємо задачу планування розвитку та розміщення виробництва (галузі, корпорації) з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів. Постановка задачі полягає у наступному. З метою задоволення попиту продукції слід забезпечити виробництво необхідними виробничими потужностями. Для вирішення цієї проблеми до уваги слід взяти усі можливі варіанти розвитку діючих підприємств, а також наявні проекти уведення в дію нових підприємств. Вибір конкретних варіантів розвитку та розміщення підприємств здійснюється з урахуванням обсягів інвестиційних ресурсів, які можна буде використати для підтримки та нарощування виробничих потужностей. Критерієм оптимальності може слугувати вимога мінімізації необхідних загальних зведених інвестиційних витрат, витрат на виробництво продукції та на її перевезення до споживачів. Побудуємо економіко-математичну модель цієї задачі. Для цього, насамперед, введемо такі позначення для відомих величин (некерованих параметрів):

i – номер підприємства, існуючого або запроектованого $(i=\overline{1,m})$;

j – номер варіанта розвитку i-го підприємства $(j=\overline{1,n_i})$;

N_{ij} – виробнича потужність i-го підприємства за умови його розвитку за j–м варіантом;

I_{ij} – інвестиційні витрати, необхідні для реалізації j-го варіанта розвитку на i-му підприємстві;

R – максимально можливий обсяг інвестиційних витрат, які спрямовуватимуться на забезпечення розвитку усіх підприємств;

e – нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій (норма дисконту);

c_{ij} – вартість одиниці продукції, яку буде виготовлено на i-му підприємстві за умови його розвитку за j варіантом;

k – номер споживача продукції $(k = \overline{1, p})$;

b_k – попит на продукцію з боку k-го споживача;

d_{ik} – транспортні витрати на перевезення одиниці продукції за маршрутом $i \to k$.

Невідомими виступають:

x_{ij} – логічна змінна, яка відбиває факт вибору для реалізації j – го варіанта розвитку i – го підприємства:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i-\text{те підприємство буде} \\ & \text{розвивватися за } j-\text{м варіантом}, \\ 0, & \text{у супротивному випадку}; \end{cases}$$

y_{ij} – обсяг виробництва продукції на i-му підприємстві відповідно до j-го варіанта його розвитку; .

z_{ik} – обсяг перевезень продукції за маршрутом $i \to k$;

v - загальні зведені витрати на інвестування, виробництво та перевезення продукції.

За введених позначень економіко-математична модель задачі планування розвитку та розміщення виробництва з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів набирає вигляду:

$$v = e\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} I_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} d_{ik}z_{ik} \to \min$$

$$x_{ij} \in \{0;1\},\ i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} I_{ij}x_{ij} \le R;$$

$$0 \le y_{ij} \le N_{ij}x_{ij},\ i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \sum_{k=1}^{p} z_{ik},\ \ i=\overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} \ge b_k,\ k=\overline{1,p}\ \ ;$$

$$z_{ik} \ge 0,\ i=\overline{1,m},\quad k=\overline{1,p}.$$

Наведена математична модель являє собою задачу частково цілочислового лінійного програмування з бульовими змінними. Її розв'язування доцільно здійснювати з використанням спеціальних прикладних програм на ПЕОМ. За невеликої кількості змінних у нагоді може стати підпрограма «Пошук рішення» пакета Excel. Методику використання підпрограми «Пошук рішення» у пакеті Excel докладно розглянуто у навчальному посібнику [12]. Розглянемо конкретний числовий приклад.

Приклад. Припустимо, що деяка однорідна продукція виготовляється на двох підприємствах П-1 та П-2. Окрім цього, у разі необхідності може бути збудоване і третє підприємство П-3. Потенційними альтернативними варіантами розвитку цих підприємств є такі (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Варіанти розвитку підприємств

П-1	1. Залишити виробничу потужність на поточному рівні
	2. Збільшити виробничу потужність за рахунок модернізації обладнання на 30%
	3. Збільшити виробничу потужність за рахунок розширення виробництва на 50%
П-2	1. Залишити виробничу потужність на поточному рівні
	2. Збільшити виробничу потужність за рахунок модернізації обладнання на 15%
П-3	1. Організувати виробництво за проектом А
	2. Організувати виробництво у більшому розмірі за проектом Б

Більш докладна інформація щодо кожного з варіантів розвитку підприємств зведена у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Основні техніко-економічні показники потенційних варіантів розвитку підприємств

Показник, одиниця виміру	П – 1			П – 2		П – 3	
	В – 1	В – 2	В – 3	В – 1	В – 2	В – 1	В – 2
Виробнича потужність, тис. од. продукції на рік	100	130	150	200	230	100	150
Необхідні інвестиційні витрати, млн.грн.	1,0	12,0	20,0	3,0	15,0	75,0	90,0
Вартість виробництва одиниці продукції, грн.	200	200	190	180	170	170	160

Прогнозне значення перспективного попиту на продукцію дорівнює 400 тис. од. продукції на рік, з наступним розподілом між трьома споживачами: $C-1$ - 160 тис. од. пр./рік, $C-2$ - 130 тис. од. пр./рік, $C-3$ - 110 тис. од. пр./рік.

Транспортні витрати на перевезення одиниці продукції від виробників споживачам, за прогнозами експертів, складатимуть (табл. 1.3).

Таблиця 1.3

Транспортні тарифи (гривень за одиницю продукції)

Підприємство	Споживач		
	С – 1	С – 2	С – 3
$\Pi-1$	5	15	25
$\Pi-2$	10	10	5
$\Pi-3$	5	20	15

Максимально можливий обсяг залучення інвестицій на розвиток усіх підприємств - 95 млн. грн. Нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій - 0,2. Який план розвитку підприємств слід вибрати?

Математична модель для розв'язування цієї задачі набере вигляду:

$$v = 0.2 \cdot (1x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 3x_{21} + 15x_{22} + 75x_{31} + 90x_{32}) \cdot 1000 +$$
$$+ 200y_{11} + 200y_{12} + 190y_{13} + 180y_{21} + 170y_{22} + 170y_{31} + 160y_{32} +$$
$$+ 5z_{11} + 15z_{12} + 25z_{13} + 10z_{21} + 10z_{22} + 5z_{23} + 5z_{31} + 250z_{32} + 15z_{33},$$
$$v \to \min,$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \in \{0;1\},$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1, \quad x_{21} + x_{22} = 1, \quad x_{31} + x_{32} \le 1,$$
$$1x_{11} + 12x_{12} + 20x_{13} + 3x_{21} + 15x_{22} + 75x_{31} + 90x_{32} \le 95,$$
$$0 \le y_{11} \le 100x_{11},\ 0 \le y_{12} \le 130x_{12}, \quad 0 \le y_{13} \le 150x_{13},$$
$$0 \le y_{21} \le 200x_{21},\ 0 \le y_{22} \le 230x_{22}, \quad 0 \le y_{31} \le 100x_{31},$$
$$0 \le y_{32} \le 150x_{32},$$
$$y_{11} + y_{12} + y_{13} = z_{11} + z_{12} + z_{13},$$
$$y_{21} + y_{22} = z_{21} + z_{22} + z_{23}, \qquad y_{31} + y_{32} = z_{31} + z_{32} + z_{33},$$
$$z_{11} + z_{21} + z_{31} \ge 160, \quad z_{12} + z_{22} + z_{32} \ge 130, \quad z_{13} + z_{21} + z_{33} \ge 110,$$
$$z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{31}, z_{32}, z_{33} \ge 0.$$

Знайдемо розв'язок цієї задачі, використовуючи електронну таблицю Excel.

Оптимальними варіантами розвитку підприємств визначено такі:

$П-1$- залишити виробничу потужність на поточному рівні – 100 тис. одиниць продукції на рік;

$П-2$ - збільшити виробничу потужність до 230 тис. одиниць продукції на рік за рахунок модернізації обладнання;

$П-3$ - організувати виробництво за проектом A з виробничою потужністю 100 тис. одиниць продукції на рік.

Обсяги виробництва на кожному з підприємств доцільно визначити такими:

$П-1$ - 70 тис. одиниць продукції на рік;

$П-2$ - 230 тис. одиниць продукції на рік;

$П-3$ - 100 тис. одиниць продукції на рік.

Резерв виробничих потужностей на випадок непередбаченого зростання попиту дорівнює 30 тис. одиниць продукції на рік. Цей резерв зосереджено на підприємстві $П-1$.

Прогнозовані потреби споживачів у продукції задовольнятимуться повністю. План постачання продукції наступний:

$П-1 \quad \to \ C-1$ 60 тис. одиниць продукції на рік;

$П-1 \quad \to \ C-2$ 10 тис. одиниць продукції на рік;

$П-2 \quad \to \ C-2$ 120 тис. одиниць продукції на рік;

$П-2 \quad \to \ C-3$ 110 тис. одиниць продукції на рік;

$П-3 \quad \to \ C-1$ 100 тис. одиниць продукції на рік.

Витрати на виробництво продукції дорівнюватимуть 70,1 млн.грн. на рік, транспортні витрати - 2,7 млн.грн. на рік. Інвестиційні витрати складатимуть 91 млн.грн., зведені інвестиційні витрати - 18,2 млн.грн.

Оптимальні загальні зведені витрати на інвестування, виробництво та перевезення продукції дорівнюють: 18,2+70,1+2,7=91 (млн.грн. на рік).

Задачу планування розвитку та розміщення виробництва з оптимальним розподілом інвестиційних ресурсів розв'язано.

1.3. Модель оптимізації фінансування інвестиційних проектів з урахуванням банківських відсотків

Розглянемо завдання фінансового планування. Таблиця 1.4, що наведена нижче, відображає п'ять проектів, які конкурують між собою за одержання інвестиційних фондів компанії. Таблиця 1.4 показує, яка готівка буде отримана від вкладення одного долара. Наприклад, проект А – це інвестиції, які можна зробити на початку року t на два наступні роки, причому наприкінці цього ж року можна повернути 30 центів на вкладений долар, а наприкінці наступного року можна додатково одержати ще один долар. Максимальна сума, яка може бути вкладена в цей проект, становить 500 000 дол. Проект В повністю аналогічний проекту А, але вкладення грошей можна зробити тільки на початку наступного року, і так далі. Гроші, отримані в результаті інвестицій, можна реінвестувати відповідно до запропонованої схеми. На додаток до цього компанія може одержати по 6% річних за короткотерміновий вклад усіх грошей, які не були вкладено в інвестиції в даному році.

Таблиця 1.4

Роки	**Проекти**				
	А	**В**	**С**	**Д**	**Е**
t	–1,00	0	–1,00	–1,00	0
$t+1$	+0,30	–1,00	+ 1,10	0	0
$t+2$	+1,00	+0,30	0	0	–1,00
$t+3$	0	+1,00	0	+1,75	+1,40

У компанії є 1 млн. дол. для інвестицій. Вона прагне максимізувати суму грошей, накопичених під кінець року $t+3$. Сформулюйте завдання ЛП (лінійного програмування). Отримайте розв'язок.

Позначимо:

X_1 - кошти, вкладені в проект А;

X_2- кошти, вкладені в проект В;

X_3 - кошти, вкладені в проект С;

X_4 - кошти, вкладені в проект Д;

X_5 - кошти, вкладені в проект Е;

X_6 - кошти, вкладені в банк під 6% річних на початку року t на рік;

X_7- аналогічна величина на рік $t + 1$;

X_8 - аналогічна величина на рік $t + 2$.

На рис. 1.1 представлений рух коштів, вкладених у проект *А*.

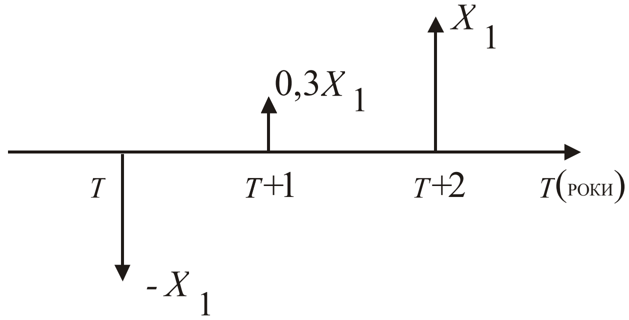


Рис. 1.1

Далі розглянемо рух усіх коштів протягом даного періоду.

На початку року t маємо 1000 тис. дол. Ці кошти можна вкласти в перше, третє або четверте підприємства (проекти). Залишок рівний X_6. Під кінець року ця сума збільшиться на 6%, тобто складе $1{,}06X_6$. Загальна сума грошей під кінець року t буде рівна:

$$0{,}3X_1 + 1{,}1X_3 + 1{,}06X_6.$$

Усі ці кошти можна вкласти в друге підприємство - проект (X_2) – або під 6% у банк (X_7).

Під кінець року $t + 1$ будемо мати:

$$X_1 + 0{,}3X_2 + 1{,}06X_7.$$

Усі наявні кошти можна вкласти в п'яте підприємство (X_5) або під відсотки в банк (X_8). При цьому під кінець року $t + 2$ одержимо суму:

$$F(X) = X_2 + 1{,}75X_4 + 1{,}4X_5 + 1{,}06X_8. \quad (1.1)$$

Будемо записувати всі суми в тисячах дол.

Тоді, розглянувши умови використання грошей, можна записати їх у вигляді рівностей:

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 + X_6 = 1000, \\ -0{,}3X_1 + X_2 - 1{,}1X_3 - 1{,}06X_6 + X_7 = 0, \\ -X_1 - 0{,}3X_2 + X_5 - 1{,}06X_7 + X_8 = 0. \end{cases} \qquad (1.2)$$

В умові завдання маємо обмеження на величину коштів:

$$X_{\mathrm{i}} \le 500\,,\ i = 1,...,5. \qquad (1.3)$$

Крім того, за змістом завдання змінні не можуть бути від'ємними:

$$X_4 \ge 0, i = \overline{1{,}8}\ \text{(при } i \text{ від 1 до 8).} \qquad (1.4)$$

Ми одержали завдання ЛП (лінійного програмування): максимізувати функцію (1.1) при умовах (1.2), (1.3), (1.4).

Доповнюючи нерівності (1.3) до рівностей за допомогою додаткових змінних $X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$, X_{13} одержуємо канонічне завдання ЛП: максимізувати цільову функцію (1.1) при обмеженнях:

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 + X_6 = 1000, \\ -0{,}3X_1 + X_2 - 1{,}1X_3 - 1{,}06X_6 + X_7 = 0, \\ -X_1 - 0{,}3X_2 + X_5 - 1{,}06X_7 + X_8 = 0, \\ X_1 + X_9 = 500, \\ X_2 + X_{10} = 500, \\ X_3 + X_{11} = 500, \\ X_4 + X_{12} = 500, \\ X_5 + X_{13} = 500, \\ X_j \ge 0, j = \overline{1{,}13}. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Розв'язуємо завдання (1.1), (1.5) симплекс-методом (див. [11]). Щоб побудувати опорний план розв'язку вихідного завдання, уведемо в перші три рівняння системи (1.5) фіктивні невід'ємні змінні:

$$X_{14}, X_{15}, X_{16};$$

$$\begin{cases} X_1 + X_3 + X_4 + X_6 + X_{14} = 1000, \\ -0{,}3X_1 + X_2 - 1{,}1X_3 - 1{,}06X_6 + X_7 + X_{15} = 0, \\ -X_1 - 0{,}3X_2 + X_5 - 1{,}06X_7 + X_8 + X_{16} = 0. \end{cases}$$

Запишемо обмеження в першу симплекс-таблицю. У першому рядку записуємо коефіцієнти при невідомих у цільовій функції. У рядках із третього по десятий записуємо коефіцієнти з системи обмежень.

В 11-ому рядку записуємо значення симплекс-різниць, що обчислюються за формулою:

$$\Delta j = \left(\vec{C}_{\overline{N}(S)}, \vec{a}_j^{(S)} \right) - C_j ,$$

де $\overline{N}(S)$ - вектор номерів базисних змінних,

C_j - коефіцієнт у цільовій функції при X_j.

Знаходимо найменшу від'ємну симплекс-різницю. Це – 1,75. Виходить, що X_4 необхідно ввести в базис.

Складаємо відношення правих частин рівнянь до коефіцієнтів при X_4.

$\theta = \min\left(\frac{1000}{1}; \frac{500}{1} \right) = 500 \Rightarrow a_{14}$ – розв'язний коефіцієнт жорданового перетворення. Уводимо в базис X_4 замість X_{12}.

Знаходимо нові оцінки Δj, нове Q і розв'язний елемент.

На шостій ітерації симплекс-методу одержуємо, що умова оптимальності виконана: усі $\Delta j \geq 0$.

Оптимальний розв'язок:

$X_1^* = 500$, $X_2^* = 150$, $X_3^* = 0$, $X_4^* = 500$, $X_5^* = 500$, $X_6^* = 0$,
$X_7^* = 0$, $X_8^* = 45$, $X_9^* = 0$, $X_{10}^* = 350$, $X_{11}^* = 500$, $X_{12}^* = 0$,
$X_{13}^* = 0$, $X_{14}^* = 0$, $X_{15}^* = 0$, $X_{16}^* = 0$.

$F\left(\vec{X}^*\right)$ = 1772700 дол. (сума на кінець року t + 3).

Відповідь:

Розподіл коштів:

500 тис. дол. - у проект А,

150 тис. дол. - у проект В,

0 - у проект С,

500 тис. дол. - у проект Д,

500 тис. дол. - у проект Е.

На початку року *t + 2* слід покласти 45 тис. дол. під 6% річних на рік.

Прибуток від такого вкладення грошей максимальний й становить 772700 дол.

1.4. Порівняльний аналіз показників ефективності інвестиційних проектів

Метою цього підрозділу є аналіз загальноприйнятих характеристик інвестиційних проектів (потоків платежів), які дозволяють проводити порівняльний аналіз нестандартних інвестиційних проектів. Процес зміни вартості грошей буде задаватися у вигляді банківської політики – послідовності коефіцієнтів дисконтування за різні роки, що дозволяє спростити й уніфікувати опис. Завдання підрозділу: сформулювати властивості відносин переваги інвестиційних проектів (див. [7]).

Попередні зауваження

Завдання вибору проектів для інвестування є надзвичайно важливою для потенційного інвестора. У порівняльному аналізі інвестиційних проектів використовуються поняття лінійного й опуклого аналізу і пов'язаних з ними розділів лінійного й опуклого програмування (див. [11]).

Інвестиційний проект (потік платежів) - це вектор $C=(c_0,...,c_n)$ довільної розмірності, що має наступні властивості: перший ненульовий компонент C від'ємний, останній ненульовий компонент C і сума компонент $\sum_{k=0}^{n} c_k$ додатні. Компоненти вектора c_i, являють собою розміри виплат у момент i (будемо вважати, що це дані на початок року). Якщо $c_i>0$, то кошти надходять інвесторові, якщо $c_i<0$, то інвестор вкладає кошти в проект.

З множини потоків платежів виділимо стандартні. Вони характеризуються тим, що до деякого моменту часу $c_i \le 0$, а після нього $c_i>0$. Потік, який подібною властивістю не володіє, будемо називати нестандартним.

У якості екзогенного фактора, урахування якого є необхідним при оцінці потоків платежів, виступає динаміка процентної ставки, тобто розглядається можливість альтернативного використання коштів у вигляді вкладення в банк або в акції. Найчастіше процентна ставка передбачається постійною за весь час фінансування проектів, хоча динаміка процентної ставки є важливим чинником ризику. Нехай r_i - процентна ставка за рік i. Тоді коефіцієнт дисконтування для року k рівний $q_k=(\Pi_{i=1}^{k}(1+r_i))^{-1}$. Банківською політикою назвемо вектор $Q=(q_0,...,q_k,...)$. Він задовольняє наступним умовам: $q_0=1$, $q_k > q_{k+1}$ при $k \geq 0$. Банківська політика, що відповідає постійній процентній ставці, є геометричною прогресією.

Порівняння проектів C і D найчастіше ґрунтується на тих або інших інтегральних числових характеристиках, які враховують як самі потоки, так і передбачувану банківську політику. Джерела складності порівняння проектів полягають у неможливості введення однозначно визначеного відношення повного порядку на багатомірному просторі. Характеристику проекту C при банківській політиці Q будемо позначати $\chi(C,Q)$. Якщо при цьому характеристика не залежить від банківської політики, то аргумент Q опускається.

Принципи порівняння інвестиційних проектів

Для порівняльного аналізу застосовуються чотири характеристики інвестиційних проектів. Зокрема, вони рекомендовані методикою UNIDO Міжнародного економічного інституту при ООН (Методичні рекомендації, 2000, див. [7]) . Слід зазначити, що ці характеристики підходять для порівняння стандартних проектів, у тому числі з різними термінами реалізації. Дамо визначення цих характеристик.

1. ***Чистий зведений дохід*** (NPV). У наших позначеннях чистий зведений дохід визначається за формулою $NPV(C,Q)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i q_i$, тобто є білінійною функцією від потоку платежів і банківської політики. Сума фактично є скінченою, оскільки число ненульових доданків визначається тривалістю проекту. Поряд із цією величиною нам будуть потрібні деякі її модифікації:

а) $NPV_n(C,Q)=\sum_{i=0}^{n} c_i q_i$ - чистий зведений дохід частини проекту за *n* років;

б) $NPV^+(C,Q)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i^+ q_i$;

в) $NPV^-(C,Q)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i^- q_i$.

Позначимо через $a^+=(a+|a|)/2$ і $a^-=(|a|-a)/2$ додатну й від'ємну частини числа, $NPV^+(C,Q)$ - зведену вартість коштів, що повертаються інвесторові, $NPV^{-}(C,Q)$ - кошти, виплачувані інвестором. Зміст позначень $NPV_n^{+}(C,Q)$, $NPV_n^{-}(C,Q)$ очевидний. Ясно, що

$$NPV(C,Q) = NPV^{+}(C,Q) - NPV^{-}(C,Q),$$

$$NPV_n(C,Q) = NPV_n^{+}(C,Q) - NPV_n^{-}(C,Q).$$

Природно, чим більшим є чистий зведений дохід, тим більші переваги має проект. Прибутковість проекту рівносильна виконанню умови $NPV(C,Q) > 0$.

Більшість аналітиків вважають чистий зведений дохід провідною характеристикою при порівнянні проектів. Підставою для цього судження є й те, що всі інші характеристики так чи інакше базуються на NPV. Серйозним недоліком NPV навіть для стандартних проектів є повне ігнорування тимчасових обріїв: навіть якщо проект дуже прибутковий, але прибуток від нього починає надходити тільки через 100 років, то навряд чи цей проект варто фінансувати. Інший недолік – дана характеристика не враховує кошти, вкладені в проект інвестором (тобто зневага ризиком проекту, яка полягає у можливості неповернення коштів).

Відомо, що для того, щоб при будь-якій банківській політиці Q виконувалася умова $NPV(C,Q) \geq NPV(D,Q)$, необхідно й досить, щоб при всіх k виконувалась нерівність: $\sum_{i=0}^{k} c_i \geq \sum_{i=0}^{k} d_i$.

2. ***Термін окупності*** (TS). У наших позначеннях $TS(C,Q) = \min\left\{n : NPV_n^{+}(C,Q) \geq NPV^{-}(C,Q)\right\}$.

Переважним є проект із меншим терміном окупності.

3. ***Рентабельність***. За визначенням є:

$$R(C,Q) = NPV^{+}(C,Q) / NPV^{-}(C,Q).$$

Чим вища рентабельність, тим більші переваги має проект. Прибутковість проекту відповідає умові $R(C,Q) > 1$.

4. ***Внутрішня норма прибутковості*** (IRR). Вона визначається як єдиний додатний корінь r_0 рівняння прибутковості $NPV(C,Q) = 0$, де $Q = (1,\ 1/+r),\ \ldots\ 1/(1+r)^n \ldots)$ - банківська політика, що відповідає сталій процентній ставці r. При умовах, накладених на інвестиційний проект, існує додатний корінь цього рівняння. Якщо корінь неєдиний, то значення IRR не визначене. Внутрішня норма прибутковості (якщо вона існує) залежить тільки від потоку C. По теоремі Декарта для багаточленів [13], стандартний потік завжди має внутрішню норму прибутковості. Переважнішим є проект із більш високим значенням IRR.

Можна привести наступне міркування на користь внутрішньої норми прибутковості як підстави для порівняння проектів. Якщо вона існує, то з нерівностей $NPV(C,0) > 0$, $NPV(C,\infty) < 0$ випливає, що проект C є прибутковим при $r \in [0, IRR)$. Таким чином, чим більше значення IRR, тим більший діапазон процентних ставок, при яких проект буде прибутковим.

Зведені характеристики досить адекватно відображають природні властивості стандартних проектів. Обговоримо можливість їх застосування для оцінки нестандартних проектів. Виділення додатної й від'ємної складових потоку при визначенні терміну окупності й рентабельності представляється неприродним для нестандартних проектів: найважливішу роль у цьому випадку відіграє характер чергування додатних і від'ємних компонентів потоку (витрат і внесків), який при такому підході ігнорується. Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Розглянемо проект:

$$C = (-50,\ 100,\ -50,\ 100,\ -50,\ 100,\ -50,\ 100).$$

У дужках зазначено суми, дисконтовані при деякій банківській політиці. Термін окупності цього проекту рівний 4 рокам. При цьому, уже починаючи з 3 року, проект не може привести до яких-небудь втрат!

Приклад 2. Розглянемо два проекти $(-60,\ 40,\ -50,\ 90)$ й $(-60,\ -50,\ 40,\ 90)$. У цих проектів збігаються чистий зведений дохід (він рівний 20), термін окупності (4 роки) і рентабельність (1,18), але у другого проекту внутрішня норма прибутковості не існує. Дійсно, для другого проекту

$$NPV(C,Q) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i q_i = -60q_0 - 50q_1 + 40q_2 + 90q_3 < 0$$

за будь якої реальної банковської політики (нагадаємо, що за означенням банковської політики $q_k > q_{k+1}$).

З погляду описаних характеристик ці два проекти рівнозначні. Однак видно, що перший проект має більші переваги порівняно з другим.

Наведені приклади показують, що для нестандартних проектів порівняння необхідно проводити на основі модифікованих показників. Перш ніж перейти до визначення нових характеристик, сформулюємо властивості, які можуть мати відносини переваги проектів .

Властивості відносин переваги інвестиційних проектів

1. Стабільність відносини переваги. Якщо проект C переважніший за проект D при деякій банківській політиці Q, то при малих змінах обох проектів і банківської політики відношення переваги зберігається. Міру зміни проекту C (в разі $C \to C_1$) можна визначити за допомогою евклідової норми $\|C - C_1\|$ (визначення евклідової норми див. у [13]). При цьому число ненульових компонентів проекту може змінитися. Властивість представляється необхідною, оскільки в противному разі, інвестор опиниться в ситуації підвищеного ризику: малі коливання здатні кардинально змінити ситуацію. Стійкими є чистий зведений дохід, термін окупності, рентабельність. Що стосується внутрішньої норми прибутковості, то близькі проекти не обов'язково обидва мають IRR.

2. Перевага проектів з більшими виплатами. Якщо для проектів C і D $c_i \geq d_i$, то ні при якій банківській політиці проект D не може бути переважнішим за C. Більш сильна форма цієї умови: якщо хоча б при одному i нерівність $c_i > d_i$ строга, то проект C переважніший за D при будь-якій банківській політиці. Очевидно, що відношення переваги за критеріями NPV й рентабельності представляє дану властивість у сильній формі, термін окупності – у слабкій. Застосування IRR (у випадку їх існування для обох проектів) забезпечує сильну форму даної умови.

3. Перевага проектів з ранніми виплатами. Розглянемо властивості цієї переваги для інвестиційних проектів $C = (c_1,...,c_n)$ і $D = (d_1,...,d_n)$.

3.1. Нехай $1 \leq i < j \leq n, P > 0$, $d_k = c_k$ при $k \neq i, j$ $d_i = c_i + P$, $d_j = c_j - P$. Тоді D переважніше C при будь-якій банківській політиці.

3.2. Нехай $1 \leq i < j \leq n$, $P > 0$, Q - банківська політика, $d_k = c_k$ при $k \neq i, j$ $d_i = c_i + P / q_i$, $k \neq i, j$ $d_i = c_i + P / q_i$, $d_j = c_j + P / q_i$. Тоді D переважніше C при банківській політиці Q.

3.3. Нехай $1 \leq i < j \leq n$, $c_i < 0$, $c_j > 0$, $d_k = c_k$ при $k \neq i, j$ $d_i = c_i$, $d_j = c_j$, при $k \neq i, j$ $d_i = c_j$, $d_j = c_i$. Тоді D переважніше C при будь-якій банківській політиці (ця умова є частковим випадком властивості 3.1 при $P = c_i - c_j$).

3.4. Нехай $d_j = c_{i-1}$ при всіх $i > 0$. Проект C переважніше D.

Зміст цих умов очевидний: гроші краще одержувати якомога раніше, тому що зменшується ризик вкладення коштів і з'являється можливість знову вкласти кошти в прибутковий проект.

Перевага, яка заснована на чистому зведеному доході, має властивість 3.1, а властивості 3.2 не має (в описаній ситуації

$NPV(C,Q) = NPV(D,Q)$. При виконанні умов властивості 3.4 виконується рівність $NPV(C,Q) = NPV(D,Q)$.

Ситуація з терміном окупності є досить складною. Якщо термін окупності проекту C менше i й при цьому $d_i, c_i, d_j, c_j > 0$, то терміни окупності проектів C і D в ситуаціях 3.1 і 3.2 рівні. Наведемо приклад перевірки властивості 3.3 при порівнянні термінів окупності.

Приклад 3. Розглянемо проекти $C = (-4, -1, 10, 30)$, $D = (-4, 10, -1, 30)$ і банківську політику $(1, 1/2, 1/4, ..., 1/2^n, ...)$. Як легко перевірити, термін окупності проекту C більше 3 років, а для проекту D - менше.

Із властивістю 3.4 усе просто: $TS(D,Q) = TS(C,Q) + 1$. З рентабельністю справа дещо гірша.

Приклад 4. Розглянемо проекти $C = (-2, -2, 2, 68)$ й $C = (-2, 16, -16, 68)$. Проект D отриманий з C перетворенням компонентів 2 і 3 при $P = 18$ (властивість 3.1). Нехай банківська політика має той самий вид, що й у прикладі 3. Тоді $R(C,Q) = (2/4 + 68/8)/(2 + 2/2) = 9/3 = 3$, $R(D,Q) = (16/2 + 68/8)/(2 + 16/4) = 33/12 < 3$.

Не зобов'язана виконуватися й властивість 3.2, що демонструє приклад проектів $C = (-2, -2, 2, 68)$ і $D = (-2, 28, -58, 68)$ при банківській політиці з прикладу 3. При цьому властивість 3.3 для переваг, заснованих на порівнянні рентабельності, виконується. Доведемо це твердження. Маємо:

$$NPV^+(D,Q) = NPV^+(C,Q) - c_j q_j + c_j q_i = NPV^+(C,Q) + c_j(q_i - q_j) >$$
$$> NPV^+(C,Q), NPV^-(D,Q) = NPV^-(C,Q) - c_i q_i + c_i q_j = NPV^-(C,Q) +$$
$$+ c_i(q_i - q_j) < NPV^-(C,Q),$$

звідки

$$R(D,Q) = NPV^+(D,Q) / NPV^-(D,Q) >$$
$$> NPV^+(C,Q) / NPV^-(C,Q) = R(C,Q).$$

Очевидно, що при перетвореннях 3.4 рентабельність не змінюється (усі розглянуті величини множаться на q_i).

При перетвореннях 3.2 і 3.4 $IRR(C,Q) = IRR(D,Q)$, а при перетвореннях 3.1 внутрішня норма прибутковості (якщо вона існує) зростає, оскільки $P/(1+r)^i - P/(1+r)^j > 0$.

4. Портфельний ефект. Нехай запропоновано два дохідні проекти C й D, причому C переважніше D. Розглянемо проект $C+D$. Можливі наступні варіанти портфельного ефекту.

4.1. Проект D не переважніший за $C+D$.

4.2. Проект C не переважніший за $C+D$.

4.3. Проект $C+D$ не переважніший за C.

Властивість 4.1 означає, що портфель у цілому не гірше всіх складових. Зрозуміло, що властивість 4.1 є наслідком 4.2.

Оскільки $NPV(C+D,Q) = NPV(C,Q) + NPV(D,Q)$ й проекти прибуткові, то для переваги, що заснована на чистому зведеному доході, виконується властивість 4.2. Доведемо, що термін окупності суми проектів не перевершує максимального з термінів окупності доданків. Нехай термін окупності кожного доданку не менше s, тобто виконуються нерівності:

$$NPV_k^+(C,Q) \geq NPV^-(C,Q), \text{ при } k = s, s+1, \ldots$$

Ці нерівності рівносильні нерівностям:

$$NPV_k^+(C,Q) - NPV_k^-(C,Q) \geq \sum_{i=k+1}^{n} c_i^- q_i,$$

$$NPV_k^+(D,Q) \geq \sum_{i=k+1}^{n} d_i^- q_i,$$

тобто

$$NPV_k(C,Q) \geq \sum_{i=k+1}^{n} c_i^- q_i,$$

$$NPV_k(D,Q) \geq \sum_{i=k+1}^{n} d_i^- q_i.$$

Складаючи ці нерівності, одержимо:

$$NPV_k(C+D,Q) \geq \sum_{i=k+1}^{n} (c_i^- + d_i^-) q_i \geq \sum_{i=+1}^{n} (c_i + d_i)^- q_i,$$

при $k = s, s+1, \ldots$. Остання нерівність випливає з нерівності трикутника. Це означає, що термін окупності суми проектів буде не менше s. Звідси випливає, що відповідне відношення переваги задовольняє умову 4.1.

Термін окупності не зобов'язаний задовольняти умовам 4.2 і 4.3. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 5. Нехай проекти C й D задані в дисконтованому вигляді: $C = (-5, 20, 10, -40, -10, 60)$, $D = (-4, 30, -10, 40, -20, 40)$. Тоді $C+D = (-10, 50, 0, 0, -30, 100)$. Маємо:

$$TS(C,Q)=5,\quad TS(D,Q)=3,\quad TS(C+D,Q)=1,$$
тобто термін окупності суми менше термінів окупності обох доданків.

Якщо $C=(-30,\ 10,\ 10,\ 10,\ 20)$, $D=(-30,\ 30,\ 10,\ 10,\ 10,\ 20)$, то $C+D=(-60,\ 40,\ 20,\ 20,\ 40)$.

У цьому випадку $TS(C,Q)=3 \quad TS(D,Q)=1 \quad TS(C+D,Q)=2$, тобто в цьому випадку термін окупності суми проектів перевершує мінімальний з термінів окупності доданків.

Рентабельність суми проектів може бути більше рентабельності кожного доданка. Наприклад, для потоків першої частини попереднього прикладу

$$R(C,Q)=90/5=1{,}64,\quad R(D,Q)=110/35=3{,}14,$$
$$R(C+D,Q)=150/40=3{,}75.$$

У той же час, рентабельність суми дохідних проектів не може бути менше рентабельності обох доданків. Доведемо це твердження. Нехай

$$R(C,Q)>1,\quad R(D<Q)\geq k>1.$$

З рівностей:

$$NPV(C,Q)=NPV^{+}(C,Q)-NPV^{-}(C,Q),$$
$$NPV(D,Q)=NPV^{+}(D,Q)-NPV^{-}(D,Q).$$

і визначення рентабельності випливають нерівності:

$$NPV^{-}(C,Q)\leq NPV(C,Q)/(k-1),$$
$$NPV^{-}(D,Q)-NPV(D,Q)/(k-1).$$

Як ми вже відзначали,

$$NPV^{-}(C+D,Q)\leq NPV^{-}(C,Q)+NPV^{-}(D,Q).$$

Звідси $NPV^{-}(C+D,Q)\leq NPV(C,Q)+NPV(D,Q)/(k-1)=$ $=NPV(C+D,Q)/(k-1)$.

Використовуючи рівність $NPV(C+D,Q)\leq(NPV(C+D,Q)=$ $=NPV^{+}(C+D,Q)-NPV^{-}(C+D,Q)$ одержуємо нерівність $kNPV^{-}(C+D,Q/(k-1))\leq NPV^{+}(C+D,Q)/(k-1)$, звідки $R(C+D,Q)\geq k$ що й було потрібно довести.

Внутрішня норма прибутковості має властивості 4.1 і 4.3.

5. Однорідність. Нехай C - прибутковий потік платежів, $\alpha>1$. Зустрічаються наступні ситуації.

5.1. При будь-якій банківській політиці потік αC переважніше C.

5.2. При будь-якій банківській політиці потік C переважніше αC.

5.3. При будь-якій банківській політиці потоки αC й C рівнозначні.

Перша й друга ситуації характерні для порівняння за абсолютними показниками, третя - за відносними. Ясно, що при порівнянні проектів за чистим зведеним доходом виконується умова 5.1, за терміном окупності, рентабельністю, внутрішньою нормою прибутковості - умова 5.3. Властивість 5.2, зрозуміло, не може виконуватися для реального відношення переваги й застосовується далі в технічних цілях.

Модифіковані характеристики проектів

Незважаючи на те, що чистий зведений дохід часто розглядається як провідна характеристика інвестиційного проекту, використання винятково цієї характеристики для порівняння проектів навряд чи доцільне, зокрема з причин, що відзначені вище. У цьому зв'язку представляється доцільною модифікація інших показників з метою забезпечення їх застосування до нестандартних потоків платежів.

1. ***Мінімум коштів, необхідних для фінансування потоку*** (MS)**.** Нехай C - потік платежів при банківській політиці Q; F – початковий капітал інвестора. Тоді дисконтовані кошти на рахунку інвестора після виплат у момент k становлять $F+\sum\limits_{i=0}^{k} c_i q_i$ умови незбитковості при фінансуванні проекту задаються системою нерівностей $F+\sum\limits_{i=0}^{k} c_i q_i \geq 0 (k=0,...n)$. Звідси мінімум коштів, необхідних для фінансування проекту C, визначається формулою $MS(C,Q) = -\min\left\{\sum\limits_{i=0}^{k} c_i q_i,\ k=0,...n\right\}$, де n – термін виконання проекту C. Позначимо через $km(C,Q)$ найбільший момент часу, для якого в попередньому виразі реалізується мінімум. Величина $MS(C,Q)$ - це сума, якою ризикує інвестор: якщо виплати по проекту з тих або інших причин у який-небудь момент припиняться, то інвестор втратить (у дисконтованому вигляді) не більше $MS(C,Q)$. Очевидно, що для стандартних проектів $MS(C,Q) = NPV^{-}(C,Q)$.

Приклад 6. Нехай

$$C = (-20,\ 10,\ -25,\ 0,\ 20,\ -15,\ 50),$$

$$Q = (1,\ 0.9,\ 0.7,\ 0.65,\ 0.0,\ 5.5,\ ...).$$

Послідовні значення сум $\sum_{i=0}^{k} c_i q_i$ рівні: а) -20 при $k=0$; б) -28.5 при $k=2$; в) -24.75 при $k=5$. Для знаходження $MS(C,Q)$ не має смислу обчислювати значення $\sum_{i=0}^{k} c_i q_i$ при $c_k \geq 0$, оскільки мінімум величин $\sum_{i=0}^{k} c_i q_i$, при таких k досягатися не може. Звідси $MS(C,Q)=28.5$. При цьому $km(C,Q)=3$.

За показнком $MS(C,Q)$ переважніший проект із меншим значенням цього показника. Це відношення стійке.

Якщо збільшити виплати c_i, при $i \leq km(C,Q)$, то $MS(C,Q)$ зменшується, якщо ж збільшити на досить малі величини виплати c_i при $i > km(C,Q)$, то значення $MS(C,Q)$ не зміниться. Аналогічно з перевагою ранніх виплат: при деяких змінах проектів типу 3.1 - 3.3 величина $MS(C,Q)$ зменшується, а при деяких - ні. При перетвореннях типу 3.4 $MS(C,Q)=q_1 MS(C,Q)$. Далі зрозуміло, що коштів на фінансування проекту $C+D$ потрібно не більше, ніж сума коштів на фінансування кожного проекту, тобто:

$$MS(C+D,Q) \leq MS(C,Q)+MS(D,Q).$$

Якщо $C=D$, то нерівність обертається в рівність.

Наступний приклад показує, що мінімум коштів для суми потоків може бути меншим від відповідних величин кожного з потоків-доданків.

Приклад 7. Нехай

$$C=(-10,\ 20,\ -100,\ 300),\ D=(-10,\ -20,\ 100,\ 70),$$
$$Q=(1,\ 0.9,\ 0.8,\ 0.7,\ 0.6).$$

Тоді $C+D=(-20,\ 0,\ 0,\ 370)$. Як легко перевірити,

$$MS(C,Q)=72, \qquad MS(D,Q)=28, \qquad MS(C+D,Q)=20.$$

Щодо однорідності, показник $MS(C,Q)$ має властивість 5.2.

Обчислювальні експерименти (було згенеровано близько 500 випадкових потоків платежів) показують, що типовим є зменшення $MS(C,Q)$ при зростанні процентної ставки r (розглядалися банківські політики Q, що відповідають сталій процентній ставці – геометричній прогресії).

Сам по собі введений показник не дуже цікавий: орієнтуючись тільки на нього, одержуємо, що найбільш вигідно відмовитися від будь-яких інвестицій. Однак його використання при побудові відносного показника представляється досить доцільним.

2. Модифікована рентабельність (MR)**.** Величина

$$MR(C,Q) = NPV(C,Q) / MS(S,Q)$$

називається модифікованою рентабельністю. Вона визначає дисконтовану віддачу, що припадає на одиницю коштів, які необхідно мати для фінансування проекту. Природно, що переважнішим є проект із більшим значенням MR. Для стандартних проектів $MR(C,Q) = 1 + R(C,Q)$.

Приклад 8. Нехай

$$C = (-20,\ 33.33,\ -62.5,\ 142.86),$$
$$D = (-20,\ 55.55,\ -37.5,\ 142.86),$$
$$Q = (1,\ 0.9,\ 0.8,\ 0.7).$$

Тоді маємо:

$$NPV(C,Q) = NPV(D,Q) = 60, \qquad NPV^{+}(C,Q) = NPV^{+}(D,Q) = 130,$$

$$NPV^{-}(C,Q) = NPV^{-}(D,Q) = 70, \qquad MS(C,Q) = 40, \qquad MS(D,Q) = 70.$$

Тим самим $R(C) = R(D) = 1.85$, $MR(C) = 1.5$, $MR(D) = 0.85$. Таким чином, рентабельність у традиційному смислі не дозволяє віддати перевагу жодному з проектів, у той час як модифікована рентабельність віддає перевагу проекту C.

Сформулюємо властивості відносини переваги, заснованої на модифікованій рентабельності. Це відношення стійке. Оскільки зі зростанням виплат чистий зведений дохід зростає, а мінімум коштів, необхідних для фінансування потоку, не збільшується, то модифікована рентабельність зі зростанням виплат не зменшується (але може зберігатися).

Із властивостей NPV і MS випливає, що властивість 3.1 (а значить і 3.3) для переваги, заснованої на модифікованій рентабельності, виконується. У той же час, при перетворенні 3.2 модифікована рентабельність може зберегтися (але не може зменшитися). При перетворенні 3.4 модифікована рентабельність не змінюється.

Показник є відносним. Портфельний ефект має вигляд 4.1, оскільки:

$$NPV(C+D,Q) = NPV(C,Q) + NPV(D,Q)$$
$$MS(C+D,Q) \le MS(C,Q) + MS(D,Q)$$

звідки $MR(C+D,Q) \geq \min\{MR(C,Q), MS(D,Q)\}$.

Властивості 4.2 і 4.3 виконуються не завжди. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 9. Нехай

$$C = (-20,\ 44.44,\ -87.5,\ 287.7),\ D = (-20,\ 44.44,\ -87.5,\ 287.7),$$
$$Q = (1,\ 0.9,\ 0.8,\ 0.7),$$

тоді $C + D = (-40,\ 0,\ 0,\ 571.4)$. Для цих проектів $MR(C,Q) = 2.6$, $MR(D,Q) = 1.44$, $MR(C+D,Q) = 10$, тобто значення модифікованої рентабельності суми більше максимальної з MR доданків. А для проектів $C = (-10,\ -11.1,\ 37.5,\ 57.14)$, $D = (-10,\ -44.44,\ 75,\ 57.14)$ при тій самій банківській політиці маємо $MR(C,Q) = 2.5$, $MR(D,Q) = 1$, $MR(C+D,Q) = 1.4$, тобто значення MR суми розташоване між максимальним і мінімальним значеннями величин доданків.

3. Модифікований термін окупності (MTS)**.** Його доцільно визначити як:

$$MTS(C,Q) = \max\{k : NPV_k(C,Q) \leq 0\} + 1,$$

де в якості прикладів приводяться тільки стандартні потоки). Зміст цієї величини очевидний: модифікований термін окупності - це той момент, починаючи з якого проект не приносить збитків. Приклад 1 показує доцільність такої модифікації. Зрозуміло, можна визначити й безперервний варіант терміну окупності:

$$MTSC(C,Q) = MTS(C,Q) - \frac{NPV_{MTS(C,Q)}(C,Q)}{NPV_{MTS(CQ)}(C,Q) - NPV_{MTS(CQ)-1}(CQ)}.$$

Слід зазначити, що модифікований термін окупності не перевершує терміну окупності в колишньому змісті, а для стандартних потоків з ним збігається.

Очевидно, що перевага за цим критерієм стійка, зі зростанням виплат модифікований термін окупності не зростає. Перенесення виплат на ранні терміни (перетворення 3.1, 3.2) залежно від ситуації може або зберегти, або зменшити модифікований термін окупності. Як і для терміну окупності в колишньому змісті при перетворенні 3.4. $MTS(D,Q) = MTS(C,Q) + 1$.

При формуванні портфеля модифікований термін окупності має ті ж властивості, що й термін окупності в попередньому смислі. Зокрема, у прикладі 5 модифіковані терміни окупності проектів збігаються з термінами окупності в старому смислі.

4. Аналоги внутрішньої норми прибутковості. Насамперед, як відзначалося, при існуванні $IRR(C)$ множина процентних ставок, при яких проект C є прибутковим, має вигляд $[0, IRR(C)]$. Чим більше $IRR(C)$ тим більша відповідна множина. Для модифікації внутрішньої норми прибутковості доцільно розглянути множини $\Psi^+(C) = \left\{r : \sum c_i (1+r)^{-1} > 0\right\}$, $\Psi(C) = \left\{r : \sum c_i (1+r)^{-1} \geq 0\right\}$. Оскільки множина коренів багаточлена скінчена, то множина $\Psi^+(C)$ є внутрішністю множини $\Psi(C)$.

Будемо вважати, що проект C переважніше проекту D в смислі $I-1$, якщо $\Psi^+(C) \supset \Psi(D)$. Відношення $I-1$ стійке, зростання виплат і їх перенесення на ранні терміни (перетворення 3.1 і 3.3) проект поліпшують. Перетворення 3.4 приводить до проекту D, за критерієм $I-1$ рівнозначному C, тобто $\Psi(C) = \Psi(D)$. Оскільки сума прибуткових проектів є прибутковим проектом, а збиткових проектів - збитковим, то зі співвідношення $\Psi^+(C) \supset \Psi(D)$ випливають включення $\Psi^+(C) \supset \Psi(C+D)$, $\Psi^+(C+d) \supset \Psi(D)$. Тим самим відношення переваги $I-1$ має прийнятні властивості й узагальнює відношення, засноване на IRR, на деякі ситуації, при яких IRR не існує. Недоліком відносини $I-1$, як і для IRR, є його неповнота: цей критерій у багатьох випадках не дозволяє зрівняти проекти.

Модифікацією критерію $I-1$ є критерій $I-2$, заснований на порівнянні величин $|\Psi(C)|$ - мір множин $\Psi(C)$. Із властивостей проектів випливає, що множина $\Psi(C)$ обмежена, тобто його міра скінченна. Якщо внутрішня норма прибутковості проекту існує, то $|\Psi(C)| = IRR(C)$.

Приклад 10. Нехай

$C = (-35, 152, -216, 100)$, $D = (-46, 181, -234, 100)$.

Внутрішні норми прибутковості для обох проектів не визначені, додатні корені рівняння

$$-35 + 152/(1+r) - 216/(1+r)^2 + 100/(1+r)^3 = 0$$

рівні $0.1, 0.4, 0.8$. Корені рівняння

$$46 + 181/(1+r) - 234/(1+r)^2 + 100/(1+r)^3 = 0$$

відповідно рівні $0.1,\ 0.3,\ 0.5$. Звідси $PR^+(C) = (0,\ 0.1) \cup (0.4,\ 0.8)$, $PR^+(D) = (0,\ 0.1) \cup (0.3,\ 0.5)$. Тим самим за критерієм $I-1$ ці проекти непорівнянні. А тому що $|PR(C)| = 0.5$ й $|PR(D)| = 0.3$, то за критерієм $I-1$ проект C має перевагу.

Відношення $I-2$ стійке й, як випливає з характеристик відносини $I-1$, має потрібні властивості при зростанні платежів і їх ранньої реалізації. Портфельний ефект проявляється у включеннях:

$$\Psi(C) \cap \Psi(D) \subset \Psi(C+D) \subset \Psi(C) \cup \Psi(D).$$

Серйозним недоліком критерію $I-2$ є залежність від вибору показника зростання коштів. Наприклад, якщо перейти від банківського відсотка r до дисконт-множника $1/(1+r)$ й використовувати ті ж міркування, то відношення переваги двох проектів може змінитися на протилежне. При цьому жоден із цих показників не має природньої переваги над іншим. Приведемо приклад цього факту.

Приклад 11. Розглянемо проекти $C = (-36, 153, -216, 100)$ й $D = (-46, 181, -234, 100)$. Чистий зведений дохід проекту C обертається в 0 при процентних ставках, рівних $0.1, 0.5, 0.7$ (відповідні дисконт-множники $0.9,\ 0.67,\ 0.59$), а для проекту D - при процентних ставках $0.1, 0.3, 0.5$ (відповідні дисконт-множники $0.9, 0.77, 0.67$). Звідси $|\Psi(C)| = |\Psi(D)| = 0.3$, але міри областей значень дисконт-множників, на яких проекти прибуткові, рівні 0.18 для C й 0.2 для D, тобто проекти C й D рівнозначні за критерієм $I-2$, але при переході до дисконт-множника проект D стає переважнішим.

5. Практичне використання введених модифікованих характеристик. Ми виходили з того, що інвестор володіє досить надійним прогнозом банківської політики. Насамперед інвесторові слід відібрати для подальшого аналізу ті проекти, які влаштовують його з погляду модифікованого терміну окупності. Потім із цієї сукупності слід відібрати ті, у яких величина MS відповідає його фінансовим можливостям. І нарешті, серед відібраних проектів виділяється той, у якого більше значення NPV. При цьому забезпечується прийнятний рівень модифікованої рентабельності. У випадку можливих коливань банківської політики як додатковий аргумент може використовуватися порівняння з проектами, близькими по $\Psi(C)$.

1.5. Аналіз ризиків інвестиційних проектів

В умовах переходу до ринкової економіки, динамічності та нестабільності соціально-економічних процесів для підприємств завжди існує загроза входження у кризовий стан. До основних джерел виникнення кризових ситуацій необхідно віднести насамперед непередбачені керівництвом зміни внутрішніх і зовнішніх умов діяльності підприємств. Тому за решти умов досягнення успіху при розробці стратегічних програм (проектів) залежить від того, наскільки вичерпною є інформація, що використовується в процесі підготовки та прийняття рішень щодо цих програм (проектів). Дані стосовно економічного середовища можуть бути лише частково спрогнозованими та оціненими кількісно. У результаті необхідно проводити обчислення при накладанні системи раціональних гіпотез, враховувати низку альтернативних варіантів стосовно майбутніх умов реалізації програм (проектів). Маючи на увазі ці фактори, кажуть про ситуацію невизначеності та ризику, що пов'язана з оцінкою програм (проектів).

Справді катастрофічний ризик для підприємства полягає в тому, що від інвестиційних (інноваційних) проектів, від оновлення основного капіталу ми йдемо до кризи та банкрутства підприємства.

Розглянемо деякі приклади ризику в стратегічному менеджменті.

Економічний ризик стратегічної програми (проекту) – це ризик втрати конкурентної позиції підприємства внаслідок непередбачених змін в економічному середовищі підприємства, наприклад, зростання цін на енергоносії, зростання процентних ставок за кредити під фінансування основних і оборотних засобів, підвищення митних тарифів тощо.

Політичний ризик – ризик понести збитки та втратити частину прибутків внаслідок змін у державній політиці.

Виробничий ризик – ризик невиконання обсягів запланованих робіт і/або збільшення затрат, що зумовлені такими подіями, як аварії та збої обладнання, недоліки у менеджменті (плануванні, прогнозуванні).

Фінансовий ризик – ризик, пов'язаний з операціями з фінансовими активами. Він може бути диференційованим на відсотковий, кредитний, валютний ризики тощо.

Торкаючись проблем аналізу ризику проекту, зазначимо, що слід ідентифікувати окремі типи ризиків, зокрема:

Ризик проекту – ризик, який несе в собі один із активів фірми. Він визначається варіацією сподіваних доходів.

Корпоративний, або ризик у межах фірми: ризик, не пов'язаний з впливом диверсифікації утримувачів акцій. Він визначається як вплив проекту на можливі прибутки фірми.

Ринковий, або бета-ризик: частина ризику проекту, що не може бути усунута завдяки диверсифікації. Він визначається за допомогою бета-коефіцієнта проекту.

Аналіз ризиків

Ризик слід розглядати як можливість втрат, що виникають внаслідок необхідності прийняття інвестиційних рішень в умовах невизначеності. А ступінь цієї можливості можна охарактеризувати за допомогою різних критеріїв, як-то: імовірність настання події; величина відхилення від прогнозованого значення (розмах варіації); дисперсія; математичне очікування; середньоквадратичне відхилення; коефіцієнт асиметрії; ексцес, інші математичні і статистичні критерії.

Оскільки невизначеність може бути задана різними способами (імовірнісні розподіли, інтервальна невизначеність, суб'єктивні імовірності тощо), що спричиняє різні прояви ризику, на практиці доводиться використовувати різні критерії. Крім того, при оцінці ризику варто враховувати індивідуальний підхід, що описується кривими індиферентності чи корисності.

При аналізі ризиків використовуються різні методи їх оцінки. До найбільш розповсюджених відносять:

– метод коригування норми дисконту;
– метод достовірних еквівалентів (коефіцієнтів вірогідності);
– аналіз чутливості критеріїв ефективності;
– метод сценаріїв;
– аналіз імовірнісних розподілів потоків платежів;
– метод дерева рішень;
– метод Монте-Карло (імітаційне моделювання) тощо.

Розглядаючи інвестиції як різновид ділової гри за теорією ігор, інвестор має ризикувати, але ризикувати раціонально, надаючи кожному з потенційних сценаріїв інвестиційного процесу свій ступінь очікування. Інакше він ризикує отримати збитки від неприйняття рішення. Інструментом, що дозволяє вимірювати можливості (очікування), є теорія нечітких множин. Використовуючи її, можна запропонувати метод оцінки інвестиційного ризику на основі комплексного показника оцінки ступеня ризику.

Припустимо, що під час оцінки інвестиційного проекту отримані три значення показника чистої поточної вартості інвестицій:

$P_{\min}$ - мінімальне значення показника;

$P_{\max}$ - максимальне значення показника;

P_a - середньоочікуване значення.

Нагадаємо, що під ефективними інвестиціями розуміють сукупність станів інвестиційного процесу, коли чиста поточна вартість проекту більша від нуля.

Якщо виконується умова, що $P_{\min} < 0 < P_{\max}$, то ступінь ризику неефективності інвестицій (ω) оцінюватиметься за формулою:

$$\omega = R \times \left[1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \times \ln(1-\alpha) \right],$$

$$\alpha = -\frac{P_{\min}}{P_a - P_{\min}}, \quad R = -\frac{P_{\min}}{P_{\max} - P_{\min}}.$$

Ступінь ризику ω приймає значення від 0 до 1.

Кожен інвестор, виходячи зі своїх інвестиційних переваг, може класифікувати значення ω, виділивши для себе інтервал неприйнятних значень ризику. Можлива також докладніша градація ступенів ризику. Наприклад, якщо ввести лінгвістичну змінну «ступінь ризику» з відповідними значеннями (Незначна, Низька, Середня, Відносно висока, Неприйнятна), то кожен інвестор може самостійно описати галузь відповідних нечітких підмножин, задавши п'ять функцій приналежності $m(\omega)$.

Розглянемо простий пояснювальний приклад.

Приклад 1. Необхідно визначити ступінь ризикованості інвестиційного проекту, що характеризується такими даними:

1. Інвестиційний проект буде здійснюватися протягом 2 років.
2. Розмір стартових інвестицій відомий точно і складає $I = 1$ млн. грн.
3. Ставка дисконтування в плановому періоді може коливатися в межах від $d_{\min} = 10\%$ до $d_{\max} = 30\%$ річних.
4. Чистий грошовий потік планується в діапазоні від $CF_{\min} = 0$ до $CF_{\max} = 2$ млн. грн.
5. Залишкова (ліквідаційна) вартість проекту дорівнює нулю.

Розв'язок.

Чисту поточну вартість проекту визначаємо за стандартною формулою фінансової математики – $P = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{CF_i}{(1+d)^i}$, тоді:

$$P_{\min} = -I + CF_{\min} / (1 + d_{\max})^1 + CF_{\min} / (1 + d_{\max})^2 = -1 \text{ млн. грн.}$$

$$P_{\max} = -I + CF_{\max} / (1 + d_{\min})^1 + CF_{\max} / (1 + d_{\min})^2 =$$
$$= -1 + 2/(1+0.1)^1 + 2/(1+0.1)^2 = 2{,}5 \text{ млн. грн.}$$

$$P_a = -I + CF_a / (1 + d_a)^1 + CF_a / (1 + d_a)^2 =$$
$$= -1 + 1/(1+0{,}2)^1 + 1/(1+0{,}2)^2 = 0{,}5 \text{ млн. грн.}$$

Знайдемо ступінь ризику за вищезазначеною формулою:

$\alpha = 1/(0{,}5+1) = 0{,}6667$ млн. грн.

$R = 1/(2{,}5+1) = 0{,}2857$ млн. грн.

$\omega = 0{,}2857(1+(1-0{,}6667)/0{,}6667 \times \ln(1-0.6667) = 0{,}1288.$

Отже, ступінь ризику здійснюваного інвестиційного проекту складе приблизно 13%.

Вартість капіталу

За допомогою аналізу типів ризику менеджери можуть отримати інформацію щодо ризику проекту і таким чином обрати найкраще рішення. За допомогою моделі оцінки капітальних активів (МОКА) необхідно здійснювати оцінку доцільності капіталовкладень.

Відоме рівняння лінії надійності ринку (див. [14]) виражає відношення ризик/норма прибутку наступним чином:

$$R_i = R_F + \beta_i \cdot (R_M - R_F), \quad (1.6)$$

де R_i – ставка відсотка (дисконту), яку необхідно одержати від проекту *i*, що обтяжений ризиком β_i, R_F – безризикова ставка відсотка, R_M – середньоринкова ставка відсотка.

Приклад 2. Компанія використовує (для спрощення) тільки власний капітал, тому вартість власного капіталу також є загальною вартістю капіталу для фінансування певного проекту (і). Покладемо: $\beta_i = 1{,}1$; $R_F = 0{,}08$; $R_M = 0{,}12$ (12%).

Чи дадуть інвестори гроші в борг компанії для інвестування проекту?

Розв'язання: Скориставшись формулою (1.6), отримаємо:

$R_i = 0{,}08 + 1{,}1 \cdot (0{,}12 - 0{,}08) = 0{,}124$, або 12,4%.

Тобто інвестори дадуть гроші в борг компанії для інвестування проекту лише у тому разі, якщо вона сподівається заробити 12,4% або більше на цих грошах.

Під час реалізації проекту, відповідно до формули (1.7), змінюється бета-коефіцієнт, що, в свою чергу, призводить до зміни вартості власного капіталу підприємства (компанії). Фірма може трактуватися як "портфель активів", а бета будь-якого портфеля – як середньозважена величина бета-коефіцієнтів його активів, тобто:

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i, \quad (1.7)$$

де n – кількість різних активів, x_i – питома вага і-го активу, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ 0 \le x_i \le 1$, β_i – бета-коефіцієнт (міра ризику) і-го активу, i =1, ..., n.

Реалізуючи певний проект, фірма тим самим збільшує загальний бета-коефіцієнт корпорації. Точне значення бета-коефіцієнта буде залежати від обсягів інвестицій у проект порівняно з іншими активами компанії.

Приклад 3. Компанія розглядає проект А, коефіцієнт β якого належить проміжку [1,1; 1,5].

Нехай частка (питома вага) щодо необхідного капіталу для фінансування проекту А становить 20%, тобто $x_A = 0{,}2$, $\beta_A = 1{,}5$, а β усіх інших активів підприємства дорівнює 1,1. Яким буде коефіцієнт β та норма прибутку компанії внаслідок реалізації капіталовкладень?

Розв'язання. Використовуючи формулу (1.7), одержимо, що нове значення бета-коефіцієнта фірми дорівнює:

$\beta = 0{,}8 \cdot 1{,}1 + 0{,}2 \cdot 1{,}5 = 1{,}18.$

Це зростання бета-коефіцієнта фірми, що розглядається, зумовлює падіння її акцій до тих пір, доки коефіцієнтові ($\beta = 1{,}18$) не буде відповідати адекватна норма прибутку, тобто необхідно, щоб норма прибутку капіталу підприємства становила:

$R = 0{,}08 + 1{,}18 \cdot (0{,}12 - 0{,}08) = 0{,}1272,$

або 12,72%. Отже, внаслідок реалізації капіталовкладень загальна норма прибутку компанії повинна також збільшитися з 12,4% до 12,72%.

Приклад 4. Задані умови попереднього прикладу. Якщо на капіталовкладеннях у первинні (попередні) активи підприємство повинно заробити 12,4%, то скільки ця компанія повинна заробити на капіталовкладеннях у новий проект, щоб нове значення загальної сподіваної норми прибутку, яке ми обчислили у попередньому прикладі, дорівнювало б 12,72% ?

Розв'язання. З попереднього прикладу ми знаємо, що коли компанія реалізує проект, то вона матиме 80% власних фондів, інвестованих у свою діяльність. На цьому вона повинна заробити 12,4%. Ще 20% своїх фондів інвестовані у новий проект, на якому вона повинна заробити x%. Лише тоді середньозважена необхідна норма прибутку становитиме 12,72%, тобто:

$$0{,}8 \cdot 12{,}4\% + 0{,}2 \cdot x\% = 12{,}72\%.$$

Звідси маємо, що x = 14%. Таким чином, сподівана норма прибутку нового проекту має становити 14%.

Отже, можна зробити такий висновок: якщо є можливість визначити показник ризику, за який приймається бета-коефіцієнт кожного проекту β, то вартість капіталу цього проекту R_p можна знайти за формулою:

$$R_P = R_F + \beta_P\,(R_M - R_F).$$

Приклад 5. Виходячи з умови попереднього прикладу при $\beta p = 0{,}5$, визначити вартість капіталу цього проекту.

Розв'язання. Скориставшись формулою (1.6), одержимо:

$$R_P = 8\% + 0{,}5 \cdot (8\% - 4\%) = 10\%.$$

Як відомо, ставка дисконту певного грошового потоку залежить від його ризикованості: чим вищий рівень ризику потоку, тим вища ставка дисконту. Тому чим ризикованіший проект капіталовкладень, тим вища його вартість капіталу. Повинно бути інтуїтивно зрозуміло, що підприємства (фірми) приймають різні інвестиційні проекти з різним, але допустимим рівнем ризику. Частина процесу оцінки доцільності капіталовкладень включає визначення ступеня ризику кожного проекту та його вартості капіталу, базуючись на його ризику.

Вартість капіталу, визначена для проекту з середнім рівнем ризику, повинна бути граничною вартістю капіталу. По суті, спочатку фірми визначають граничну вартість капіталу з середнім (допустимим) рівнем ризику, а потім використовують її при оцінці ризикованості кожного проекту, знижуючи або збільшуючи її.

Вартість капіталу є ключовим елементом у процесі оцінки доцільності капіталовкладень. Цей процес складається з таких пунктів:

Ідентифікація набору реальних інвестиційних можливостей.

Оцінка майбутніх грошових потоків, пов'язаних з кожним проектом.

Знаходження теперішньої вартості кожного майбутнього грошового потоку, дисконтованого на вартість капіталу, що використовується для фінансування проекту та складання цих значень теперішньої вартості для отримання сукупної NPV кожного проекту.

Порівняння NPV кожного проекту з його вартістю та прийняття проекту, якщо NPV його майбутніх грошових потоків перевищує його вартість.

Оскільки вартість додаткового капіталу фірми для фінансування проектів залежить від суми капіталу, постає питання: який коефіцієнт збитковості слід застосовувати у процесі оцінки доцільності капіталовкладень? Або яке зі значень середньозваженої вартості капіталу (СЗВК), для обчислення якого ураховується ризик, слід використовувати для оцінки рівня середнього ризику проекту? Відповідь базується на концепції граничного аналізу, який наведений в пунктах 4.4.4 і 4.4.5. Тут йдеться про те, що фірма може збільшувати випуск продукції до точки, коли її граничний прибуток дорівнює граничним витратам. У цій точці остання одиниця продукції повністю покриває, відшкодовує свої витрати. Такий же тип аналізу застосовується у процесі оцінки доцільності капіталовкладень. (Слід зауважити, що СЗВК з урахуванням ризику необхідно розглядати окремо.)

Приклад 6. Нехай у результаті здійснення прогнозу та відповідних обчислень (які ми опускаємо) стало відомо, що для реалізації підприємством чотирьох проектів капіталовкладень (A, B, C, D) одержано дані, зведені у табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Проект	**Обсяг капіталу для фінансування проекту (млн. грн.)**	**Внутрішня норма прибутку проекту (IRR) (%)**
A	50	13,0
B	50	12,5
C	80	12,0
D	80	10,2

Отримано також дані стосовно середньозваженої вартості капіталу, необхідного для фінансування проектів (табл. 1.6.).

Таблиця 1.6

Додатковий капітал (млн.грн.)	**СЗВК(%)**
0 – 130	10,0
131 – 200	10,3
200 – 280	10,9

Визначити оптимальний проект капіталовкладень.

Розв'язання: Використовуючи дані, наведені у таблицях, можна побудувати об'єднані графіки граничної вартості капіталу (МСС) та інвестиційних можливостей (IOS).

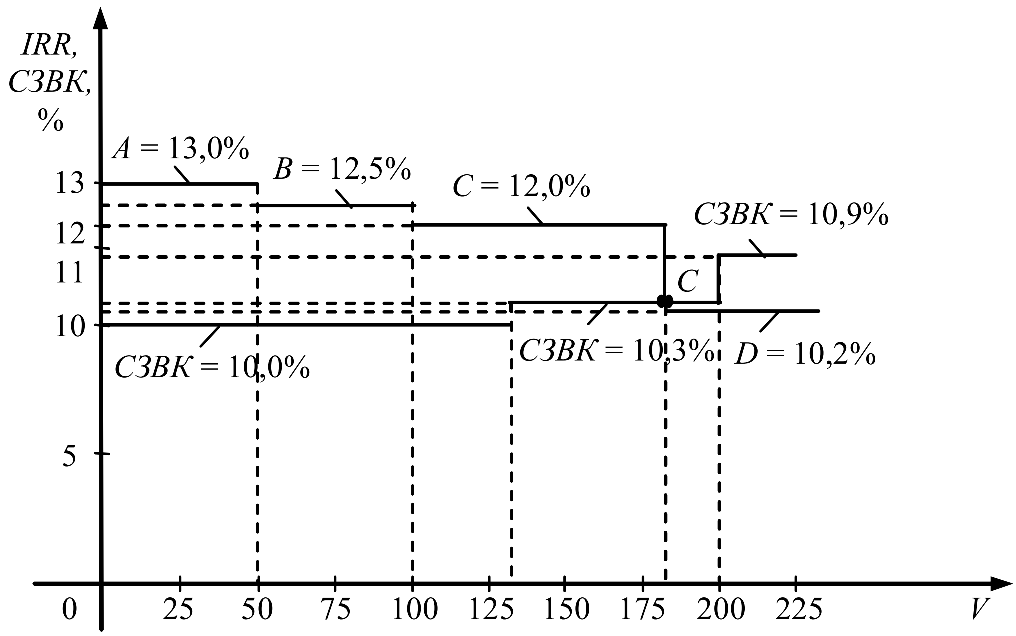


Рис. 1.2. *Об'єднані графіки МСС та IOS для визначення оптимального бюджету капіталовкладень та граничної вартості капіталу*

Оптимальний бюджет капіталовкладень – 180 млн. грн. (Точка *C* рис. 1.2.). Внутрішня норма прибутку (IRR) для проектів A, B та C перевищує вартість капіталу, а для проекту D вона менша, ніж вартість капіталу (див. рис. 1.2). Тому від проекту D доцільно відмовитися. СЗВК у точці, де графік інвестиційних можливостей IOS перетинає криву МСС, визначається як «вартість капіталу підприємства з середнім для проектів ризиком». Ця точка відображає граничну вартість капіталу підприємства. У нашому прикладі вартість капіталу підприємства з середнім (для фінансування) ризиком дорівнює 10,3% (СЗВК = 10,3%).

Формалізований опис невизначеності та урахування ризику інвестиційних проектів

Оскільки при оцінюванні інвестиційних проектів у більшості випадків відсутня точна (вичерпна) інформація щодо динаміки потоків виручки та витрат, які генеруються цим проектом, то необхідно спиратися на відповідні прогнози. Ці прогнози набувають форму ймовірності того, що певна величина доходу

$$X_t = B_t - U_t$$

за інтервал часу t буде мати місце на період прогнозування T (t = 1, ..., T). Тут B_t – виручка від реалізації відповідної продукції, $U_t = (COF_t - I_t)$ – поточні витрати, COF_t – майбутні доходи на момент часу t, I_t – обсяг інвестицій для даного інвестиційного проекту в інтервалі t (t = 1, ..., T). Нехай, наприклад, у t-му інтервалі часу деяка величина доходу X_{tj} матиме місце з деякою ймовірністю p_j (j = 1, ..., n), і при цьому $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$.

Тоді можна обчислити математичне сподівання доходу в цьому інтервалі за формулою:

$$\overline{X_t} = \sum_{j=1}^{n} X_{tj} p_j,$$

де $\overline{X}_t$ – сподівана величина доходу, n – кількість можливих (імовірних) значень доходу.

Сподівана величина чистої теперішньої вартості (NPV), або, як ще можна сказати, величина інтегрованого дисконтованого економічного ефекту, виражається формулою:

$$\overline{NPV} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\overline{X}_t}{(1+R)^t} - I,$$

де I – початкові інвестиції.

Часто за показник абсолютного значення ступеня ризику беруть середньоквадратичне відхилення величини NPV (як випадкової величини) від її сподіваного значення ($\overline{NPV}$). Чим більшим буде значення середньоквадратичного відхилення (σ_{NPV}), тим більшим ступенем ризику обтяжений цей проект. Величина середньоквадратичного відхилення (σ_{X_t}) для доходу X_t визначається виразом:

$$\sigma_{X_t} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (X_{tj} - \overline{X_t})^2 p_j}.$$

Загальна величина ризику щодо інвестиційного проекту визначається як середньоквадратичне відхилення інтегрального дисконтованого економічного ефекту, тобто:

$$\sigma_{NPV} = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \frac{\sigma_{X_t}^2}{(1+R)^{2t}}} .$$

Існує певна залежність між ризиком і обсягом необхідних доходів. Ця залежність може бути подана у формі кривої байдужості відповідної функції корисності управлінської команди даного підприємства, яка показує взаємозв'язок між величиною ступеня ризику та необхідним прибутком. (Про це йшлося в попередньому матеріалі).

Зазначимо, що величини X_{tj} , t = 1, ..., T; j = 1, ..., n, можна визначити, використовуючи методи прогнозування та спираючись на аналіз ризику методами імітаційного моделювання.

Більшість людей (менеджерів, керівників підприємств) не визнає ризик за благо. Іншими словами, люди вимагають винагороди за ризик. Тому під час визначення доцільності капіталовкладень, що забезпечують імовірнісний інтегрований дисконтований економічний ефект (чисту теперішню вартість потоку доходів) NPV, необхідно або зменшити сподівані величини доходів ($\overline{X}_t$) на премію (π_t) за ризик:

$$NPV' = \sum_{t=1}^{T} \frac{\overline{X}_t - \pi_t}{(1+R_t')^t} - I ,$$

або ж збільшити сподівану ставку дисконту:

$$NPV' = \sum_{t=1}^{T} \frac{\overline{X}_t}{(1+R)^t} - I.$$

Значення R' визначається з такого рівняння:

$$\frac{\overline{X}_t - \pi_t}{(1+R)^t} = \frac{\overline{X}_t}{(1+R_t')^t} ,$$

звідки отримуємо, що $R_t' = -1 + \left(\frac{\overline{X}_t}{\overline{X}_t - \pi_t} \right)^{1/t} \cdot (1+R)$.

В якості наближеної оцінки можна використати формулу:

$$R_t' \approx R_1' = \frac{\overline{X}_t + \frac{\pi_1}{R}}{\overline{X}_1 - \pi_1} \cdot R .$$

Якщо покласти $\pi_t = k \cdot \sigma_{X_t}$, то величина k також залежатиме від багатьох (випадкових) чинників, і для її визначення необхідно прийняти певну систему раціональних гіпотез. Зокрема, можна прийняти за один із показників ризику величину α – імовірність того, що прогнозовані величини вийдуть за межі допустимого інтервалу значень (величина α має назву порогу дозволеності). Тоді, поклавши $\alpha = 0.05$ і зробивши припущення про нормальний закон розподілу величин X_t, отримуємо, що k = 1,64.

1.6. Інвестиційне кредитування та кількісна оцінка ризику реалізації проекту

У сучасних умовах джерелом фінансування інвестиційних проектів є не тільки функціонуючі промисловий і торговий капітали, але і позичковий капітал, оскільки він також бере участь у розподілі доданої вартості. Конкретною формою руху позичкового капіталу є кредит, сутність якого полягає в мобілізації тимчасово вільних коштів та їх розміщенні.

Інвестиційний кредит є різновидом банківського кредиту, направленого на інвестиційні цілі. Кредитний метод інвестування передбачає наявність взаємозв'язку між фактичною окупністю вкладень і поверненням кредиту в заздалегідь визначений строк. Кількісні межі інвестиційного кредиту визначаються, з одного боку, зацікавленістю позичальника в певному обсязі зовнішніх інвестицій, а з іншого - наявністю у нього можливості погасити позику та проценти по ній у зазначений строк.

Інвестиційний кредит - участь установи банку в інвестиційному проекті у формі надання кредиту на строк, який відповідає розрахунковому строку окупності проекту чи перевищує його, у міру реалізації якого (проекту) повернення інвестованих банком коштів і одержання доходу у вигляді процента здійснюються на етапі експлуатації інвестиційного проекту з виручки від реалізації продукції (робіт, послуг), що генерується самим проектом.

За допомогою методів дисконтування грошових потоків можна дати об'єктивнішу оцінку ефективності інвестицій. Ці методи дозволяють врахувати як величину, так і розподіл у часі очікуваних грошових потоків у кожному періоді реалізації проекту. Оскільки капітал має свою вартість, зміна вартості грошей у часі є надзвичайно важливою. Підприємство, що фінансує проект, дає вищу оцінку тому інвестиційному проекту, який обіцяє прибуток через 5 років, а не тому, який окупиться з тим самим прибутком через 6-10 років. Отже, зміна очікуваного грошового припливу в часі дуже важлива для ухвалення інвестиційного рішення. Методи дисконтування грошових потоків дають можливість ізолювати різницю в часі виникнення цих потоків, пов'язаних з різними проектами, шляхом дисконтування до їх поточної вартості.

Для прикладу застосування методів кількісної оцінки ризику реалізації проекту, що були викладені в попередньому підрозділі, в цьому підрозділі розглянемо результати роботи [8].

Нагадаємо, що *чиста приведена вартість (NPV)* становить різницю між сумою приведених (дисконтованих) вигод і сумою приведених (дисконтованих) витрат за інвестиційним проектом:

$$\mathrm{NP}V = \sum_{t=1}^{n} \frac{B_t - C_t}{(1+k)^t}, \tag{1.8}$$

де B_t - вигоди в часовому періоді t; C_t - витрати в часовому періоді t; k - вартість капіталу; n — строк життя проекту.

З визначення чистої приведеної вартості випливає, що основним ризикоутворюючим фактором є чисті вигоди ($Вч$) від реалізації інвестиційного проекту, що розраховуються як різниця між сумою вигод (B_t) та сумою витрат (C_t) у певному часовому періоді t.

За інвестиційного кредитування капіталовкладення у проект мають місце "сьогодні" (за рік до того, як перший часовий період здійснення інвестиційного проекту має закінчитися), тому виходячи з формули (1.8) *НPV* обчислюватимемо таким чином:

$$\mathrm{NP}V = \sum_{t=0}^{n} \frac{Вч_t}{(1+k)^t}, \tag{1.9}$$

де $Вч_t$, - чисті вигоди у часовому періоді *t, k* — вартість капіталу за проектом (процентна ставка); *n* - строк інвестиційного кредитування.

При цьому на початку здійснення інвестиційного проекту (t = 0) чисті вигоди ($Вч_0$) мають від'ємне значення, що дорівнює обсягу інвестицій (розміру інвестиційного кредиту), і вони не дисконтуються, оскільки саме до цього часового періоду (періоду початку проекту) наводяться майбутні фінансові результати від реалізації проекту.

Чисті вигоди *(Вч)* від реалізації інвестиційного проекту, в свою чергу, залежать від наступних факторів: ціни одиниці продукції, що виготовляється (реалізується) *(Ц);*обсягу виробництва (продажу) ($Ов$); питомих змінних витрат на одиницю продукції (Зв); накладних (постійних) витрат ($Пв$). Чисті вигоди розраховуються за формулою :

$$Вч = (Ц - Зв) \times Ов - Пв\,. \tag{1.10}$$

Спочатку комерційному банку необхідно сформувати матрицю із зазначених факторів ризику для проекту, що фінансується, виходячи з результатів експертних оцінок їх можливих значень (наприклад, оцінки проекту, що кредитується, чотирма різними експертами) (див. табл. 1.7).

Таблиця 1.7

Матриця факторів ризику проекту, що фінансується

Фактори ризику	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4
Ціна одиниці продукції (грн.)...	$Ц_1$	$Ц_2$	$Ц_3$	$Ц_4$
Обсяг виробництва (продажу) (од.).	$Ов_1$	$Ов_2$	$Ов_3$	$Ов_4$
Питомі змінні витрати (грн.).....	$Зв_1$	$Зв_2$	$Зв_3$	$Зв_4$
Накладні (постійні) витрати (грн.).	$Пв_1$	$Пв_2$	$Пв_3$	$Пв_4$

Для заданого обсягу інвестицій (розміру інвестиційного кредиту), процентної ставки і строку кредитування за формулою (1.9) обчислюються значення *NPV* проекту при всіх варіантах поєднання факторів ризику (4^4 = 256 значень). При цьому розмір інвестиційного кредиту, процентна ставка і строк кредитування є незмінними, а чисті вигоди розраховуються за формулою (1.10), та формується наступна вибірка:

$$Вч_n = (Ц_i - Зв_j) \times Ов_k - Пв_j. \tag{1.11}$$

Величина *NPV* для конкретного інвестиційного проекту є випадковою величиною (X), оскільки її значення залежить від непередбачуваних обставин: ринкової кон'юнктури, політико-правової ситуації в країні, менеджменту підприємства, що реалізує інвестиційний проект. Випадкова величина X є неперервною, бо величина чистої приведеної вартості може набувати будь-якого числового значення з деякого інтервалу (кількість можливих значень такої величини є нескінченною).

Таким чином, розраховані варіанти значень *NPV для* певного інвестиційного проекту формують вибірку можливих значень випадкової величини X.

Припустимо, що неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Таке припущення доводитимемо для кожного окремого інвестиційного проекту, що планується кредитувати, за допомогою *правила трьох сигм:* якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X - a| < 3\sigma$, тоді можна вважати, що X розподілена нормально.

Щільність імовірностей нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.12}$$

де a - математичне сподівання нормального розподілу $\left(a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$;

σ - середнє квадратичне відхилення;

X_i, - значення *NPV* для i-го варіанта поєднання факторів ризику;

n- кількість варіантів поєднання факторів ризику (п = 256).

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n(n-1)}}. \tag{1.13}$$

Графік цієї функції $f(x)$ є нормальною кривою або кривою Гауса.

Для того, щоб реалізація інвестиційного проекту сприяла підвищенню суспільного та/або приватного добробуту, чиста приведена вартість цього проекту має бути додатною величиною (*NPV* > 0). Звідси імовірність дефолту інвестиційного проекту або ризик реалізації інвестиційного проекту (R_p) дорівнює площі фігури, що знизу обмежується віссю абсцис, зліва і зверху - кривою Гауса, а справа - віссю ординат (див. рис. 1.3).

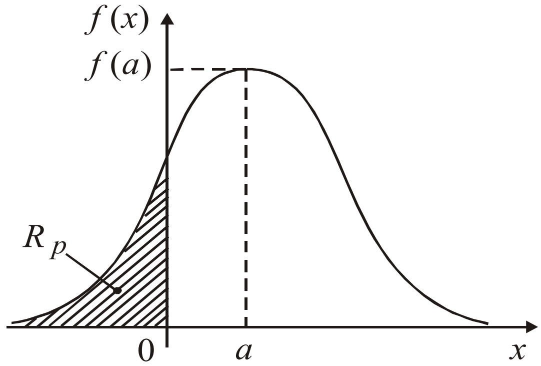


Рис. 1.3. *Графічне зображення ймовірності збитковості інвестиційного проекту*

Площу зазначеної фігури знаходять за допомогою інтегрування функції *f(x)* за формулою:

$$R_p = P(-\infty < X \le 0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{1.14}$$

Якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами а та σ, то випадкова величина $Z = \frac{x-a}{\sigma}$ буде розподілена за нормованим нормальним законом. Тому формула (1.14) може бути подана у вигляді:

$$R_p = P(-\infty < X \le 0) = -\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) + 0{,}5, \tag{1.15}$$

де $\Phi(x)$ - інтегральна функція Лапласа, яка має вигляд:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

a, σ - параметри нормального розподілу *NPV* для конкретного інвестиційного проекту.

Оскільки крива Гауса, яка описує щільність ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини X, є симетричною відносно прямої, що паралельна осі ординат і проходить через точку a (математичного сподівання), то граничним значенням рівня ризику реалізації інвестиційного проекту є $R_p > 0{,}5$. За такої ситуації інвестиційний проект, що аналізується, можна вважати потенційно збитковим.

У роботі [8], викладена вище методика оцінки ризику реалізації проекту за інвестиційного кредитування, застосована до наступного прикладу.

Таксомоторне підприємство «Карета» звернулося до банку з проханням профінансувати інвестиційний проект щодо придбання легкового автомобіля марки «Renault Symbol» з метою надання послуг з перевезення пасажирів. Для цього підприємству необхідно одержати інвестиційний кредит строком на 4 роки у розмірі 12600 дол. під 11% річних. Оцінимо рівень ризику реалізації інвестиційного проекту (R_p) з метою прийняття рішення щодо інвестування коштів.

Враховуючи бізнес-план реалізації даного проекту, який надано позичальником, та ринкові ціни, банківський працівник-експерт створює наступну матрицю факторів ризику (див. табл. 1.7, 1.8):

Таблиця 1.8

Застосування матриці факторів ризику проекту, що фінансується

Фактори ризику	**Варіант 1**	**Варіант 2**	**Варіант 3**	**Варіант 4**
Ціна 1 км пробігу автомобіля-таксі (Ц)(дол.)……………………	0,20	0,23	0,28	0,32
Річний пробіг автомобіля-таксі (Ов) (км)….................................	120200	135200	141160	158800
Питомі змінні витрати у розрахунку на 1 км пробігу автомобіля *(Зв)* (дол.) …………………………	0,11	0.15	0,17	0,18
Річні накладні (постійні) витрати (Яв) (дол.)………………………	6040	7080	8200	8740

Для заданого обсягу інвестицій (12600 дол.), процентної ставки (11% річних) і строку кредитування (4 роки) за формулою (1.15) банківський працівник обчислює значення *NPV* проекту при всіх варіантах поєднання факторів ризику (4^4= 256 значень). При цьому чисті вигоди (Вч) банківський працівник розраховує виходячи з формули (1.12). Розраховані варіанти значень NPV для даного інвестиційного проекту є вибіркою можливих значень випадкової величини X, що розподілена за нормальним законом, оскільки $|X - a| < 3\sigma$ (див. табл. 1.9).

Обчислимо параметри нормального розподілу чистої приведеної вартості (a = 9313,19 дол., σ= 23761,46 дол.) та, скориставшись формулою (1.15), визначимо рівень ризику реалізації інвестиційного проекту (R_p):

$$R_p = -\Phi(9313{,}19 / 23761{,}46) + 0{,}5 = -\Phi(0{,}39) + 0{,}5 .$$

Використовуючи таблицю функції Лапласа, встановлюємо, що значення Ф(х) за x = 0,39 дорівнює 0,1554. Таким чином:

$$R_p = -0{,}1554 + 0{,}5 = 0{,}3446 .$$

Точніше значення рівня ризику реалізації інвестиційного проекту можна одержати, скориставшись вбудованою функцією Microsoft Office Excel НОРМОСТРАСП(z), де z - значення, для якого будується нормований нормальний інтегральний розподіл $(Z = \frac{0 - a}{\sigma})$.

Зазначена формула у комірці Microsoft Office Excel записується так: «=НОРМСТРАСП((0 - 9313,19)/23761,46)» та набуває значення :

$$R_p = 0.34755.$$

Оскільки R_p<0,5, то імовірність дефолту даного інвестиційного проекту є низькою, що дозволяє прийняти рішення про його фінансування.

Наявність зв'язку інвестиційних кредитів з великим ризиком і сповільненням обігу коштів зумовлює необхідність розробки та впровадження в банківську практику сучасних методів кількісної оцінки такого ризику, що дозволять банківським установам запровадити адекватний економічний механізм активізації своєї діяльності у сфері довгострокового кредитування проектів та фінансування інвестиційних програм. Це, у свою чергу, вимагає наявності вірогідної оперативної інформації, яка в повному обсягу має відображатися в бухгалтерському обліку і допомагати вишукувати шляхи, форми і методи участі вітчизняних банків в інвестиційних процесах.

Таблиця 1.9

Вибірка можливих значень чистої приведеної вартості (NPV)
для інвестиційного проекту, запропонованого таксомоторним підприємством «Карета»

(дол.)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	2223,49	13410,90	32056,60	46973,16	6411,79	18995,31	39967,84	56745,87	8075,94	21214,18
10	43111,24	60628,89	13001,38	27781,43	52414,85	72121,31	-12693,07	-1505,65	17140,04	32056,60
20	-10366,24	2217,28	23189,81	39967,84	-9441,71	3696,53	25593,59	43111,24	-6705,35	8074,70
30	32708,12	52414,85	-20151,35	-8963,93	9681,76	24598,32	-18755,25	-6171,73	14800,80	31578,83
40	-18200,53	-5062,30	16834,76	34352,41	-16558,72	-1778,67	22854,75	42561,48	-23880,49	-12693,07
50	5952,63	20869,18	-22949,76	-10366,24	10606,29	27384,32	-22579,95	-9441,71	12455,35	29973,00
60	-21485,40	-6705,35	17928,07	37634,80	-1003,06	10184,36	28830,06	43746,62	3185,24	15768,76
70	36741,30	53519,32	4849,40	17987,63	39884,69	57402,34	9774,84	24554,89	49188,31	68895,04
80	-15919,62	-4732,20	13913,50	28830,06	-13592,78	-1009,26	19963,27	36741,30	-12668,25	469,98
90	22367,04	39884,69	-9931,90	4848,15	29481,57	49188,31	-23377,90	-12190,48	6455,22	21371,78
100	-21981,80	-9398,28	11574,26	28352,28	-21427,08	-8288,84	13608,22	31125,87	-19785,26	-5005,21
110	19628,21	39334,94	-27107,04	-15919,62	2726,08	17642,64	-26176,30	-13592,78	7379,75	24157,78
120	-25806,49	-12668,25	9228,81	26746,46	-24711,95	-9931,90	14701,52	34408,26	-4477,80	6709,62
130	25355,32	40271,88	-289,50	12294,02	33266,56	50044,58	1374,66	14512,89	36409,96	53927,60
140	6300,10	21080,15	45713,57	65420,30	-19394,36	-8206,94	10438,76	25355,32	-17067,52	-4484,00
150	16488,53	33266,56	-16142,99	-3004,76	18892,31	36409,96	-13406,64	1373,42	26006,83	45713,57
160	-26852,64	-15665,22	2980,48	17897,04	-25456,53	-12873,02	8099,52	24877,54	-24901,82	-11763,58
170	10133,48	27651,13	-23260,00	-8479,95	16153,47	35860,20	-30581,78	-19394,36	-748,66	14167,90
180	-29651,04	-17067,52	3905,01	20683,04	-29281,23	-16142,99	5754,07	23271,72	-28186,69	-13406,64
190	11226,78	30933,52	-6153,12	5034,30	23680,00	38596,56	-1964,82	10618,70	31591,24	48369,26
200	-300,66	12837,57	34734,63	52252,28	4624,78	19404,83	44038,25	63744,98	-21069,68	-9882,26
210	8763,44	23680,00	-18742,84	-6159,32	14813,21	31591,24	-17818,31	-4680,08	17216,99	34734,63
220	-15081,96	-301,91	24331,51	44038,25	-28527,96	-17340,54	1305,16	16221,72	-27131,86	-14548,34
230	6424,20	23202,22	-26577,14	-13438,90	8458,16	25975,81	-24935,32	-100155,27	14478,15	34184,88
240	-32257,10	-21069,68	-2423,98	12492,58	-31326,36	-18742,84	2229,69	-19007,72	-30956,55	-17818,31
250	4078,75	21596,40	-29862,01	-15081,96	9551,46	29258,20	-	-	-	-

1.7. Динамічна модель планування інвестицій з урахуванням ризиків

Розглянемо наступне завдання фінансового планування. Василь Іванов – керівник компанії, яка щойно уклала контракт на покупку нового обладнання для консервування продуктів харчування, яке обійшлося в 750 тис. дол. Відповідно до умов контракту 150 тис. дол. необхідно сплатити через два місяці, а решту – через шість місяців, коли встаткування буде поставлено.

Щоб розплатитися повністю, Василь передбачає створити цільовий фонд, який можна використовувати для інвестицій. Оскільки такі інвестиції породять додаткову готівку на той час, коли потрібно буде вносити гроші за обладнання, то Василь знає, що йому слід відкласти менше, ніж 750 тис. дол. А от скільки саме – залежить від наявних можливостей інвестування.

Василь вирішив зосередитися на 12 можливостях інвестування, показаних у табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Дані для завдання фінансового планування

Можливі інвестиції	**Наявність на початок**	**На скільки місяців**	**Відсоток за кредит**	**Індекс ризику**
A	Місяця 1, 2, 3, 4, 5 і 6	1	1,5	1
B	Місяця 1, 3 і 5	2	3,5	4
C	Місяця 1 і 4	3	6	9
D	Місяця 1	6	11	7

Ціль 1. При даних можливостях інвестування й необхідного графіка виплат ціль Іванова полягає в тому, щоб розробити стратегію, яка мінімізує наявну суму, яку він повинен мати на самому початку для виплати всіх грошей за укладеним контрактом.

Ціль 2. При розробці цієї стратегії Іванов повинен бути впевнений, що протягом кожного місяця середній індекс ризику інвестованих фондів не повинен перевищувати 6.

Ціль 3. На початку кожного місяця (після того як зроблені нові інвестиції) середня тривалість погашення інвестованих фондів не повинна перевищувати 2,5 місяця.

Таблиця 1.11

Зведені дані про можливості вкладень і повернення грошей з відсотками

Інвестиції	**Початок місяця**						
	1	2	3	4	5	6	7
А у місяці 1	$1,00–	$1,015					
А у місяці 2		$1,00 –	$1,015				
А у місяці 3			$1,00 –	$1,015			
А у місяці 4				$1,00 –	$1,015		
А у місяці 5					$1,00 –	$1,015	
А у місяці 6						$1,00–	$1,015
В у місяці 1	$1,00——	——	$1,035				
В у місяці 3			$1,00——	——	$1,035		
В у місяці 5					$1,00——	——	$1,035
С у місяці 1	51,00 ——	——	——	——	$1,06		
С у місяці 4				$1,00——	——	——	$1,06
D у місяці 1	$1,00——	——	1——	——	——	——	$1,11

Рис. 1.4 ілюструє процес інвестування

Вкладання грошей на початку періоду по контракту відповідно з графіком	+	Вкладання грошей в інвестиції на початку періоду	=
= Повернення грошей на початку періоду від інвестицій, зроблених у попередньому періоді	+	Вилучення готівки на початку періоду від відкладеного фонду за графіком контракту	

Рис. 1.4. *Баланс коштів при інвестуванні*

Розв'язок. Відповідно до таблиці можливостей інвестування (табл. 1.11) введемо основні позначення – змінні моделі:

для проекту А: $X_1(A), X_2(A), X_3(A), \ \dots \ , \ X_6(A)$;

для проекту В: $X_1(B), X_3(B), \ X_5(A)$;

для проекту С: $X_1(C), X_4(C)$;

для проекту D: $X_1(D)$.

Через $r(A)$, $r(B)$, $r(C)$, $r(D)$ позначимо прибутковість по кожному проекту. За умовами завдання $r(A) = 0{,}015$, $r(B) = 0{,}035$, $r(C) = 0{,}06$, $r(D) = 0{,}11$.

Шуканими в моделі є 12 змінних. Тому що за умовою завдання потрібно мінімізувати стартовий капітал для виконання основного завдання інвестиційного проекту, то критерій має вигляд:

$$X_1(A) + X_1(B) + X_1(C) + X_1(D) \to \min \qquad (1.16)$$

Перша група обмежень моделі пов'язана з динамікою вкладень і віддачі від них по місяцях, починаючи з другого (вкладення на початку першого місяця утворюють критерій):

$$(1 + r(A))X_1(A) + X_2(A) = 0;$$

$$(1+r(A))X_2(A)+(1+r(B))X_1(B) - X_3(A) - X_3(B) = 150 \text{ (тис. дол.)}; \qquad (1.17)$$

$$(1 + r(A))X_3(A) + (1 + r(C))X_1(C) - X_4(A) - X_4(C) = 0;$$

$$(1 + r(A))X_4(A) + (1 + r(B))X_3(B) - X_5(A) - X_5(B) = 0;$$

$$(1 + r(A))X_5(A) - X_6(A) = 0;$$

$$(1 + r(A))X_6(A) + (1 + r(B))X_5(B) + (1 + r(C))X_4(C) +$$
$$+ (1 + r(D))X_1(D) = 600 \text{ (тис. дол.)}. \qquad (1.18)$$

Друга група обмежень пов'язана з поняттям середнього ризику. Нагадаємо, що якщо A і B – вкладення з ризиками R_A й R_B відповідно, то середній ризик R дорівнює середньозваженому:

$$R = \frac{A \cdot R_A + B \cdot R_B}{A + B}.$$

Аналогічно R розраховується для будь–якого числа вкладень. Тепер можна сформулювати другу групу обмежень для кожного періоду часу (місяця) окремо:

$$\frac{X_1(A)\cdot 1 + X_1(B)\cdot 4 + X_1(C)\cdot 9 + X_1(D)\cdot 7}{X_1(A) + X_1(B) + X_1(C) + X_1(D)} \le 6.$$

Або, перетворюючи, одержимо:

$$-5X_1(A) - 2X_1(B) + 3X_1(C) + X_1(D) \le 0.$$

$$\frac{X_2(A)\cdot 1 + X_1(B)\cdot 4 + X_1(C)\cdot 9 + X_1(D)\cdot 7}{X_2(A) + X_1(B) + X_1(C) + X_1(D)} \le 6.$$

Тут у вираженні ризику для другого місяця присутні інвестиції, які перебувають «у роботі». Перетворюючи, одержимо:

$$-5X_2(A) - 2X_1(B) + 3X_1(C) + X_1(D) \le 0.$$

$$\frac{X_3(A)\cdot 1 + X_3(B)\cdot 4 + X_1(C)\cdot 9 + X_1(D)\cdot 7}{X_3(A) + X_3(B) + X_1(C) + X_1(D)} \le 6.$$

Або після перетворень:

$-5X_3(A)-2X_3(B)+3X_1(C)+X_1(D)\le 0$.

Аналогічно виписуються інші нерівності цієї групи обмежень:

$-5X_4(A)-2X_4(B)+3X_4(C)+X_1(D)\le 0$,

$-5X_5(A)-2X_5(B)+3X_5(C)+X_1(D)\le 0$,

$-5X_6(A)-2X_6(B)+3X_6(C)+X_1(D)\le 0$.

Третя група обмежень пов'язана з поняттям середньої тривалості інвестування. Якщо A і B – вкладення на періоди тривалістю T_A й T_B відповідно, то середня тривалість інвестованих коштів становить:

$$T=\frac{A\cdot T_A+B\cdot T_B}{A+B}.$$

Тоді для першого місяця обмеження по тривалості інвестованих фондів має вигляд:

$$\frac{X_1(A)\cdot 1+X_1(B)\cdot 2+X_1(C)\cdot 3+X_1(D)\cdot 6}{X_1(A)+X_1(B)+X_1(C)+X_1(D)}\le 2{,}5.$$

Після перетворень воно набуває вигляду:

$$-1{,}5X_1(A)-0{,}5X_1(B)+0{,}5X_1(C)+3{,}5X_1(D)\le 0.$$

При формуванні обмеження для другого місяця необхідно врахувати, що для вкладень $X_1(B)$, $X_1(C)$ і $X_1(D)$ тривалість їх інвестування скоротилася на один місяць.

Тоді обмеження для другого місяця запишемо у вигляді:

$$\frac{X_2(A)\cdot 1+X_1(B)\cdot 1+X_1(C)\cdot 2+X_1(D)\cdot 5}{X_1(A)+X_1(B)+X_1(C)+X_1(D)}\le 2{,}5$$

Або після перетворень одержимо:

$$-1{,}5X_2(A)-1{,}5X_1(B)-0{,}5X_1(C)+2{,}5X_1(D)\le 0.$$

Для третього місяця маємо:

$$\frac{X_3(1)\cdot 1+X_3(B)\cdot 2+X_1(C)\cdot 1+X_1(D)\cdot 4}{X_3(1)+X_3(B)+X_1(C)+X_1(D)}\le 2{,}5.$$

Преутворюючи його, маємо:

$$-1{,}5X_3(1)-0{,}5X_3(B)-1{,}5X_4(C)+1{,}5X_1(D)\le 0.$$

Для четвертого місяця одержимо:

$$\frac{X_4(A)\cdot 1+X_3(B)\cdot 2+X_4(C)\cdot 3+X_1(D)\cdot 3}{X_4(1)+X_3(B)+X_4(C)+X_1(D)}\le 2{,}5,$$

що дає:

$$-1{,}5X_4(1)-1{,}5X_3(B)+0{,}5X_4(C)+0{,}5X_1(D)\le 0.$$

Для п'ятого місяця маємо:

$$\frac{X_5(A)\cdot 1+X_5(B)\cdot 2+X_4(C)\cdot 2+X_1(D)\cdot 2}{X_5(A)+X_5(B)+X_4(C)+X_1(D)}\le 2{,}5,$$

або після перетворень:

$$-1{,}5X_5(1)-0{,}5X_5(B)-0{,}5X_4(C)-0{,}5X_1(D)\le 0.$$

Ми бачимо, що ця нерівність виконується завжди (усі члени в лівій частині мають від'ємний знак). Це пов'язане з тим, що до завершення всього інвестиційного процесу (терміну віддачі від усіх вкладень) залишилося два місяці, а обмеження поширюється на середню тривалість в 2,5 місяці, тобто воно виконується завжди при будь-якому розподілі вкладень. Тим більше обмеження буде виконано для шостого місяця, тому нема рації його виписувати. Таким чином, формуючи систему обмежень моделі, з третьої групи обмежень два останні обмеження слід відкинути, тому що вони не впливають на вибір оптимального розв'язку.

Таким чином, додавши умови незаперечності:

$$X_1(A)\ge 0,\ldots,X_6(A)\ge 0;$$
$$X_1(B)\ge 0,\ldots,X_5(B)\ge 0;$$
$$X_1(C)\ge 0, X_4(C)\ge 0;$$
$$X_1(D)\ge 0, \tag{1.19}$$

одержимо, що вирази (1.16) – (1.19) утворюють задачу лінійного програмування, яку ми пропонуємо для самостійного розв'язку з використанням пакета прикладних програм.

Питання до самоконтролю

1. Що таке інвестиції, інвестиційний проект?
2. Що таке бульові змінні?
3. У чому полягає вибір інвестиційних проектів в умовах обмежених фінансових ресурсів?
4. Як виконується оптимальний вибір з n проектів?
5. Що таке нормативний коефіцієнт економічної ефективності інвестицій?
6. У чому полягає особливість оптимізації фінансування інвестиційних проектів з урахуванням банківських відсотків?
7. Що таке: вартість капіталу підприємства; середньозважена вартість капіталу (СЗВК)?
8. Дайте визначення таких термінів: а) дисконтна ставка; б) чиста теперішня вартість (NPV).

9. Що таке модель оцінки капітальних активів (МОКА)?

10. Дайте визначення внутрішньої норми прибутку (IRR).

11. Що таке сподівана величина чистої теперішньої вартості ($\overline{NPV}$)?

12. Що таке бета-ризик?

13. Як здійснюється оцінка доцільності капіталовкладень?

14. Як здійснюється оцінка різику проекту?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Розв'язати задачу з прикладу 1 п. 1.1, якщо необхідні обсяги інвестицій наведені в таблиці.

Проект	**Потреба в коштах (тис. дол.)**			
	1–й квартал	2–й квартал	3–й квартал	4–й квартал
A	10+N/15	12,15	12,5	12,5
B	10,4	10,8	13,1–N/15	14,85
C	5,5+N/15	9,45	12,15	14,85
D	12,15	10,8	10,5–N/15	8,1

Можливості компанії дозволяють їй інвестувати в першому кварталі не більше 29+N/15 тис. дол., у другому – не більше 33–N/15, у третьому – не більше 36–N/15 й у четвертому – не більше 38–N/15 тис. дол.

Задача 2

Необхідно визначити ступінь ризикованості інвестиційного проекту. Запланований інвестиційний процес характеризується такими даними:

1. Інвестиційний проект буде здійснюватися протягом 4 років.
2. Розмір стартових інвестицій відомий точно і складає $I = 1{,}5 + N/30$ млн. грн.
3. Ставка дисконтування в плановому періоді може коливатися в межах від $d_{\min} = 6 + N/10\%$ до $d_{\max} = 30 - N/10\%$ річних.

4. Чистий грошовий потік планується в діапазоні від $CF_{\min} = 1 + N/30$ до $CF_{\max} = 3 + N/30$ млн. грн.
5. Залишкова (ліквідаційна) вартість проекту дорівнює нулю.

Задача 3

У задачі для Василя Іванова, яка була розглянута у п. 1.7, у якості заданої інформації виступає графік виплат, а цільова функція полягає в мінімізації початкового бюджету інвестицій. Тепер припустимо, що у Василя немає ніяких фінансових зобов'язань. Замість цього припустимо, що у Василя є $480 + N$ тис. дол., які можна інвестувати на початку місяця 1. Його завдання – використати можливості інвестицій, представлені в табл. 1.9, щоб максимізувати готівку до кінця шестимісячного періоду?

Завдання 3.1. Побудуйте модель лінійного програмування для цього завдання. Проведіть розрахунки. Яка максимальна готівка буде отримана до кінця шестимісячного періоду?

Підказка. У цій моделі критерій (1.16) змінюється – він стає обмеженням:

$$X_1(A) + X_1(B) + X_1(C) + X_1(D) = 480 + N \text{ (тис. дол.)}.$$

Оскільки в інвестора немає ніяких фінансових зобов'язань, то в обмеженні (1.17) права частина прирівнюється нулю. А критерієм стає ліва частина рівності (1.18). Таким чином, вирішується завдання лінійного програмування:

$$(1 + r(A))X_6(A) + (1 + r(B))X_5(B) + (1 + r(C))X_4(C) +$$
$$+ (1 + r(D))X_1(D) \to \max$$

з модифікованими обмеженнями (1.16) – (1.19).

Знайти розв'язок цього завдання лінійного програмування, використовуючи пакет прикладних програм.

Завдання 3.2. Припустимо, що на додаток до $480 + N$ тис. дол., які є у розпорядженні Василя, передбачається виділити йому ще $240 + N/2$ тис. дол. на початку місяця 4. Які додаткові зміни потрібно внести в модель? Як вони відіб'ються на розв'язку завдання?

Примітка. У задачах 1 – 3 N – порядковий номер студента в групі.

Задача 4

Костянтин Іванов — керівник компанії «Золоте колосся», що спеціалізується на випуску пива. Компанія закупила обладнання для випуску популярного сорту пива «Подвійне золоте». Вартість устаткування 900 тис. грн. Відповідно до умов контракту 200 тис. грн.

необхідно виплатити через два місяці, коли обладнання буде поставлено, а 700 тис. грн., що залишилися, - через шість місяців, коли обладнання буде змонтовано.

Щоб розплатитися повністю, Костянтин передбачає негайно ж утворити цільовий фонд, який можна використовувати для інвестицій. Оскільки такі інвестиції породять додаткову готівку на той час, коли доведеться вносити гроші за обладнання, Костянтин знає, що йому слід відкласти менше, ніж 900 тис. руб. А от скільки саме – залежить від наявних можливостей інвестування.

Костянтин вирішив зосередитися на 12 можливих схемах інвестування.

Дані для завдання фінансового планування представлені в наступній таблиці:

Вид внеску	**Строк внеску, місяці**	**Можливі моменти вкладення (початок місяця)**	**Відсоток по внескові**	**Індекс ризику**
A	1	1,2,3,4,5,6	1,7%	3
B	2	1,3,5	3,5%	10
C	3	1,4	5,5%	7
D	6	1	10,5%	9

Для кожного виду внеску відома експертна оцінка ризику затримки виплати по внескові.

Складіть модель лінійного програмування для визначення мінімального розміру цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати.

Питання:

1. Який мінімальний розмір цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати без урахування ризику?
2. Яка вартість у початковий момент часу однієї гривні, яку треба виплатити на початку сьомого місяця (через шість місяців)?
3. Який мінімальний розмір цільового фонду, що дозволяє зробити необхідні виплати, якщо середній ризик у кожний момент часу не повинен перевищувати 6?
4. Яка «плата» за зниження ризику (у грн.)?

РОЗДІЛ 2. ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА І ЙОГО ЕТАПІВ

2.1. Календарне планування

Будь-яка діяльність протікає в часі, тому в багатьох практично важливих випадках виявляється необхідним визначити послідовність виконання певних робіт, тобто скласти ***календарний план*** виробничого процесу. Календарний план провадить ув'язування в часі всіх дій, спрямованих на досягнення мети. Це має привести до поліпшення плану й скорочення термінів його виконання. Специфіка завдань календарного планування, їх обсяг, складність привели до розвитку особливої групи моделей і спеціальних методів розв'язування, які вивчаються в розділі дослідження операцій, що називається ***теорією розкладу***.

Розглянемо кілька прикладів.

Є шлюз, здатний пропускати тільки по одному кораблю. Простій судів тягне штрафи, розмір яких залежить від типу затримуваного корабля й часу простою. Знаючи розклад прибуття судів, треба визначити порядок шлюзування, який мінімізує загальну суму штрафів.

Класичне завдання про комівояжера. Комівояжер повинен відвідати кілька міст, відстані між якими відомі, і повернутися додому. Треба вибрати маршрут, який мінімізує загальний шлях. Якщо є всього десять міст, то при повному переборі всіх маршрутів треба переглянути «усього» 3628800 варіантів. Якщо кожний варіант переглядати й оцінювати хоча б за хвилину, то й тоді на пошук оптимального розв'язку в такий спосіб піде майже сім років.

Нарешті, назвемо таке типове завдання календарного планування, як завдання визначення порядку запуску деталей у виробництво. У цьому завданні є виробничий план у вигляді переліку деталей, які мають бути виготовлені за зазначеною технологією, кількість деталей кожного найменування, трудомісткість обробки деталей на кожному верстаті й, можливо, які-небудь ще дані. Потрібно скласти календарний план, який мінімізує загальний час виготовлення всіх деталей.

Якщо розмірність завдання (число змінних) не дуже велика, то можуть бути використані графічні або табличні методи подання календарного плану. При ***графічному методі*** наочно зображується (з дотриманням масштабу часу) черговість виконання робіт, їх взаємне розташування в часі. ***Табличний метод*** подання календарних планів, як видно з його назви, заснований на використанні різних таблиць. Найчастіше необхідність у таблицях з'являється вже просто через значне число змінних у завданні, коли на графіку (на рисунку) відбувається злиття всіх ліній з повною втратою наочності графіка. Крім того, таблиця може містити значно більший обсяг інформації, ніж графік. Нарешті, таблиці легше, ніж графіки, одержувати з вихідних пристроїв ЕОМ.

Розглянемо два приклади складання календарного плану.

$$x_3 + 2x_4 \le 8;$$

$$2x_3 + 2x_4 \le 10; \qquad (2.19)$$

сумарний видаток загальних ресурсів об'єднання на підприємствах I і II не перевершує лімітів цих ресурсів:

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \le 18;$$

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 30; \qquad (2.20)$$

випуски продукції повинні бути невід'ємні:

$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0; \qquad (2.21)$$

загальний обсяг прибутку по об'єднанню повинен бути максимальним:

$$12x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max. \qquad (2.22)$$

По своїй суті завдання поточного оптимального планування на рівні об'єднання є завданням спеціалізації, у якому потрібно визначити оптимальний план випуску продукції (як за обсягом, так і за складом) при заданих ресурсах. Детальне моделювання процесу випуску продукції й витрати ресурсів вимагає включення в модель об'єднання опису підприємств. Це приводить до великої розмірності завдання на рівні об'єднання і відповідних труднощів при його розв'язку, але одночасно дає й засіб для подолання цих труднощів, а саме: специфічний вигляд матриці завдання.

Дійсно, звертаючись до прикладу, бачимо, що є блокове завдання лінійного програмування, яке складається (у цьому випадку) з трьох блоків, у кожному з яких по два обмеження. Умови (2.18) становлять I блок, умови (2.19) – II блок. Ці блоки описують умови функціонування локальних об'єктів (підприємств), відображаючи обмеженість локальних ресурсів, тобто власних ресурсів підприємств (наприклад, основних фондів різного виду). Умови (2.20) становлять III блок. Він характеризує умови функціонування об'єднання в цілому й відображає обмеженість загальних ресурсів (наприклад, сировини).

Перейдемо до складання моделі в літерних позначеннях. Для компактності запишемо її в матричному виді. Нехай

t – індекс підприємства, що входить у галузь (t = 1, 2,..., T);

j_t – індекс виду продукції, виробленої t-*м* підприємством ($j_t = 1, 2, \ldots, n_t$);

i_t – індекс виду ресурсу, «власного» для підприємства t ($i_t = 1, 2, \ldots, m_t$);

i – індекс виду ресурсу загальних ресурсів об'єднання (i = 1, 2,..., m);

X_t – вектор випуску продукції підприємством t (розмірністю $n_t \times 1$);

B_t – вектор лімітів локальних ресурсів i_t, споживаних підприємством *t* (розмірністю $m_t \times 1$);

$\overline{B}$ – вектор лімітів загальних ресурсів *i* (розмірністю $m \times 1$);

P_t – вектор питомого прибутку від випуску продукції підприємством *t* (розмірністю $1 \times n_t$);

A_t – матриця коефіцієнтів (норм) витрат локальних ресурсів на випуск продукції підприємством *t* (розмірністю $m \times n_t$);

$\overline{A}_t$ – матриця коефіцієнтів (норм) витрат загальних ресурс на випуск продукції підприємством *t* (розмірністю $m \times n_t$).

У цих позначеннях модель об'єднання, що складається з T підприємств, запишеться в такий спосіб:

$$\begin{array}{llll} A_1 X_1 & & & \le B_1; \\ \quad ... & & & \quad ... \\ & A_t X_t & & \le B_t; \\ & \quad ... & & \quad ... \\ & & A_1 X_1 & \le B_1; \end{array} \qquad (2.23)$$

$$\overline{A}_1 X_1 + ... + \overline{A}_t X_t + ... + \overline{A}_T X_T \le \overline{B}; \qquad (2.24)$$

$$X_t \ge 0 \ (t = 1, 2, ..., T); \qquad (2.25)$$

$$P_1 X_1 + ... + P_t X_t + ... + P_T X_T \to \max. \qquad (2.26)$$

У нашому прикладі:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 14 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = (12,\ 6) \qquad P_2 = (5, 2).$$

об'єднання уможливлює її розчленовування на ряд підзадач суттєво меншої розмірності і їх взаємозалежний розв'язок у рамках ітеративного процесу. Методи розв'язку можуть бути різні. Розглянемо деякі з них на умовному прикладі, звертаючи головну увагу на економічну інтерпретацію.

Метод розкладання Данцига – Вулфа

Метод розкладання (декомпозиції) був розроблений для розв'язку завдань лінійного програмування великої розмірності, що мають блокову структуру. Його обчислювальна процедура істотно заснована на ідеях модифікованого симплекс-методу. Однак значення цього методу полягає не тільки (і не стільки) у його обчислювальних перевагах, скільки в можливості дати змістовну економічну інтерпретацію. Метод Данцига – Вулфа передбачає розкладання вихідного завдання (2.23) – (2.26) на локальні завдання, відповідні до відособлених частин об'єднання (у цьому випадку підприємств) і головне завдання (відповідає об'єднанню в цілому) і зв'язує ці завдання.

Як відомо, на кожному кроці процесу розв'язку в кожному з методів лінійного програмування виконують наступні операції: а) одержують розв'язок; б) перевіряють отриманий план на оптимальність; в) у випадку неоптимальності виявляють той вектор, який потрібно ввести в базис (опорний план) поліпшеного плану. У методі Данцига – Вулфа цей процес ніби розподіляється між головним завданням, з одного боку, і локальними завданнями – з іншого.

Після одержання розв'язку на рівні об'єднання в головному завданні (етап а) іде звертання до локальних завдань. Шляхом розв'язку кожного локального завдання ми повинні перевірити на оптимальність отриманий розв'язок головного завдання (етап б) і, якщо воно не оптимально, знайти той варіант плану якого-небудь із підприємств, який треба ввести в базис головного завдання, щоб поліпшити план об'єднання (етап в).

Для запису моделі головного завдання введемо наступні позначення:

k_t – індекс (номер) базисного плану t-го підприємства $(k_t = 1, 2, ..., K_t)$;

$X_t^{k_t}$ – вектор випуску продукції t-го підприємства за базисним планом k_t (розмірністю $n_t \times 1$);

$S_t^{k_t}$ – вектор витрати загальних ресурсів на весь випуск $X_t^{k_t}$ (розмірністю $m \times 1$);

$$S_t^{k_t} = \bar{A}_t \cdot X_t^{k_t}; \qquad (2.27)$$

$r_t^{k_t}$ – увесь обсяг прибутку від випуску $X_t^{k_t}$;

$$r_t^{k_t} = P_t \cdot X_t^{k_t}; \qquad (2.28)$$

$\lambda_t^{k_t}$ – питома вага (частка), з якою базисний план k_t підприємства t ввійде в план об'єднання в головному завданні. Таким чином, будь-який припустимий план X_t підприємства в завданні об'єднання може бути отриманий «змішуванням» базисних планів

$X_t^{k_t}$ у різних пропорціях, що задаються числами $\lambda_t^{k_t}$. Або, іншими словами, X_t є лінійною комбінацією $X_t^{k_t}$:

$$X_t = \sum_{k_t=1}^{K_t} \lambda_t^{k_t} X_t^{k_t} . \tag{2.29}$$

Модель головного завдання подається в такий спосіб:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k_t=1}^{K_t} S_t^{k_t} \lambda_t^{k_t} \le \overline{B}; \tag{2.30}$$

$$\sum_{k_t=1}^{K_t} \lambda_t^{k_t} = 1 \ \ (t = 1, 2, ..., T); \tag{2.31}$$

$$\lambda_t^{k_t} \ge 0 \ \ (t = 1, 2, ..., T; \ k_t = 1, 2, ..., K_t); \tag{2.32}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{k_t=1}^{K_t} r_t^{k_t} \lambda_t^{k_t} \to \max . \tag{2.33}$$

Головне завдання (2.29) – (2.33) еквівалентне вихідному завданню (2.23) – (2.26). Дійсно, умови (2.30) так само, як умови (2.24) описують видаток загальних ресурсів на реалізацію планів випуску. В обмеженнях (2.31) одиниця у правих частинах персоніфікує виробничу потужність підприємства, а сума часток $\lambda_t^{k_t}$ ліворуч показує, у якій пропорції ця виробнича потужність поділяється між окремими базисними планами, «суміш» яких формує план даного підприємства. Ясно, що «суміш» припустимих базисних планів у межах виробничої потужності підприємства, тобто виконання умов (2.31), дасть також припустимий план (що задовольняє умови (2.23)). Далі з невід’ємності часток $\lambda_t^{k_t}$ (2.32) з формули (2.29) випливає й невід’ємность X_t, тобто виконання умов (2.25). І, нарешті, (2.33) так само, як і (2.26), означає максимізацію прибутку об'єднання як суми прибутку по окремих підприємствах.

Через еквівалентність завдань з розв'язків головного завдання, відшукавши значення $\lambda_t^{k_t}$, за формулами (2.29) переходимо до розв'язків вихідного завдання, визначаючи X_t. Якщо всі базисні плани $X_t^{k_t}$ відомі, то досить розв'язати головне завдання однократно. Практично їх кількість, як правило, занадто велика, щоб у явному виді записати головне завдання. Тому базисні плани послідовно відшукуються в рамках локальних завдань і потім включаються в головне завдання в ході ітеративного процесу.

Слід зазначити, що головне завдання суттєво менше за розмірністю, ніж вихідне, тому що для кожного підприємства маємо не цілий блок обмежень виду (2.23), що докладно описує всі його особливості, а лише одне обмеження виду (2.31), яке описує підприємство гранично агрегованим.

Повернемося до умовного прикладу. Головне завдання тут утворюють два обмеження по загальних ресурсах і по одному обмеженню для кожного з двох підприємств.

На першому кроці жоден з реальних базисних планів не відомий. Відповідно всі основні невідомі завдання дорівнюють нулю. Це означає, що підприємства не працюють, продукція не випускається, загальні ресурси не використовуються, прибуток дорівнює нулю. Починаємо ж розв'язок з першого опорного плану головного завдання, у який увійдуть чотири додаткові невідомі зі значеннями $d_1 = 18$; $d_2 = 30$; $d_3 = 1$; $d_4 = 1$. Ці додаткові невідомі являють собою відповідно недовикористання п'ятого й шостого загального ресурсу, а також питомі ваги «фіктивних» планів для підприємств, за якими вони взагалі простоюють.

На першому кроці всі двоїсті оцінки обмежень головного завдання дорівнюють нулю. Уведемо наступні позначення:

V – вектор оцінок загальних ресурсів, кожен з яких у цьому випадку показує, скільки прибутку приносить 1 одиниця відповідного загального ресурсу в плані об'єднання;

y_t – сукупна оцінка t-го підприємства, яка показує скільки прибутку приносить підприємство t.

Отже, поки v_1, v_2, y_1 і y_2 дорівнюють нулю. Ці оцінки доводять до відомості окремих підприємств, які на їхній основі й, враховуючи власні ресурси, шукають нові варіанти плану.

Оцінки V використовуються для побудови критерію оптимальності локальних завдань. Модель локального завдання підприємства t виглядає так:

$$A_t X_t \le B_t; \tag{2.34}$$

$$X_t \ge 0; \tag{2.35}$$

$$(P_t - V\overline{A}_t)X_t \to \max. \tag{2.36}$$

Критерієм оптимальності в локальнім завданні є максимум «чистого» прибутку підприємства t, тобто прибутку від його діяльності за винятком витрат на використані загальні ресурси, обчислені в оцінках головного завдання.

Розрахунки показників критеріїв оптимальності локальних завдань приводиться в табл. 2.5.

Таблиця 2.5

				Підприємство I		Підприємство II		
				12	6	5	2	P_t
$v_1^{IV}=3$	$v_1^{III}=\frac{8}{3}$	$v_1^{II}=\frac{8}{3}$	$v_1^{I}=0$	4	3	1	1	
$v_2^{IV}=0$	$v_2^{III}=0$	$v_2^{II}=0$	$v_2^{I}=0$	2	2	4	5	$\overline{A}_t$
			I крок	12	6	5	2	Показники функціоналів локальних завдань
		II крок		4/3	-2	7/3	-2/3	
	III крок			4/3	-2	7/3	-2/3	
IV крок				0	-3	2	1	

На першому кроці локальні завдання й оптимальні плани підприємств такі

I підприємство

$$2x_1+3x_2\le 12;$$
$$2x_1+x_2\le 8;$$
$$x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;$$
$$L_1=(12x_1+6x_2)\to \max;$$
$$x_1=3\,шт.;\ x_2=2\,шт.;$$
$$L_1=48\,р.;$$

II підприємство

$$x_3+2x_4\le 8;$$
$$2x_3+2x_4\le 10;$$
$$x_3\ge 0;\ x_4\ge 0;$$
$$L_2=(5x_3+2x_4)\to \max;$$
$$x_3=5\,шт.;\ x_4=0\,шт.;$$
$$L_2=25\,р.;$$

Після знаходження нових базисних планів кожного з підприємств відбувається перевірка на оптимальність розв'язку головного завдання , у випадку його неоптимальності, знаходження вектора плану підприємства, що вводиться в головне завдання (завдання об'єднання).

Оцінки прибутковості блоків (підприємств) y_t, отримані з головного завдання, показують, яку максимальну кількість прибутку очікує об'єднання від відповідного підприємства. Величина $(P_t-V\overline{A}_t)X_t$ показує, скільки прибутку дане підприємство може максимально дати. Порівнюючи за формулою

$$\Delta_t(P_t-V\overline{A}_t)X_t-y_t \qquad (2.37)$$

сукупні оцінки y_t підприємств і фактичний «чистий» прибуток, перевіряємо план об'єднання на оптимальність і шукаємо вектор плану підприємства, який найбільшою мірою здатен поліпшити план об'єднання. Якщо для всіх підприємств Δ_t від'ємності нульові, то ітеративний процес припиняється, оптимальний план уже знайдений. Позитивні Δ_t свідчать про те, що знайдений план підприємства краще вже відомих і, отже, його потрібно вводити в головне завдання (завдання об'єднання):

$$\Delta_1 = 48 - 0 > 0; \quad \Delta_2 = 25 - 0 > 0.$$

Отже, план об'єднання на першому кроці не оптимальний, причому перше підприємство може поліпшити його більшою мірою $(\Delta_1 > \Delta_2)$.

Отже, у головне завдання вводимо базисний план першого підприємства $X_1^1 = (3,2)$, але не сам план випуску продукції в явному вигляді, а відповідні йому витрати загальних ресурсів $S_t^{k_t}$ і величину прибутку $r_t^{k_t}$. Їхні розрахунки проводиться в табл. 2.6.

Отже, випуск продукції на першому підприємстві в кількості $x_1 = 3\,шт.$ й $x_2 = 2\,шт.$ вимагає відповідно 18 т і 10 т п'ятого й шостого загальних ресурсів і приносить 48 грн. прибутку.

Таблиця 2.6

	Підприємство 1		Підприємство 2				
$X_t^{k_t}$	4	0	0	0			III крок
	0	0	5	0		II крок	
	3	2	0	0	I крок		
$\overline{A}_t$	4	3	1	1	18	5	16
	2	2	4	5	10	20	8
P_t	12	6	5	2	48	25	48

Головне завдання на другому кроці буде виглядати так:

$$18\lambda_1^1 + d_1 = 18;$$

$$10\lambda_1^1 + d_2 = 30;$$

$$\lambda_1^1 + d_3 = 1;$$

$$d_4 = 1;$$

$$\lambda_1^1 \geq 0;\ d_1 \geq 0;\ d_2 \geq 0;$$

$$d_3 \geq 0;\ d_4 \geq 0;$$

$$48\lambda_1^1 \to \max.$$

Невідоме λ_1^1 показує, з якою часткою перший базисний план першого підприємства входить у план об'єднання. Тому що четверте обмеження відноситься до підприємства II, то невідоме λ_1^1 в ньому не бере участь. Оптимальний план головного завдання на другому кроці дає 48 грн. прибутку. Значення невідомих такі: $\lambda_1^1 = 1$; $d_1 = 0$; $d_2 = 20$; $d_3 = 0$; $d_4 = 1$.

Це означає, що запропонований першим підприємством план виробництва прийнятий об'єднанням і цілком увійшов у план об'єднання. Таким чином, у план об'єднання на другому кроці включене виробництва першого продукту в кількості трьох штук, виробництва другого продукту в кількості двох штук, третій і четвертий продукт не виробляються. Загальний прибуток по об'єднанню становить 48 грн. П'ятий загальний ресурс використаний повністю, шостий – недовикористаний на 20 т. Друге підприємство продовжує цілком працювати за «фіктивним» планом d_4, тобто, як і раніше, нічого не випускає.

Двоїсті оцінки другого кроку рівні $v_1 = 8/3\, p./m$; $v_2 = 0\, p./m$; $y_1 = 0\, p.$; $y_2 = 0\, p.$ Далі процедура розв'язку повторюється. Перераховуються функціонали локальних завдань (див. табл. 2.5). Локальні завдання другого кроку і їх оптимальні плани такі:

I підприємство

$$2x_1 + 3x_2 \le 12;$$
$$2x_1 + x_2 \le 8;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$$
$$L_1 = (4/3x_1 - 2x_2) \to \max;$$
$$x_1 = 4\,шт.;\ x_2 = 0\,шт.;$$
$$L_1 = 16/3 грн..$$

II підприємство

$$x_3 + 2x_4 \le 8;$$
$$2x_3 + 2x_4 \le 10;$$
$$x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;$$
$$L_2 = (7/3x_3 - 2/3x_4) \to \max;$$
$$x_3 = 5\,шт.;\ x_4 = 0\,шт.;$$
$$L_2 = 35/3 грн..$$

На другому кроці п'ятий загальний ресурс уже дефіцитний, у галузевому плані він витрачений увесь. Його оцінка рівна 8/3 грн./т, тобто він уже не «безкоштовний». Тому «чиста» прибутковість продукції в локальних завданнях на другому кроці зменшилася. Причому по другому й четвертому продуктах настільки, що вони стали збитковими (і, природно, не ввійшли в оптимальні плани підприємств).

Проводимо оцінку отриманих планів підприємств за формулою (2.37):

$$\Delta_1 = 16/3 - 0 > 0;\quad \Delta_2 = 35/3 - 0 > 0.$$

Як і раніше, обидва підприємства можуть поліпшити план об'єднання, але на другому кроці найбільшу ефективність має базисний план другого підприємства $X_2^2 = (5,0)$. Його й вводимо в план об'єднання. Розраховуємо відповідні до цього випуску вимоги на загальні ресурси S_2^2 (5 т і 20 т відповідно) і величину прибутки r_2^2 (25 грн.).

Головне завдання на третьому кроці виглядає так:

$$18\lambda_1^1 + 5\lambda_2^2 + d_1 = 18;$$

$$10\lambda_1^1 + 20\lambda_2^2 + d_2 = 30;$$

$$\lambda_1^1 + d_3 = 1;$$

$$\lambda_2^2 + d_4 = 1;$$

$$\lambda_1^1 \geq 0;\ \lambda_2^2 \geq 0;\ d_1 \geq 0;$$

$$d_2 \geq 0;\ d_3 \geq 0;\ d_4 \geq 0;$$

$$48\lambda_1^1 + 25\lambda_2^2 \to \max.$$

Розв'язавши його, одержуємо план об'єднання на третьому кроці:

$$\lambda_1^1 = 13/18;\ \lambda_2^2 = 1;\ d_1 = 0;\ d_2 = 25/9;\ d_3 = 5/18;\ d_4 = 0.$$

План, запропонований першим підприємством на першому кроці, використовується тепер об'єднанням тільки на 13/18 частин. Відповідно 5/18 частин виробничої потужності першого підприємства, що залишилися, не використовуються, тобто працюють за фіктивним планом d_3. План же другого підприємства використовується об'єднанням повністю. Це відбувається через дефіцитність п'ятого ресурсу, використаного повністю $(d_1 = 0)$. Його не вистачає для одночасного задоволення потреб двох підприємств у повному обсязі. Шостий загальний ресурс недовикористаний на 25/9 т. Прибуток галузі зріс до $59\frac{1}{3}$ грн. Двоїсті оцінки – $v_1 = 8/3\,грн./т$; $v_2 = 0\,грн./т$; $y_1 = 0\,р.$; $y_2 = 35/3\,грн.$

Оскільки оцінки ресурсів не змінилися, не змінилися й цільові функції локальних завдань. А тому що їхні обмеження по кроках не змінюються, то, отже, локальні завдання третього кроку такі ж, як і на другому кроці. Звідси не змінилися і їх оптимальні плани. Отже,

$$x_1 = 4\,шт.;\ x_2 = 0\,шт.;\qquad x_3 = 5\,шт.;\ x_4 = 0\,шт.;$$

$L_1 = 16/3\, p.$ $\qquad\qquad$ $L_2 = 35/3\, p.$

Перевірка на оптимальність:

$$\Delta_1 = 16/3 - 0 > 0; \quad \Delta_2 = 35/3 - 35/3 = 0.$$

План об'єднання не оптимальний. Уводимо в головне завдання базисний план першого підприємства. Цікаво, що $\Delta_2 = 0$, тобто базисний план другого підприємства на третьому кроці «обіцяє» 35/3 грн. прибутки. Але оцінка y_2 говорить про те, що об'єднання вже одержує від нього 35/3 грн. прибутку, використовуючи у своєму плані раніше отриманий базисний план другого підприємства.

Новий план першого підприємства $X_1^3 = (4, 0)$ на свою повну реалізацію вимагає 16 т п'ятого загального ресурсу й 8 т шостого, що дасть 48 грн. прибутку (див. табл. 2.6). Тоді головне завдання на четвертому кроці буде виглядати так:

$$18\lambda_1^1 + 16\lambda_1^3 + 5\lambda_2^2 + d_1 = 18;$$

$$10\lambda_1^1 + 8\lambda_1^3 + 20\lambda_2^2 + d_2 = 30;$$

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^3 + d_3 = 1;$$

$$\lambda_2^2 + d_4 = 1;$$

$$d_4 = 1;$$

$$\lambda_1^1 \ge 0;\ \lambda_1^3 \ge 0;\ \lambda_2^2 \ge 0;$$

$$d_1 \ge 0;\ d_2 \ge 0;\ d_3 \ge 0;\ d_4 \ge 0;$$

$$48\lambda_1^1 + 48\lambda_1^3 + 25\lambda_2^2 \to \max.$$

План головного завдання тепер – $\lambda_1^1 = 0$; $\lambda_1^3 = 13/16$; $\lambda_2^2 = 1$; $d_1 = 0$; $d_2 = 7/2$; $d_3 = 3/16$; $d_4 = 0$.

Отже, для першого підприємства перший базисний план витиснутий з плану об'єднання третім, але він, у свою чергу, використовується не повністю, тому що 3/16 частини виробничої потужності підприємства «не працюють» за фіктивним планом d_3. Друге підприємство в плані об'єднання працює цілком по своєму другому базисному плану. П'ятий загальний ресурс використаний повністю, шостий – недовикористаний на 7/2 т. Прибуток об'єднання зріс до 64 грн. Двоїсті оцінки такі: $v_1 = 3\, грн./\,т$; $v_2 = 0\, грн./\,т$; $y_1 = 0\, грн.$ і $y_2 = 10\, грн.$

Відзначимо, що дефіцитність першого загального ресурсу зросла.

На четвертому кроці маємо локальні завдання:

I підприємство	II підприємство
$2x_1 + 3x_2 \le 12$;	$x_3 + 2x_4 \le 8$;
$2x_1 + x_2 \le 8$;	$2x_3 + 2x_4 \le 10$;
$x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$;	$x_3 \ge 0$; $x_4 \ge 0$;
$L_1 = (-3x_2) \to \max$;	$L_2 = (2x_3 - x_4) \to \max$;
$x_1 = 4\,шт.$; $x_2 = 0\,шт.$;	$x_3 = 5\,шт.$; $x_4 = 0\,шт.$;
$L_1 = 0грн.$	$L_2 = 10грн.$

На четвертому кроці для підприємства I продукція другого виду збиткова, а першого – безприбуткова («плата» за ресурси для нього на даному кроці непосильна).

Перевірка на оптимальність по формулі (2.37) дає:

$\Delta_1 = 0 - 0 = 0$; $\Delta_2 = 10 - 10 = 0$.

Тому що жоден із запропонованих підприємствами базисних планів не здатний дати більше прибутку, ніж об'єднання вже має, тоді ітеративний процес припиняється. План головного завдання третього кроку оптимальний.

Тепер, маючи оптимальні значення $\lambda_t^{k_t}$, треба за формулою (2.29) перейти до оптимальних значень X_t. Помноживши третій базисний план підприємства I на 13/16, а другий базисний план підприємства II на 1, одержимо наступні значення планів-випусків продукції: $x_1 = 13/4\,шт.$; $x_2 = 0\,шт.$; $x_3 = 5\,шт.$; $x_4 = 0\,шт.$ Причому загальні ресурси розподіляються між підприємствами в такий спосіб: п'ятий ресурс – 13 т і 5 т відповідно; шостий ресурс – 6,5 т і 20 т.

Розглядаючи метод Данцига-Вулфа, бачимо, що план системи в цілому послідовно поліпшується шляхом взаємного уточнення планів окремих підприємств.

Усі підприємства визначають свої виробничі можливості по випуску продукції, необхідні для цього обсяги загальних ресурсів і відповідний до проекту плану прибуток. Ці пропозиції передаються в об'єднання. Складання й розв'язок головного завдання здійснюється на рівні об'єднання.

Практично для цього досить мати по два варіанти плану для кожного з підприємств (наприклад, звітні дані за два останні роки). У результаті розв'язку головного завдання утворюється план об'єднання як «суміш» проектів-планів підприємств, сукупні оцінки прибутковості підприємств і «ціни» (оцінки) загальних ресурсів. Ці результати оптимізації на рівні об'єднання доводять до відомості підприємств.

На наступній ітерації кожне підприємство, знаючи «ціни» на загальні ресурси й враховуючи локальні умови, прагне поліпшити свій план, тобто знайти такий його варіант, який дав би максимум прибутку в запропонованих цінах. Відзначимо, що такий план можна визначати (при неможливості оптимізаційних розрахунків) і традиційно. Визначивши поліпшені варіанти плану, підприємства повідомляють їх вищим інстанціям.

Відповідно до цього на новій ітерації об'єднання перераховує головне завдання, уводячи в нього новий варіант плану того підприємства, у якого прибуток перевершив передбачуваний раніше. У результаті розв'язку на рівні об'єднання утворюються скоректовані оцінки, відповідні до нового плану об'єднання. Потім знову необхідно перейти на рівень підприємств і т.ін. до одержання збалансованого у всіх ланках оптимального плану всього об'єднання.

Таким чином, об'єднання визначає й коректує план нижчестоящих об'єктів, чим й визначається координація розв'язків, автономно прийнятих підприємствами. Оптимальний план об'єднання формується як сукупність часткових оптимумів, спрямованих на виконання єдиної мети.

Очевидно, у цій схемі реалізується фундаментальне положення теорії оптимального планування: план, ціни й показники стимулювання господарської діяльності повинні бути взаємопов'язані й виходити з єдиного розв'язку виробничого завдання на оптимум. Таким чином, на стадії планування закладаються економічні умови для виконання оптимального плану, а також стимулюється виявлення нових виробничих можливостей.

Метод планування на двох рівнях Корнаї – Ліптака

У цьому методі ітеративний процес двоступінчастої оптимізації планів розвитку об'єднання й окремих підприємств заснований не на коректуванні двоїстих оцінок ресурсів і продукції, а на коректуванні виділених підприємствам лімітів ресурсів і завдань по випуску продукції в натуральному вираженні відповідно з аналізом й порівнянням граничних ефективностей (оцінок) їх використання на підприємствах.

Нехай вихідне завдання об'єднання як і раніше має вигляд (2.23) – (2.26). Проведемо посекторну (по підприємствах) розбивку векторів лімітів загальних ресурсів.

$$\overline{u_1}+...+\overline{u_t}+...+\overline{u}_T=\overline{B}, \qquad (2.38)$$

де $\overline{u_t}$ – вектор лімітів загальних ресурсів, виділюваних об'єднанням підприємству t.

Тоді завдання (2.23) – (2.26) набуде наступного вигляду:

$$
\begin{array}{l}
A_1 X_1 \qquad\qquad \le B_1; \\
\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad A_t X_t \qquad \le B_t; \qquad (2.39) \\
\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad A_T X_T \le B_T; \\
\overline{A}_1 X_1 \qquad\qquad \le \overline{u}_1; \\
\quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad \overline{A}_t X_t \qquad \le \overline{u}_t; \qquad (2.40) \\
\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad \overline{A}_T X_T \le \overline{u}_T;
\end{array}
$$

$$X_t \ge 0 \ (t = 1, 2, ..., T); \qquad (2.41)$$

$$P_1 X_1 + ... + P_t X_t + ... + P_T X_T \to \max. \qquad (2.42)$$

Тоді завдання об'єднання (2.39) – (2.42) автоматично розпадається на секторні завдання, які для кожного t-го підприємства виглядають так:

$$A_t X_t \le B_t; \qquad (2.43)$$

$$\overline{A}_t X_t \le \overline{u}_t; \qquad (2.44)$$

$$X_t \ge 0; \qquad (2.45)$$

$$P_t X_t \to \max. \qquad (2.46)$$

Розділимо обидва загальних ресурси нарівно між двома підприємствами:

9 + 9= 18; 15 + 15 = 30.

Одержуємо для першого кроку два секторні завдання, їх плани, значення прибутку й секторні оцінки загальних ресурсів $\overline{y}_i^t$.

I підприємство

$$2x_1 + 3x_2 \le 12;$$
$$2x_1 + x_2 \le 8;$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 9;$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 15;$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$$
$$L_1 = (12x_1 - 6x_2) \to \max;$$
$$x_1 = 9/4\,шт.;\ x_2 = 0\,шт.;$$
$$L_1 = 27\,р.;$$
$$\overline{y}_5^1 = 3;\ \overline{y}_6^1 = 0.$$

II підприємство

$$x_3 + 2x_4 \le 8;$$
$$2x_3 + 2x_4 \le 10;$$
$$x_3 + x_4 \le 9;$$
$$4x_3 + 5x_4 \le 15;$$
$$x_3 \ge 0;\ x_4 \ge 0;$$
$$L_2 = (5x_3 + 2x_4) \to \max;$$
$$x_3 = 15/4\,шт.;$$
$$x_4 = 0\,шт.;$$
$$L_2 = 75/4\,р.;$$
$$\overline{y}_5^2 = 0;\ \overline{y}_6^2 = 5/4.$$

Ці відомості передаються в об'єднання, де формується його план, як механічна сума планів секторів (підприємств), і перевіряється оптимальність цього плану.

Прибуток галузі рівний 45,75 грн. Це сума значень секторних критеріїв оптимальності, вона буде не більше, ніж дійсне значення функціонала вихідного завдання. При неоптимальному розподілі загальних ресурсів між секторами сума секторних функціоналів буде меншою від дійсного оптимуму. Наша мета – знайти такий розподіл ресурсів, при якому сума секторних функціоналів буде дорівнювати дійсному оптимуму. Для цього досить, щоб оцінки однойменного загального ресурсу в різних секторах були рівні між собою:

$$\overline{y}_i^1 = \overline{y}_i^2 = \ldots = \overline{y}_i^t = \ldots = \overline{y}_i^{T-1} = \overline{y}_i^T. \tag{2.47}$$

Дійсно, оцінка $\overline{y}_i^t$ показує збільшення критерію оптимальності (прибутку) t-го секторного завдання при збільшенні кількості i-го загального ресурсу, виділюваного даному сектору, на 1 од. (т). Отже, секторні оцінки загальних ресурсів характеризують ефективність їх розподілу між підприємствами.

Отримані значення оцінок свідчать про те, що розподіл ресурсів не оптимальний і його можна поліпшити. Дійсно, оцінки п'ятого загального ресурсу на I і II підприємствах рівні 3 і 0; його розподіл нарівно між секторами привело до нестачі (дефіцитності) даного ресурсу на підприємстві I і надлишку (недефіцитності) на підприємстві II. Для шостого загального ресурсу картина зворотна. Звідси випливає необхідність перерозподілу ресурсів, щоб тим самим поліпшити план.

При рівності оцінок ефект від використання ресурсів у всіх секторах однаковий і перерозподіляти їх не потрібно, тобто план оптимальний.

Для знаходження нового варіанта розподілу ресурсів на верхньому рівні (в об'єднанні) будується центральне завдання. У ньому проводиться пошук векторів $\overline{U}_t$, обмеженням є вектор $\overline{B}$. Мета – максимізувати ефект від перерозподілу ресурсів об'єднання, обчислений у секторних оцінках попереднього кроку. Модель центрального завдання виглядає так:

$$\sum_{t=1}^{T} \overline{U}_t \le \overline{B}; \tag{2.48}$$

$$\overline{U}_t \ge 0; \quad (t = 1, 2, ..., T) \tag{2.49}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \overline{Y}_t \overline{U}_t \to \max. \tag{2.50}$$

де $\overline{Y}_t$ – вектор оцінок ресурсів об'єднання в t-секторі.

На другому кроці центральне завдання таке:

$$\overline{u}_5^1 + \overline{u}_5^2 \le 18;$$

$$\overline{u}_6^1 + \overline{u}_6^2 \le 30;$$

$$\overline{u}_5^1 \ge 0;\ \overline{u}_5^2 \ge 0;\ \overline{u}_6^1 \ge 0;\ \overline{u}_6^2 \ge 0;$$

$$3 \cdot \overline{u}_5^1 + 0 \cdot \overline{u}_5^2 + 0 \cdot \overline{u}_6^1 + \frac{5}{4} \cdot \overline{u}_6^2 \to \max.$$

Очевидно, що в силу нерівності оцінок того самого загального ресурсу в різних секторах, у центральному завданні весь обсяг даного ресурсу розподілиться в той сектор, де оцінка найбільша. Так, на другому кроці весь п'ятий ресурс піде в перший сектор, а шостий – у другий сектор, тобто:

$$\overline{u}_5^1 = 18;\ \overline{u}_5^2 = 0;\ \overline{u}_6^1 = 0;\ \overline{u}_6^2 = 30.$$

Такий «радикальний» (все або нічого) розподіл ресурсів буде повторюватися на кожному кроці. Для забезпечення збіжності ітеративного процесу вниз, у сектори (на підприємства) повідомляється скоректований перерозподіл ресурсів, тобто вектори $\overline{U}_t^*$:

$$\overline{U}_t^*(\mu+1) = \frac{\mu}{\mu+1} \cdot \overline{U}_t^*(\mu) + \frac{1}{\mu+1} \cdot \overline{U}_t(\mu+1), \tag{2.51}$$

де μ – номер попередньої ітерації; $\overline{U}_t(\mu+1)$ – нескоректований розв'язок центрального завдання на даному кроці; $\overline{U}_t^*(\mu+1)$ і

$\overline{U}_t^*(\mu)$ – скоректовані розв'язки центрального завдання даного й попереднього кроків відповідно.

Це означає, що підприємству з максимальною оцінкою загального ресурсу, кількість цього ресурсу збільшується, а для всіх інших – зменшується, причому таким чином, щоб у сумі не вийти за межі ліміту ресурсів об'єднання $\overline{B}$.

Відповідно до (2.51) перерозподіл ресурсів на другому кроці буде наступним:

$$\overline{u}_5^1 = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 18 = 13{,}5; \ \overline{u}_5^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4{,}5;$$

$$\overline{u}_6^1 = \frac{1}{2} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 7{,}5; \ \overline{u}_6^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 22{,}5.$$

Нові ліміти на ресурси передаються на підприємства, де коректують праві частини відповідних обмежень секторних завдань, знаходять нові оптимальні плани й нові оцінки загальних ресурсів.

I підприємство

$$2x_1 + 3x_2 \le 12;$$
$$2x_1 + x_2 \le 8;$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 9;$$
$$2x_1 + 2x_2 \le 13{,}5;$$
$$x_1 \ge 0; \ x_2 \ge 0;$$
$$L_1 = (12x_1 + 6x_2) \to \max;$$
$$x_1 = 3{,}375\,шт.;$$
$$x_2 = 0\,шт.;$$
$$L_1 = 40{,}5\,р.;$$
$$\overline{y}_5^1 = 3; \ \overline{y}_6^1 = 0.$$

II підприємство

$$x_3 + 2x_4 \le 8;$$
$$2x_3 + 2x_4 \le 10;$$
$$x_3 + x_4 \le 4{,}5;$$
$$4x_3 + 5x_4 \le 22{,}5;$$
$$x_3 \ge 0; \ x_4 \ge 0;$$
$$L_2 = (5x_3 + 2x_4) \to \max;$$
$$x_3 = 4{,}5\,шт.; \ x_4 = 0\,шт.;$$
$$L_2 = 22{,}5\,р.;$$
$$\overline{y}_5^2 = 5; \ \overline{y}_6^2 = 0.$$

Перевірка на оптимальність:

$$\overline{y}_5^1 < \overline{y}_5^2; \ \overline{y}_6^1 < \overline{y}_6^2,$$

тобто шостий ресурс поки що перерозподілу не підлягає. Отже, у центральному завданні третього кроку залишається тільки одне обмеження по п'ятому ресурсу об'єднання.

$$\overline{u}_5^1 + \overline{u}_5^2 \le 18;$$
$$\overline{u}_5^1 \ge 0; \ \overline{u}_5^2 \ge 0; \ \overline{u}_6^1 \ge 0; \ \overline{u}_6^2 \ge 0;$$
$$3 \cdot \overline{u}_5^1 + 5 \cdot \overline{u}_5^2 \to \max.$$

Розв'язком її буде $\bar{u}_5^1 = 0$ й $\bar{u}_5^2 = 0$. Після коректування маємо:

$$\bar{u}_5^1 = \frac{2}{3} \cdot 13{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 9;$$

$$\bar{u}_5^2 = \frac{2}{3} \cdot 4{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 18 = 9.$$

Подальший розв'язок через нескладність обчислювальної процедури й для економії місця показано в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

№ кроку	**Підприємство I**							**Прибуток Об'єднан-ня**
	$\bar{u}_5^1$	$\bar{u}_6^1$	x_1	x_2	L_1	$\bar{y}_5^1$	$\bar{y}_6^1$	
1	9	15	2,25	0	27	3	0	45,75
2	13,5	7,5	3,375	0	40,5	3	0	63
3	9	7,5	2,25	0	27	3	0	52
4	11,25	7,5	$2\frac{3}{16}$	0	33,75	3	0	58,75
5	12,6	7,5	3,15	0	37,8	3	0	62,8
6	13,5	7,5	3,375	0	40,5	3	0	63
7	$11\frac{4}{7}$	7,5	$2\frac{25}{28}$	0	34,71	3	0	59,71
8	12,375	7,5	$3\frac{3}{32}$	0	37,125	3	0	62,125
9	13	7,5	3,25	0	39	3	0	64
	Підприємство II							
	$\bar{u}_5^1$	$\bar{u}_6^1$	x_3	x_4	L_2	$\bar{y}_5^2$	$\bar{y}_6^2$	
1	9	15	3,75	0	18,75	0	0	
2	4,5	22,5	4,5	0	22,5	5	0	
3	9	22,5	5	0	25	0	0	
4	6,75	22,5	5	0	25	0	0	
5	5,4	22,5	5	0	25	0	0	
6	4,5	22,5	4,5	0	22,5	5	0	
7	$6\frac{3}{7}$	22,5	5	0	25	0	0	
8	5,625	22,5	5	0	25	0	0	
9	5	22,5	5	0	25	3	0	

На дев'ятому кроці одержуємо оптимальний план об'єднання як сукупність планів підприємств, отриманих із секторних завдань: $x_1 = 3{,}25\,шт.;\ x_2 = 0\,шт.;\ x_3 = 5\,шт.;\ x_4 = 0\,шт.$

Прибуток об'єднання дорівнює 64 р. Неважко переконатися в збігові оптимальних планів розв'язків методом Данцига–Вулфа й Корнаї–Ліптака.

Схеми розв'язку завдань цими методами взаємозворотні. Перша з них побудована за принципом «централізоване визначення цін – децентралізоване визначення найкращих можливостей», друга – за принципом «централізоване лімітування можливостей – децентралізоване виявлення ефекту від їхнього використання». При цьому основу обох схем становить обмін інформацією по вертикалі між двома рівнями управління й розв'язок відповідних завдань на різних рівнях. Тому дані методи вимагають великого обсягу інформації, якою обмінюються різні господарські рівні (у цьому випадку – підприємства й об'єднання). Це породжує проблему агрегування інформації.

2.4. Планування за допомогою методів динамічного програмування

Динамічне програмування виникло у 1950 – 1953 рр. на базі робіт Р. Беллмана та його співпрацівників [15]. Спочатку розглядалася задача управління запасами, а потім число задач збільшилось. Метод динамічного програмування (ДП) полягає у тому, що процес управління переміщенням функції цілі в оптимум складається поступово, крок за кроком. При цьому використовується принцип оптимальності Р. Беллмана: «Якими б не були початковий стан e_1 та початкова стратегія X_1, наступні стратегії X_j повинні бути оптимальними по відношенню до поточного стану системи e_j». Тут X_1 *та* X_j - вектори змінних управління, які належить обирати на кожному кроці; e_1 та e_j - вектори параметрів, які описують стан системи. Використання принципу оптимальності гарантує отримання найкращого управління всім процесом. Покрокове вирішення, що визначає новий стан, у який система переходить із поточного стану, на кожному етапі не обов'язково повинно давати на даному етапі найвищий ефект, але має обиратися з урахуванням його впливу на майбутнє. Але майбутнього для останнього кроку не існує. Тому якщо відомий кінцевий стан системи, то розрахунок процесу динамічного програмування починається з кінця. Для процесів з визначеним початком ДП починається з початку. Якщо для процесу відомий як початок, так і кінець, то розрахунки процесу ДП можуть починатися як з початку, так і з кінця: результат буде однаковий.

Динамічне програмування має справу з марковськими системами [5], бо принцип оптимальності стверджує, що оптимальне управління системою на кожному кроці не залежить від попередніх подій і визначається лише самим станом.

Динамічне програмування – один із розділів математичного програмування, у якому процес розв'язання може бути розбитий на окремі етапи (кроки). Ця розбивка здійснюється за різними принципами. У деяких завданнях за часовими періодами, в інших – за об'єктами управління. Іноді розбивка проводиться штучно.

Такий підхід дозволяє звести одне велике за розмірністю завдання до багатьох завдань, що мають меншу розмірність. Це значно скорочує обсяг обчислень і прискорює процес прийняття управлінських рішень.

Моделі динамічного програмування застосовуються для розв'язку економічних завдань наступних типових областей:

- розробка правил управління запасами, що встановлюють момент поповнення запасів і розмір замовлення;

- розробка принципів календарного планування виробництва й вирівнювання зайнятості в умовах коливного попиту на продукцію;

- складання календарних планів поточного й капітального ремонту складного обладнання;

- вибір методів проведення рекламної кампанії, що знайомить покупця з продукцією фірми;

- систематизація методів пошуку ресурсів ціного виду.

Основні принципи динамічного програмування розглядаються на наступних прикладах.

Завдання визначення шляху найменшої вартості

Містер М. вирішив відправитися в подорож з пункту 1 у пункт 10 на диліжансі. У бюро подорожей йому показали карту з нанесеною на ній схемою маршрутів руху диліжансів (рис. 2.11).

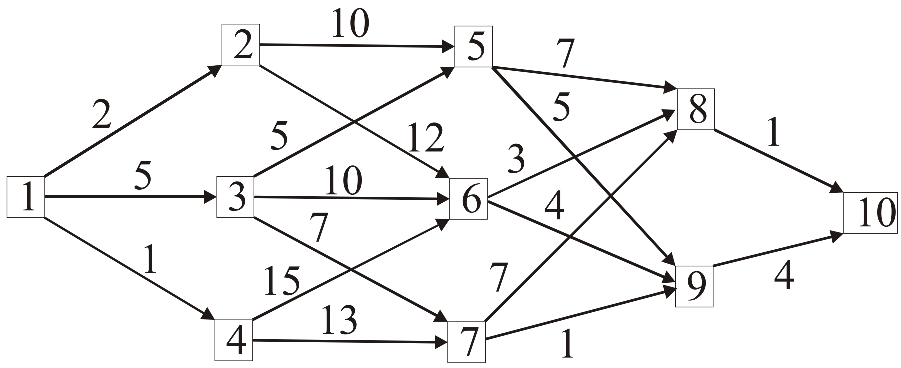


Рис. 2.11

Кожний квадрат на схемі зображує один із населених пунктів, які для зручності пронумеровані. Вартість переїзду з пункту i у пункт j

позначимо через c_{ij} (значення цих величин для розглянутого прикладу відзначені на схемі).

Потрібно визначити такий шлях з пункту 1 у пункт 10, загальна вартість якого є мінімальною.

Зауважимо, що формально дане завдання може бути представлене у вигляді математичної моделі завдання комбінаторного програмування, однак її особливості дозволяють побудувати наступний алгоритм розв'язку.

Насамперед відзначимо, що будь-який шлях руху з пункту 1 у пункт 10 включає чотири диліжансові маршрути (або чотири «кроки»).

Далі важливо сформувати наступний принцип для цього завдання.

Принцип оптимальності Беллмана

Яким би не був шлях досягнення деякого пункту, наступні розв'язки повинні належати оптимальній стратегії для частини шляху, що починається з цього пункту.

Так, наприклад, оптимальний шлях з пункту 6 не залежить від того, яким чином мандрівник у нього прибув.

Для використання принципу оптимальності введемо наступні позначення:

$f_n(i)$ – вартість, що відповідає стратегії мінімальних витрат для шляху від пункту i, якщо до кінцевого пункту залишається n кроків;

$P_n(i)$ – розв'язок, що дозволяє досягтися $f_n(i)$.

Тут індекс n не тільки дорівнює кількості кроків, що залишилися до кінцевого пункту, але й збігається з номером етапу в процесі розв'язку завдання. Таким чином, починаємо пошук оптимального маршруту від кінцевого пункту, поклавши $n = 1$.

$$f_1(8) = c_{8,10} = 1,\ P_1(8) = 10:$$

$$f_1(9) = c_{9,10} = 4,\ P_1(9) = 10:$$

$$n = 2$$

$$f_2(5) = \min\{c_{5,8} + f_1(8); \quad c_{5,9} + f_1(9)\} = 8,\ P_2(5) = 8;$$

$$f_2(6) = \min\{c_{6,8} + f_1(8); \quad c_{6,9} + f_1(9)\} = 4,\ P_2(6) = 8;$$

$$f_2(7) = \min\{c_{7,8} + f_1(8); \quad c_{7,9} + f_1(9)\} = 5,\ P_2(7) = 9.$$

Визначені оптимальні маршрути з пунктів 5, 6, 7 (див. рис. 2.11), від кожного з яких до кінцевого пункту два кроки. На наступному етапі використовуємо ці результати.

$$n = 3$$

$$f_3(2) = \min\{c_{25} + f_2(5); \quad c_{26} + f_2(6)\} = 16, \quad P_3(2) = 6;$$

$$f_3(2) = \min\{c_{35} + f_2(5); c_{36} + f_2(6); c_{37} + f_2(7)\} = 12,\ P_3(3) = 7;$$

$$f_3(4)=\min\{c_{46}+f_2(6);\quad c_{47}+f_2(7)\}=18,\qquad P_3(4)=7.$$

Тепер відомі оптимальні витрати й маршрути для пунктів 2, 3, 4. Залишилося розглянути останній етап:

$$n=4$$

$$f_4(1)=\min\{c_{12}+f_3(2);\ c_{13}+f_3(3);\ c_{14}+f_3(4)\}=17,\quad P_4(1)=3.$$

Таким чином, визначений оптимальний шлях: 1-3-7-9-10, витрати для якого становлять $f_n(1)=17$.

Узагальнюючи даний процес, одержуємо формулу:

$$f_n(i)=\min\{c_{ij}+f_{n-1}(j)\},\quad n=\overline{1,N},$$

де N – кількість етапів у розв'язку.

Означення. Дана формула називається рекурентним співвідношенням Беллмана. Алгоритм, заснований на застосуванні цієї формули, називається рекурентним алгоритмом. Подібні алгоритми є основним методом динамічного програмування.

Завдання управління запасами

Нехай підприємство повинно розробити календарну програму випуску деякого виду виробів на плановий період, який складається з відрізків. Передбачається, що для кожного з цих відрізків є точний прогноз попиту на продукцію, що випускається. Будемо вважати, що часом виготовлення партії виробів можна знехтувати. Продукція, виготовлена протягом відрізка *t*, може бути використана для повного або часткового покриття попиту протягом цього відрізка. Тому що витрати на виробництво залежать від розміру виготовленої партії, то в деяких випадках може бути вигідніше зробити продукцію в обсязі, що перевищує попит, і зберігати надлишки, використовуючи їх для задоволення наступного попиту. Разом з тим, зберігання також пов'язане з певними витратами.

Потрібно визначити таку програму, при якій загальна сума витрат на виробництво й на утримання запасів буде мінімальною за умови повного й своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Для побудови моделі введемо наступні змінні: x_t – обсяг випуску продукції протягом відрізка *t*, s_t – рівень запасів на кінець відрізка *t*; d_t – попит на продукцію для відрізка *t*. Будемо вважати, що d_t – цілі невід’ємні числа. Позначимо витрати на відрізку *t* у вигляді $c_t(x_t,s_t)$. Тоді цільова функція має вигляд:

$$\sum_{t=1}^{N}c_t(x_t,s_t)\to\min.$$

Припускаємо, що змінні x_t, s_t цілочисельні. Для забезпечення повного задоволення попиту вводимо обмеження:

$$s_t = s_{t-1} + x_t - d_t, \; t = \overline{1, N};$$

$$s_N = 0.$$

У такому вигляді завдання може бути вирішеним за допомогою алгоритму, який викладено вище. Введемо позначення:

$f_n(s)$ – мінімальні витрати на n відрізків планування, що залишилися, при початковому рівні запасів s;

$x_n(s)$ – обсяг випуску, що забезпечує $f_n(s)$.

Згідно з обмеженнями, рівень запасів на кінець планового періоду дорівнює нулю, тому $f_0(0) = 0$ й рекурентні співвідношення Беллмана набувають вигляду:

$$f_n(s) = \min\{c_n(x, s + x - d_n) + f_{n-1}(s + x - d_n)\}, \tag{2.52}$$

$$n = \overline{1, N},$$

де $s = 0,1,\ldots,d_1 + \ldots + d_N$;

$$d_n - s \le x \le d_1 + d_2 + \ldots + d_N - s.$$

Функцію витрат зазвичай можна виразити у вигляді:

$$c_t(x_t, s_t) = c_t(x_t) + h(s_t).$$

У цьому випадку моделі управління запасами поділяються на два класи.

До моделей з опуклими функціями витрат відносять завдання, для яких $c_t(x_t)$ є опуклою, $h_t(s_t)$ є опуклою.

Такі моделі називають моделями зі спадною граничною ефективністю при збільшенні масштабу.

Якщо $c_t(x_t)$ й $h_t(s_t)$ увігнуті, то моделі називають моделями з увігнутою функцією витрат або моделями зі зростаючої граничною ефективністю при збільшенні масштабу. Такі моделі відповідають випадкам, коли випуск продукції пов'язаний з необхідністю витрат на підготовчі операції або переналагодження.

Істотна відмінність між моделями з опуклою й увігнутою функцією витрат полягає в тому, що при збільшенні тривалості планового періоду оптимальне значення x_t може зменшуватися тільки при ввігнутій функції витрат.

Управління запасами при згладжуванні виробництва

В описаних вище моделях функція мети включала два фактори: виробничі витрати й витрати на утримання запасів. У результаті такої оптимізації можуть виникати істотні коливання обсягів випуску протягом планового періоду. При цьому необхідно враховувати ще один фактор – вартість зміни обсягів виробництва. Для цього функція мети повинна мати вигляд:

$$\sum_{t=1}^{N} c_t(x_t, s_t, x_{t-1}) \to \min .$$

Наприклад, вона може бути наступною:

$$c_t(x_t, s_t, x_{t-1}) = c_t(x_t, s_t) + \upsilon_t(x_t, x_{t-1}).$$

Тут функцію υ_t називають функцією витрат згладжування. Найпростіший приклад такої функції:

$$\upsilon_t(x_t, x_{t-1}) = \begin{cases} a_t(x_t - x_{t-1}) \; при \; x_t - x_{t-1} \geq 0, a_t \geq 0 \\ b_t(x_t - x_{t-1}) \; при \; x_t - x_{t-1} \leq 0, b_t \leq 0. \end{cases}$$

Можна вважати, що $a_t + b_t > 0$. Тоді для урахування нового фактора в співвідношення (2.52) вводимо наступні позначення:

$f_n(s, y)$ – мінімальні витрати для *n* відрізків, що залишилися, при початковому рівні запасів *s* і випуску на попередньому відрізку y;

$x_n(s, y)$ – випуск, що дозволяє досягти $f_n(s, y)$.

Рекурентні співвідношення Беллмана набудуть вигляду:

$$f_n(s, y) = \min\{c_n(x, s + x - d_n, y) + f_{n-1}(s - x - d_n, x)\}$$
$$n = \overline{1, N}.$$

Як приклад застосування методів динамічного програмування до планування роботи фірми розглянемо завдання оптимізації штату підприємства.

Звільнення і найм робітників

Виробництво майже ніколи не буває рівномірно завантаженим внаслідок або сезонності робіт (сільськогосподарські роботи; підприємство по переробці сільськогосподарської продукції), або нерівномірності замовлень продукції у часі і т. ін. Задача полягає у визначенні (при найменших витратах) фактичної кількості робітників по місцях і мінімізація підсумкових витрат, пов’язаних з наймом та звільненням робітників і збитками підприємства за *n* місяців. Функція цілі має вигляд:

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} \left\{a\left|x_j - x_{j-1}\right| + b\left|x_j - m_j\right|\right\} \to \min,$$

де $a\left|x_j - x_{j-1}\right|$ - додаткові витрати на *j*-му місяці по найму та звільненню робітників залежно від їх кількості; $a = 5$ - при наймі робітників, тобто якщо $x_j > x_{j-1}$; $a = 3$ - при звільненні робітників, тобто якщо $x_j < x_{j-1}$; $b\left|x_j - m_j\right|$ - додаткові витрати на *j*-му місяці для виробництва при відхиленні реальної кількості робітників x_j від ідеальної кількості робітників m_j у бік збільшення або зменшення; $b = 2$ – кількість робітників більша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j > m_j$; $b = 7$ – кількість робітників менша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j < m_j$; j = 0, 1, 2, ..., *n* – порядковий номер місяця. При $j = 0$ нам відома початкова кількість робітників $x_0 = 3$ (табл. 2.8).

Дані по кількості робітників наведені у табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Ідеальна та фактична кількість робітників

Найменування	**Кількість робітників по місяцях**			
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
m_j — ідеальна кількість робітників	-	1	3	2
Xj - фактична кількість робітників	$X_0 = 3$	X_I	X_2	X_3

Згідно з методом динамічного програмування при відомій початковій кількості робітників ($X_0 = 3$, $j = 0$), рішення починається з кінця. Якщо відома кінцева кількість робітників, то розв'язання починається з початку. При двох відомих значеннях кількості робітників задачу можна розв'язувати як у прямому, так і у зворотному напрямах, і результат розрахунків буде однаковим.

Кількість етапів розрахунків дорівнює кількості місяців $n = 3$. На кожному *j*-му етапі (*j*-му місяці):

1. Задаються діапазоном можливої кількості робітників на попередньому (*j* – 1)-му етапі $x_{j-1} = 0,1,2,3\ldots$. Максимальна величина x_{j-1} нам невідома, але початково вона приймається як найбільше значення ідеальної кількості робітників плюс 1, тобто $x_{j-1}^{\max} = m_j^{\max} + 1 = 4$ для всіх етапів (при необхідності $x_{j-1}^{\max}$ може бути збільшено).

2. Для кожного окремого значення $x_{j-1} = 0,1,\ ..,\ m_j^{\max} + 1 = cons$ попереднього етапу задаються зростаючою кількістю робітників даного *j*-го етапу $x_j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ і враховують підсумкові витрати:

$$F_j = f_j + F_{j+1}^* \to \min,$$

де f_j – витрати даного етапу внаслідок найму або звільнення робітників та відхилення їх кількості від оптимального значення m_j;

F^*_{j+1} – найменші підсумкові витрати наступного (j+1)-го етапу (для кінцевого етапу F^*_{j+1} = 0).

3. Визначають перший мінімум функції $F_j(x_{j-1}, x_j)$, бо ця функція є випуклою по відношенню до x_j, після чого збільшення x_j на даному етапі припиняємо.

Перейдемо до практичних розрахунків по етапах.

Етап Е3: $F_3 = a\,|\,x_3 - x_2\,| + b\,|\,x_3 - m_3\,| + F_4^*(x_3)$; $m_3 = 2$.

1. $x_2 = 0; x_3 = 0, F_3 = a|0-0| + 7|0-2| + 0 = 14$;
$x_3 = 1, F_3 = 5|1-0| + 7|1-2| + 0 = 12$;
$x_3 = 2, F_3 = 5|2-0| + b|2-2| + 0 = 10$;
$x_3 = 3, F_3 = 5|3-0| + 2|3-2| + 0 = 17$.

2. $x_2 = 1; x_3 = 0, F_3 = 3|0-1| + 7|0-2| + 0 = 17$;
$x_3 = 1, F_3 = a|1-1| + 7|1-2| + 0 = 7$;
$x_3 = 2, F_3 = 5|2-1| + b|2-2| + 0 = 5$;
$x_3 = 3, F_3 = 5|3-1| + 2|3-2| + 0 = 12$.

3. $x_2 = 2; x_3 = 0, F_3 = 3|0-2| + 7|0-2| + 0 = 20$;
$x_3 = 1, F_3 = 3|1-2| + 7|1-2| + 0 = 10$;
$x_3 = 2, F_3 = a|2-2| + b|2-2| + 0 = 0$;
$x_3 = 3, F_3 = 5|3-2| + 7|3-2| + 0 = 7$.

4. $x_2 = 3; x_3 = 0, F_3 = 3|0-3| + 7|0-2| + 0 = 23$;
$x_3 = 1, F_3 = 3|1-3| + 7|1-2| + 0 = 13$;
$x_3 = 2, F_3 = 3|2-3| + b|2-2| + 0 = 3$;
$x_3 = 3, F_3 = a|3-3| + 2|3-2| + 0 = 2$;
$x_3 = 4, F_3 = 5|4-3| + 2|4-2| + 0 = 9$.

5. $x_2 = 4; x_3 = 0, F_3 = 3|0-4| + 7|0-2| + 0 = 26$;
$x_3 = 1, F_3 = 3|1-4| + 7|1-2| + 0 = 16$;
$x_3 = 2, F_3 = 3|2-4| + b|2-2| + 0 = 6$;
$x_3 = 3, F_3 = 3|3-4| + 2|3-2| + 0 = 5$;
$x_3 = 4, F_3 = a|4-4| + 2|4-2| + 0 = 4$;
$x_3 = 5, F_3 = 5|5-4| + 2|5-2| + 0 = 11$.

Як результат розрахунків етапу *Е3* отримуємо табл. 2.9.

Таблиця 2.9

Підсумкові дані Е3

x_2	x_3	$F_3^*(x_2)$
0	2	10
1	2	5
2	2	0
3	3	2
4	4	4

Етап Е2: $F_2 = a|x_2 - x_1| + b|x_2 - m_2| + F_3^*(x_2); m_2 = 3.$

1. $x_1 = 0; x_2 = 0 F_2 = a|0-0| + 7|0-3| + 10 = 31;$
   $x_2 = 1; F_2 = 5|1-0| + 7|1-3| + 5 = 24;$
   $x_2 = 2; F_2 = 5|2-0| + 7|2-3| + 0 = 17;$
   $x_2 = 3; F_2 = 5|3-0| + b|3-3| + 2 = 17;$
   $x_2 = 4; F_2 = 5|4-0| + 2|4-3| + 4 = 26.$

2. $x_1 = 1; x_2 = 0; F_2 = 3|0-1| + 7|0-3| + 10 = 34;$
   $x_2 = 1; F_2 = a|1-1| + 7|1-3| + 5 = 19;$
   $x_2 = 2; F_2 = 5|2-1| + 7|2-3| + 0 = 12;$
   $x_2 = 3; F_2 = 5|3-1| + b|3-3| + 2 = 12;$
   $x_2 = 4; F_2 = 5|4-1| + 2|4-3| + 4 = 21.$

3. $x_1 = 2; x_2 = 0; F_2 = 3|0-2| + 7|0-3| + 10 = 37;$
   $x_2 = 1; F_2 = 3|1-2| + 7|1-3| + 5 = 22;$
   $x_2 = 2; F_2 = a|2-2| + 7|2-3| + 0 = 7;$
   $x_2 = 3; F_2 = 5|3-2| + b|3-3| + 2 = 7;$
   $x_2 = 4; F_2 = 5|4-2| + 2|4-3| + 4 = 16.$

1. $x_1 = 3; x_2 = 0; F_2 = 3|0-3| + 7|0-3| + 10 = 40;$
   $x_2 = 1; F_2 = 3|1-3| + 7|1-3| + 5 = 25;$
   $x_2 = 2; F_2 = 3|2-3| + 7|2-3| + 0 = 10;$

$x_2 = 3; F_2 = a|3-3| + b|3-3| + 2 = 2$;

$x_2 = 4; F_2 = 5|4-3| + 2|4-3| + 4 = 11$.

2. $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $F_2 = 3|0-4| + 7|0-3| + 10 = 43$;

$x_2 = 1; F_2 = 3|1-4| + 7|1-3| + 5 = 28$;

$x_2 = 2; F_2 = 3|2-4| + 7|2-3| + 0 = 13$;

$x_2 = 3; F_2 = 3|3-4| + b|3-3| + 2 = 5$;

$x_2 = 4; F_2 = a|4-4| + 2|4-3| + 4 = 6$.

Як результат розрахунків етапу *E2* отримуємо табл. 2.10.

Таблиця 2.10

Підсумкові дані E2

x_1	x_2	$F_2^*(x_1)$
0	2; 3	17
1	2; 3	12
2	2; 3	7
3	3	2
4	3	5

Етап E1: $F_1 = a|x_1 - 3| + b|x_1 - 1| + F_2^*(x_1); m_1 = 1$.

1. $x_0 = 3; x_1 = 0; F_1 = 3|0-3| + 7|0-1| + 12 = 28$;

$x_1 = 1; F_1 = 3|1-3| + b|1-1| + 12 = 18$;

$x_1 = 2; F_1 = 3|2-3| + 2|2-1| + 7 = 12$;

$x_1 = 3; F_1 = a|3-3| + 2|3-1| + 2 = 6$;

$x_1 = 4; F_1 = 5|4-3| + 2|4-1| + 5 = 16$.

Як результат розрахунків етапу *E1* отримуємо табл. 2.11.

Таблиця 2.11

Підсумкові дані E1

x_0	x_1	$F^*_{1(x_0)}$
3	3	6

Тепер для отримання оптимального рішення переміщуємось у зворотному до розрахунків напряму – з початку у кінець:

1. Для першого етапу *E1* у табл. 2.11 ми отримали оптимальні (мінімальні) підсумкові витрати $F^*_{1(x_0)} = 6$ при фактичній кількості робітників $x_1 = 3$.

2. Для другого етапу *E2* у табл. 2.10 кількості робітників на першому етапі $x_1 = 3$ відповідає оптимальна кількість робітників другого етапу $x_2 = 3$, тобто кількість робітників не змінюється.

3. Для третього етапу *E3* у табл. 2.9 кількості робітників на другому етапі $x_2 = 3$ відповідає оптимальна кількість робітників $x_3 = 3$, тобто кількість робітників не змінюється.

Таким чином, кількість робітників на всіх трьох етапах не змінюється, а мінімальні витрати при цьому досягають $F^*_{1(x_0)} = 6$.

Перевіримо ці дані розрахунком:

$$F_3 = a|3-3| + 2|3-1| = \{\text{Витрати етапу } E1 \text{ при } m_1 = 1\}$$
$$+ a|3-3| + b|3-3| = \{\text{Витрати етапу } E2 \text{ при } m_2 = 3\}$$
$$+ a|3-3| + 2|3-2| = \{\text{Витрати етапу } E3 \text{ при } m_3 = 2\}$$
$$= 6. \ \{\text{Підсумкові витрати}\}$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення календарного плану.
2. Що таке мережеве планування і які завдання воно вирішує?
3. Що таке мережна модель?
4. Що називається мережевим графіком проекту?
5. Які основні елементи мережевого графіка?
6. Які порядок і правила побудови мережевих графіків?
7. Який шлях у мережевому графіку називається критичним?
8. Сформулюйте порядок і правила побудови мережевих графіків.
9. У чому полягає впорядкування мережевого графіка?
10. Що таке часові параметри мережевих графіків?
11. Які бувають і як визначаються резерви часу подій і робіт у мережевому графіку?
12. Що визначає коефіцієнт напруженості роботи?
13. У чому полягає принцип динамічного програмування?
14. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана?
15. Якими з перерахованих пунктів характеризується строковий вклад:

1) сумою внеску й відсотком по внескові;

2) моментом вкладення, строком погашення, прибутком і відсотком по внескові;

3) розміром внеску, моментом вкладення, строком погашення й відсотком по внескові;

4) розміром внеску, моментом вкладення, строком погашення, прибутком і відсотком по внескові.

16. Які з перерахованих пунктів є ціллю моделі мінімізації цільового фонду:

1) мінімізація цільового фонду, необхідного для нагромадження певної суми;

2) максимізація цільового фонду, необхідного для нагромадження певної суми;

3) мінімізація розміру строкового вкладу, необхідного для нагромадження певної суми;

4) максимізація розміру строкового вкладу, необхідного для нагромадження певної суми;

5) мінімізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу.

17. Які з перерахованих пунктів є метою моделі максимізації доходу:

1) максимізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу;

2) мінімізація цільового фонду, необхідного для одержання максимального доходу;

3) вибір строкового вкладу з максимальною прибутковістю;

4) мінімізація доходу при фіксованій величині цільового фонду;

5) максимізація доходу при фіксованій величині цільового фонду.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1. (Завдання С. Джонсона для двох верстатів)

Деталі обробляються на двох верстатах A і B. Кожна деталь повинна бути оброблена й на верстаті A (у першу чергу), і на верстаті B (у другу чергу). Тривалість обробки кожної деталі на кожному верстаті задана таблицею:

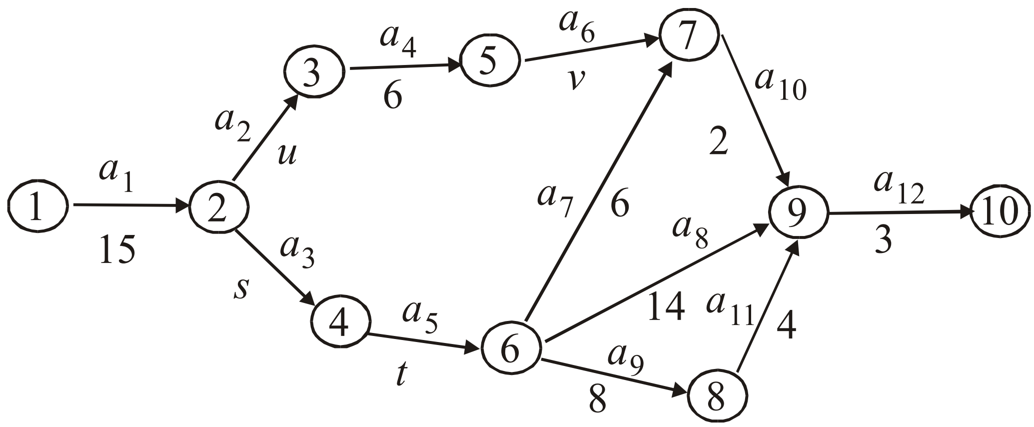
Номер деталі	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Верстат А	$3{,}2+u$	4,1	$2{,}1-v$	2,8	1,1
Верстат В	2,4	$1{,}5+v$	3,2	$5{,}3-u$	4,0

Тут $u = (-1)^N N/15, \quad v = (-1)^{N+1} N/10$.

Визначити оптимальну послідовність обробки й загальний час обробки деталей, який відповідає цій послідовності.

Задача 2

Для мережевого графіка:

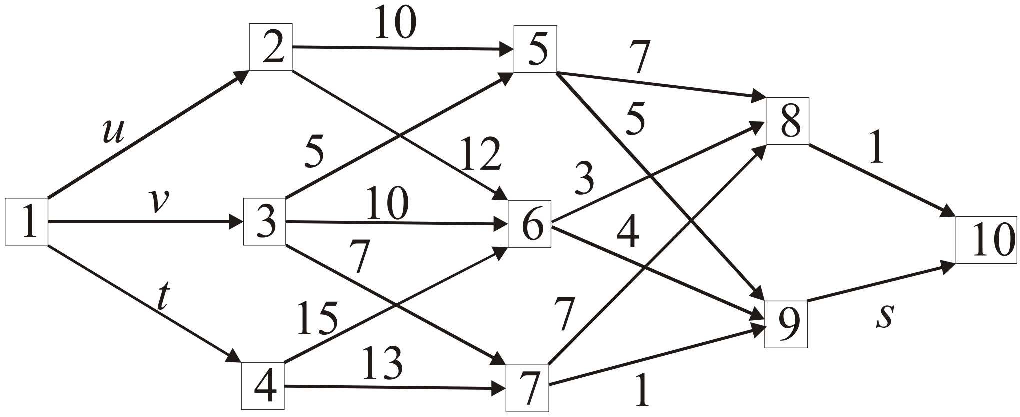


обчислити ранні й пізні строки початку й закінчення робіт, їх повні й вільні резерви часу. Знайти всі повні шляхи, обчислити їхню довжину й резерви часу. Побудувати мережевий графік у масштабі часу.

Тут $u = 15 + (-1)^N N/5$, $v = 6 + (-1)^N N/10$, $s = 5 + (-1)^N N/12$, $t = 4 + (-1)^N N/15$.

Задача 3

Для схеми маршрутів:



визначити такий шлях з пункту 1 у пункт 10, загальна вартість якого є мінімальною.

Тут $u = 2 + (-1)^N N/30, v = 6 + (-1)^N N/10, s = 5 + (-1)^N N/12$, $t = 2 + (-1)^{N+1} N/30$.

Задача 4

Дана впорядкована структурно-часова таблиця переліку робіт з організації виставки-продажу товарів, що випускаються об'єднанням.

Зміст робіт	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**G**	**H**	I	K	L	**M**	**P**	**Q**
Роботи a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Опорні роботи a_j	-	-	a_1	a_3	a_1	a_5	a_4	a_4	a_6, a_7	a_2, a_8	a_9, a_{10}	a_{10}	a_{12}
Коефі-цієнти якості $c_i = 1/b_i$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	0,1	0,1
Тривалість робіт t_i	9	t_2	2	3	5	t_6	6	5	5	t_{10}	2	1	1

A - замовлення на обладнання й товари;
B - розробка систем обліку й попиту;
C - відбір товарів і виписка рахунків;
D - завезення товарів;
E - завезення обладнання;
G - установка обладнання;
H - розкладка товарів;
I - облік наявності товарів;
K - оформлення залу й вітрини;
L - вивчення документів обліку;
M - репетиція виставки-продажу;
P - проведення виставки;
Q - аналіз результатів.

$t_2 = 10 + (-1)^N \cdot N/5$, $t_6 = 6 + (-1)^{N+1} \cdot N/8$, $t_{10} = 5 + (-1)^N \cdot N/10$.

Потрібно виконати наступне:

1. Побудувати мережовий графік.
2. Визначити часові параметри подій.
3. Визначити критичний шлях (відзначити на графіку подвійною лінією), критичні роботи й резерви часу.

4. Визначити коефіцієнти напруженості некритичних робіт.
5. Визначити часові параметри робіт.
6. Побудувати мережовий графік у масштабі часу.
7. Провести оптимізацію мережної моделі за критерієм мінімуму часу T при заданих ресурсах B.
8. Побудувати оптимальний план. Визначити економію.

Задача 5

Розв'язати задачу по найму та звільненню робітників на базі даних, які наведені у таблиці:

Ідеальна та фактична кількість робітників

Найменування	**Кількість робітників по місяцях j**			
	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
m_j - ідеальна кількість робітників	–	2	1	3
x_j - фактична кількість робітників	$X_0 = 4$	X_1	X_2	X_3

$a = 1{,}3N$ – при наймі робітників, тобто якщо $x_j > x_{j-1}$;

$a = N$ – при звільненні робітників, тобто якщо $x_j < x_{j-1}$;

$b = 0{,}5N$ – кількість робітників більша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j > m_j$;

$b = 1{,}6N$ – кількість робітників менша за ідеальну кількість, тобто якщо $x_j < m_j$;

$X_0 = 4$ – початкова кількість робітників.

У задачах 1 – 5 N – номер студента у списку групи.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ Й МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ТОВАРНИМИ ЗАПАСАМИ У МАРКЕТИНГУ

3.1. Постановка задачі управління запасами

Задачі управління запасами (ЗУЗ) складають один із найбільш поширених класів економічних задач. Правильне і своєчасне визначення оптимальної стратегії управління запасами, а також нормативного рівня запасів, дозволяє звільнити значні зворотні засоби, заморожені у вигляді запасів, що в кінцевому підсумку підвищує ефективність ресурсів, які використовуються.

Елементами задачі управління запасами є:

1) системи постачання;
2) попит на предмети постачання;
3) можливість наповнення запасів;
4) функції витрат;
5) обмеження;
6) прийнятна стратегія управління запасами.

Охарактеризуємо детальніше кожен із елементів. *Системи постачання* бувають: централізовані і децентралізовані. *Попит на предмети постачання* може бути: стаціонарний або нестаціонарний; детермінований або випадковий.

Розрізняють способи *наповнення запасів*: миттєва поставка; затримка поставок на фіксований інтервал часу; затримка поставок на випадковий інтервал часу.

Функції витрат складають у сукупності критерій ефективності прийнятої стратегії управління запасами і враховують витрати на збереження, вартість поставок, витрати, пов'язані із замовленням кожної нової партії, витрати на штрафи.

Наведемо можливі варіанти складових функції витрат.

Витрати на збереження бувають*:* пропорційними середньому рівню додатного запасу за період часу існування додатного запасу; пропорційними залишку на кінець періоду.

Вартість поставки буває*:* пропорційною обсягу поставок; сталою; пропорційною числу номенклатур; пропорційною необхідному приросту інтенсивності виробництва.

Штрафи бувають таких видів: пропорційні середній додатній недостачі за період; пропорційні додатній недостачі на кінець періоду; сталі; нелінійні функції від середньої недостачі та тривалості її існування.

Обмеження в ЗУЗ накладаються: на максимальний обсяг запасів; максимальну вагу; максимальну вартість; середню вартість; число поставок у заданому інтервалі часу; обсяг поставок; ймовірність недостачі.

Розглянемо для початку проблеми управління запасами, пов'язані або із замовленням на партію деталей зовнішньому постачальнику, або з випуском партії деталей. Політика організації виробництва або подачі замовлень у цій ситуації повинна бути такою, щоб загальні витрати були мінімальними.

Завдання С. Джонсона для двох верстатів

Припустимо, є два верстати A й B, кожна деталь повинна бути оброблена й на верстаті A (причому в першу чергу), і на верстаті B (у другу чергу). Вважаються відомими терміни обробки кожної деталі на кожному верстаті: t_{iA} – термін обробки *i*-ої деталі на верстаті A, t_{iB} – термін обробки деталі на верстаті B. Для різних деталей ці терміни, загалом кажучи, різні. Важливими обмеженнями (крім обмеження на послідовність обробки) є наступні умови: на кожному з верстатів можна одночасно обробляти тільки одну деталь; кожна деталь може оброблятися тільки на одному верстаті; процес обробки деталі не може перериватися. Треба визначити варіант плану запуску деталей, при якому загальний час їх обробки буде мінімальним.

Зауваження. Послідовність запуску деталей у виробництво на будь-якому верстаті може бути змінена так, що вона збігається з послідовністю на іншому верстаті, без збільшення часу виконання плану. Тому в оптимальному розв'язку порядок виконання робіт на верстаті A збігається з порядком виконання робіт на верстаті B. Оскільки на першому верстаті операції можна виконувати без усякої затримки, оптимізація полягає в мінімізації часу простою другого верстата.

Алгоритм розв'язку завдання:

1. Записуються терміни робіт:

Номер деталі	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Верстат А	3	4	2	3	1
Верстат В	2	1	3	5	4

2. Проглядаються всі терміни обробки, і знаходиться мінімальний серед них ($t_{2B} = 1$ і $t_{5A} = 1$).

3. Якщо мінімальний термін відноситься до першого верстата (тобто цей термін t_{iA}, у прикладі $t_{5A} = 1$), то деталь із відповідним номером ставиться на обробку першою (деталь № 5 буде першою оброблятися на A, а отже, і на B).

4. Якщо мінімальний термін відноситься до другого верстата (тобто цей термін t_{iB}), то деталь із відповідним номером ставиться на обробку останньою (деталь № 2 буде оброблятися останньою).

5. «Забувають» обрану деталь.

6. Повторюють усе сказане з деталями, що залишилися.

7. Якщо термін обробки двох різних деталей на одному верстаті збігається й цей термін менше терміну обробки на іншому верстаті, то порядок обробки цих деталей довільний.

Для наведеного прикладу оптимальна послідовність обробки виглядає так: $5-3-4-1-2$, загальний термін обробки – 16 одиниць часу. Для порівняння: обробка в послідовності $1-2-3-4-5$ потребує 21 одиницю часу.

Завдання розподілу замовлень

При багатономенклатурному виробництві, коли ті самі вироби можна обробляти на різних верстатах, може виникнути завдання розподілу замовлень по верстатах. У такому завданні потрібно мінімізувати загальні витрати на все виробництво. Якщо витрати на виріб пропорційні терміну обробки цього виробу, то можна використовувати ***індикаторний*** метод. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 1. Нехай треба виконати чотири замовлення:

замовлення $1-100$ виробів;
замовлення $2-200$ виробів;
замовлення $3-50$ виробів;
замовлення $4-75$ виробів.

Вироби будь-якого замовлення можна обробляти на кожному з чотирьох верстатів A, B, C, D, але термін виконання замовлень буде різним. Кожний з верстатів має свій обмежений ресурс часу для виконання замовлень. Розв'язок оформляється у вигляді в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

N	V	t_{iA}	T_{iA}	I_{iA}	t_{iB}	T_{iB}	I_{iB}	t_{iC}	T_{iC}	I_{iC}	t_{iD}	T_{iD}	I_{iD}
1	100	1	100	1,33	0,67	150	2.00	0,8	125	1,67	1,33	75	1,00
2	200	2	100	1,00	1	200	2,00	0,9	220	2,20	1.7	120	1,20
3	50	2	25	1,25	1,33	37,5	1,88	1	50	2,50	2,5	20	1,00
4	75	1	75	1,25	0,8	93,75	1,56	0,67	112,5	1,87	1,25	60	1,00
R_k			80			150			250			100	
P_k			75			0			220			95	

Позначення в ній мають наступний смисл:

N – номер замовлення;

V – обсяг замовлення;

t_{ik} – норматив обробки виробу i-го замовлення на k-ом верстаті (штук/година);

T_{ik} – загальні витрати часу на i-м замовлення при його виконанні на k-ом верстаті (час);

I_{ik} – індикатор для i-го замовлення й k-го верстата;

R_k – ресурс часу k-го верстата (час);

P_k – використаний час k-го верстата (час).

Параметри N, V і t_{ik} задаються умовою завдання, а інші розраховуються.

Значення індикатора I_{ik} розраховуються в такий спосіб. Верстату, що має найбільшу продуктивність обробки виробів даного замовлення (тобто, такому що має найбільший норматив), присвоюється значення індексу, рівне 1. Для замовлення 1 верстат D – найкращий, тому $I_{iD} = 1{,}00$.

Наступному по продуктивності верстату приписується оцінка, рівна відношенню загального числа годин роботи розглянутого верстата до загального числа годин роботи з виконання даного замовлення верстатом з максимальною продуктивністю. Для верстата A маємо $I_{iA} = 1{,}33$ і т.ін.

Замовлення треба розподіляти по верстатах відповідно до мінімальних значень індикатора за умови, що верстати мають достатній ресурс часу.

Деякі варіанти розподілу замовлень неприпустимі, якщо замовлення не можна дробити (тобто замовлення повинно бути виконане на одному верстаті). У розглянутому прикладі замовлення 1 й 2 не можуть виконуватися на верстаті A, замовлення 2 нездійсненне на верстатах B і D. Тому замовлення 2 доводиться виконувати на верстаті C, хоча це найменш вигідний варіант (індикатор цього варіанта максимальний). Замовлення 1 має значення індикатора, рівне 1, на верстаті D, проходить по обмеженню по ресурсу часу цього верстата, тому закріплюється за цим верстатом. Замовлення 3 також має індикатор, рівний 1, для верстата D, укладається в обмеження цього верстата (у залишки обмеження після закріплення замовлення 1 за верстатом D), тому замовлення 3 закріплюється за верстатом D. Замовлення 4 можна закріпити як за верстатом A, так і за верстатом B. Оскільки $I_{4A} < I_{4B}$, то замовлення 4 треба закріпити за верстатом A. Наприкінці треба визначити використаний час роботи верстатів.

На жаль, в індикаторному методі немає обліку витрат на обробку деталей на верстатах, хоча побічно ці витрати прийняті до уваги, оскільки індикатори визначають відносну ефективність роботи верстатів по виконанню кожного замовлення.

2.2. Мережеве планування

Призначення й області застосування мережевого планування й управління

Пошуки більш ефективних способів планування складних процесів привели до створення принципово нових методів

мережевого планування й управління (СПУ).

Система методів СПУ – це сукупність методів планування й управління розробкою великих народногосподарських комплексів, науковими дослідженнями, конструкторською й технологічною підготовкою виробництва, нових видів виробів, будівництвом і реконструкцією, капітальним ремонтом основних фондів шляхом застосування ***мережевих графіків***.

СПУ засноване на моделюванні процесу за допомогою мережевого графіка і являє собою сукупність розрахункових рядів, організаційних і контрольних заходів щодо планування й управління комплексом робіт.

Система СПУ дозволяє:

- формувати календарний план реалізації деякого комплексу робіт;
- виявляти й використовувати резерви часу, трудові, матеріальні й грошові ресурси;
- здійснювати управління комплексом робіт за принципом «провідної ланки» із прогнозуванням і попередженням можливих зривів у ході робіт;
- підвищувати ефективність управління в цілому при чіткому розподілі відповідальності між керівниками різних рівнів і виконавцями робіт.

Діапазон застосування СПУ досить широкий: від завдань, що стосуються діяльності окремих осіб, до проектів, у яких беруть участь сотні організацій і десятки тисяч людей (наприклад, розробка й створення великого територіально-промислового комплексу).

Під комплексом робіт (комплексом операцій, або проектом) ми будемо розуміти будь-яке завдання, для виконання якого необхідно здійснити досить велику кількість різноманітних робіт. Це може бути й будівництво деякого будинку, корабля, літака або будь-якого іншого складного об'єкта, і розробка проекту цієї споруди, і навіть процес побудови планів реалізації проекту.

Для того, щоб скласти план робіт зі здійснення великих і складних проектів, що складаються з тисяч окремих досліджень і операцій, необхідно описати його за допомогою деякої математичної моделі. Таким засобом опису проектів (комплексів) є мережна модель.

Мережна модель і її основні елементи

Мережна модель являє собою план виконання деякого комплексу взаємозалежних робіт (операцій), заданого в специфічній формі ***мережі***, графічне зображення якої називається ***мережевим графіком***. Відмінною рисою мережної моделі є чітке визначення всіх часових взаємозв'язків майбутніх робіт.

Головними елементами мережної моделі є події й роботи.

Термін «***робота***» використовується в СПУ в широкому змісті.

По-перше, це дійсна робота – протяжний у часі процес, що вимагає витрат ресурсів (наприклад, складання виробу, випробування приладу й т.ін.). Кожна дійсна робота повинна бути конкретною, чітко описаною й мати відповідального виконавця.

По-друге, це очікування – протяжний у часі процес, що не вимагає витрат праці (наприклад, процес сушіння після фарбування, старіння металу, твердіння бетону й т.ін.).

По-третє, це залежність, або фіктивна робота – логічний зв'язок між двома або декількома роботами (подіями), що не вимагають витрат праці, матеріальних ресурсів або часу. Вона вказує, що можливість однієї роботи безпосередньо залежить від результатів іншої. Природно, що тривалість фіктивної роботи приймається рівною нулю.

Подія – це момент завершення якого-небудь процесу, що відображає окремий етап виконання проекту. Подія може здійснитись тільки тоді, коли закінчаться всі роботи, що передують їй. Наступні роботи можуть початися тільки тоді, коли подія здійснилася. Передбачається, що подія не має тривалості й здійснюється ніби миттєво.

Серед подій мережної моделі виділяють вихідні й завершальні події. ***Вихідна подія*** не має попередніх робіт і подій, що відносяться до представленого в моделі комплексу робіт. ***Завершальна подія*** не має наступних робіт і подій.

Події на мережевому графіку (або, як ще говорять, на графові) зображуються кружками (вершинами графа), а роботи – стрілками (орієнтованими дугами), що показують зв'язок між роботами.

Порядок і правила побудови мережевих графіків

Мережеві графіки складаються на початковому етапі планування. Спочатку планований процес розбивається на окремі роботи, складається перелік робіт і подій, продумуються їхні логічні зв'язки й послідовність виконання, роботи закріплюються за відповідальними виконавцями. З їхньою допомогою оцінюється тривалість кожної роботи. Потім складається (зшивається) мережевий графік. Після впорядкування мережевого графіка розраховуються параметри подій і робіт, визначаються резерви часу й критичний шлях. Нарешті, виконується аналіз і оптимізація мережевого графіка, який при необхідності креслиться заново з перерахуванням параметрів подій і робіт.

При побудові мережевого графіка необхідно дотримуватись ряду правил:

1) усі стрілки мережевого графіка мають загальний напрям (ліворуч, праворуч);

2) між парою подій може бути зображена тільки одна робота;

3) використовуються можливі варіанти проходження подій і робіт (табличний запис і шляхи переходу наведені на рис. 2.1);

Робота a_j	Опорна робота a_i	Робота a_j	Опорна робота a_i	Робота a_j	Опорна робота a_i
a_1	–	a_1	–	a_1	–
a_2	a_1	a_2	a_1	a_2	–
		a_3	a_1	a_3	a_1, a_2

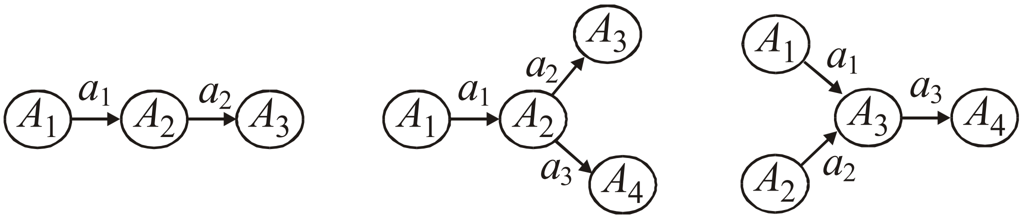


Рис. 2.1.

4) у мережній моделі не повинно бути «тупикових» подій, тобто подій, з яких не виходить жодна робота, за винятком завершальної події;

5) у мережевому графіку не повинно бути «хвостових» подій (крім вихідного), яким не передує хоча б одна робота;

6) усі події, крім вихідної й завершальної, повинні мати як вхідні срілки, так і стрілки, що з них виходять;

7) якщо дві роботи починаються в той самий час, в одній події й кінчаються в іншій події, то вводять фіктивну подію й фіктивну роботу. При цьому одна з паралельних робіт замикається на цій фіктивній події. Фіктивні роботи мають нульову тривалість і зображуються на графіку пунктирними лініями;

8) у мережі не повинно бути замкнених контурів і петель, тобто шляхів, що з'єднують деякі події з ними ж самими.

Упорядкування мережевого графіка. Поняття про шлях

Припустимо, що при складанні деякого проекту виділено 12 подій – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 і 24 роботи, що їх зв’язують – (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3,7), (3, 10), (4,8), (5,8), (5,7), (6, 10), (7,6), (7,8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9), (10, 11). Необхідно скласти й упорядкувати мережевий графік.

Як випливає з переліку робіт, вихідною подією мережевого графіка є подія 0 (їй не передують ніякі роботи), а завершальною – подія 11 (за нею не іде жодна робота). Помістимо подію 0 у ліву частину графіка, а подію 11 – у праву частину, розмістивши між ними проміжні події в певному порядку, що відповідає їхнім номерам (рис. 2.2). Події зв'яжемо роботами-стрілками відповідно до переліку робіт.

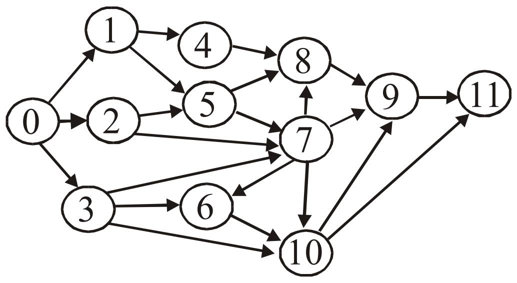


Рис. 2.2

Упорядкування мережевого графіка полягає в такому розташуванні подій і робіт, при якому для будь-якої роботи попередня їй подія розташована ліворуч і має менший номер у порівнянні з подією, що завершує цю роботу. Інакше кажучи, в упорядкованому мережевому графіку всі роботи-стрілки спрямовані від подій з меншими номерами до подій з більшими номерами (рис. 2.3).

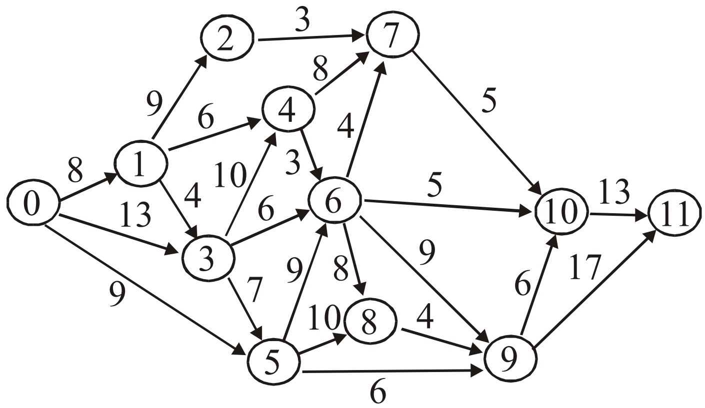


Рис. 2.3

Одне з найважливіших понять мережевого графіка – поняття шляху.

Шлях – будь-яка послідовність робіт, у якій кінцева подія кожної роботи збігається з початковою подією наступної за нею роботи. Серед різних шляхів мережевого графіка найбільший інтерес становить ***повний шлях*** L – будь-який шлях, початок якого збігається з вихідною подією мережі, а кінець – із завершальною.

Найбільш тривалий повний шлях у мережевому графіку називається ***критичним***. ***Критичними*** називаються також роботи й події, розташовані на цьому шляху.

Наприклад, для розглянутого нами мережевого графіка (рис. 2.3) повними шляхами будуть: шлях $0 \to 1 \to 2 \to 7 \to 10 \to 11$ тривалістю $8+9+3+5+13=38$ доби, шлях $0 \to 1 \to 3 \to 4 \to 6 \to 10 \to 11$ тривалістю $8+4+10+3+5+13=43$ доби, шлях $0 \to 5 \to 8 \to 9 \to 11$ тривалістю $9+10+4+17=40$ діб, шлях $0 \to 3 \to 5 \to 6 \to 9 \to 10 \to 11$ тривалістю $13+7+9+13+6+13=61$ доба і т.ін.

Можна переконатися в тому, що останній путь має найбільшу тривалість (не тільки серед наведених чотирьох повних шляхів, але й серед усіх повних шляхів, яких у цьому випадку налічується 64), тому він і є критичним. Тривалість критичного шляху становить 61 добу, тобто для проведення комплексу робіт знадобиться 61 доба. Швидше комплекс виконати не можна, тому що для досягнення завершальної події критичний шлях треба пройти обов'язково.

Дійсно, для досягнення події 11 треба виконати роботу (10, 11), тобто досягти події 10; для досягнення події 10 треба провести роботу (9,10), тобто досягти події 9; для досягнення події 9 треба провести роботу (6, 9), тобто досягти події 6, і т.ін.

Визначивши критичний шлях, ми тим самим встановили критичні події мережі 0, 3, 5, 6, 9, 10 і 11 і критичні роботи (0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11).

Критичний шлях має особливе значення в системі СПУ, тому що роботи цього шляху визначають загальний цикл завершення всього комплексу робіт, що заплановані за допомогою мережевого графіка. І для скорочення тривалості проекту необхідно, в першу чергу, скорочувати тривалість робіт, що лежать на критичному шляху.

Слід зазначити, що класичний вид мережевого графіка – це мережа, накреслена без масштабу часу. Тому мережевий графік, хоча й дає чітке уявлення про порядок проходження робіт, але недостатньо наочний для визначення тих робіт, які повинні виконуватися в кожний даний момент часу. У зв'язку з цим невеликий проект після впорядкування мережевого графіка рекомендується доповнити ***лінійною діаграмою*** проекту. Така лінійна діаграма для розглянутої мережі показана на рис. 2.4.

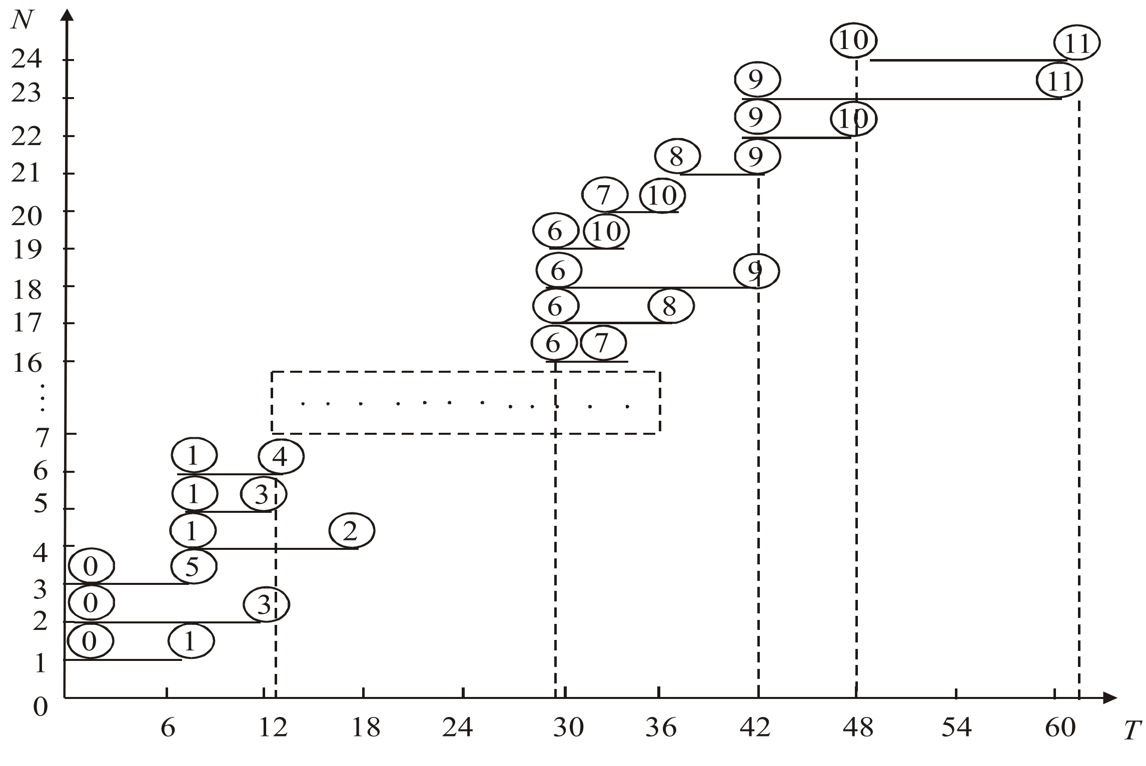


Рис. 2.4.

При побудові лінійної діаграми кожна робота зображується паралельним осі часу відрізком, довжина якого дорівнює тривалості цієї роботи. При наявності фіктивної роботи нульової тривалості (у розглянутій мережі її немає) вона зображується точкою. Події i й j, початок і кінець роботи (i, j) поміщають відповідно на початку й кінці відрізка. Відрізки розташовують один над іншим, знизу нагору в порядку зростання індексу i, а при тому самому i – у порядку зростання індексу j (на рис. 2.4 внаслідок обмеженості місця не показано роботи-відрізки, що виходять із 2-, 3-, 4- і 5-ої подій).

По лінійній діаграмі проекту можна визначити критичний час, критичний шлях, а також резерви часу всіх робіт.

Так, критичний час комплексу робіт дорівнює координаті на осі часу самого правого кінця всіх відрізків діаграми:

$$T_{кр} = t(11) = 61 \text{ (доба)}.$$

Для визначення критичного шляху розглядаємо роботи-відрізки, кінцеві події яких збігаються з завершальною подією мережі (у нашому прикладі (9, 11) і (10, 11)). Потім знаходимо відрізок (9, 10), правий кінець якого лежить на одній вертикалі (2.9) з лівим кінцем одного з розглянутих раніше відрізків (10, 11). Аналогічно визначаємо й інші роботи-відрізки критичного шляху: (6, 9), ..., (0, 3) (на рис. 2.4 усі вони виділені жирним шрифтом).

Часові параметри мережевих графіків

У табл. 2.2 наведено основні ***часові параметри*** мережевих графіків. Розглянемо розрахунки й зміст зазначених параметрів.

Почнемо з параметрів подій. Раніше відзначалося, що подія не може настати перш, ніж завершаться всі попередні роботи. Тому ранній строк $t_p(i)$ здійснення i-тієї події визначається тривалістю максимального шляху, що передує цій події: $t_p(i) = \max t(L_{ni})$, де L_{ni} – будь-який шлях, що передує i-тій події, тобто шлях від вихідної до i-ої події мережі.

Таблиця 2.2

Елемент мережі, що характеризується параметром	**Найменування параметра**	**Умовна позначка параметра**
1	**2**	**3**
Подія i	Ранній строк здійснення події Пізній строк здійснення події Резерв часу події	$t_p(i)$ $t_n(i)$ $R(i)$

Продовж. табл. 2.2.

1	2	3
Робота (i, j)	Тривалість роботи	$t(i, j)$
	Ранній строк початку роботи	$t_{рн}(i, j)$
	Ранній строк закінчення роботи	$t_{ро}(i, j)$
	Пізній строк початку роботи	$t_{пн}(i, j)$
	Пізній строк закінчення роботи	$t_{по}(i, j)$
	Повний резерв часу роботи	$R_п(i, j)$
	Вільний резерв часу роботи	$R_с(i, j)$
Шлях L	Тривалість шляху	$t(L)$
	Тривалість критичного шляху	$t_{кр}$
	Резерв часу шляхи	$R(L)$

Звідси випливає, що ранній строк здійснення події i – це самий ранній строк, до якого завершуються всі роботи, що передують цій події.

Якщо подія i має кілька попередніх робіт (рис. 2.5), то ранній строк здійснення події i знаходиться так.

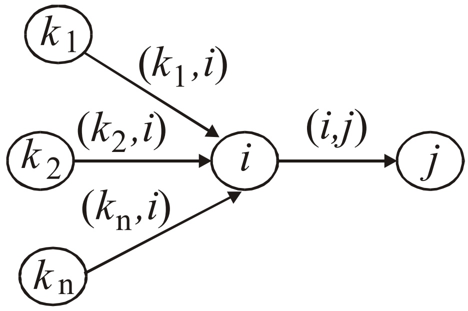


Рис. 2.5.

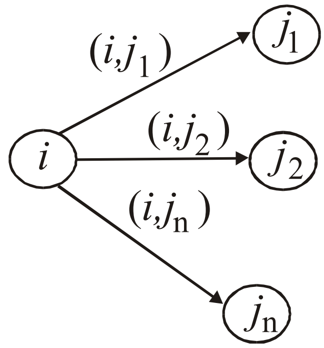


Рис. 2.6.

Нехай $B(i)$ – безліч робіт, що безпосередньо передують події i.

Тоді:

$$t_p(i) = \max\{t_p(k) + t(k,i)\},\ (k,i) \in B(i). \qquad (2.1)$$

Затримка здійснення події i стосовно свого раннього строку не відіб'ється на строку здійснення завершального події (а виходить, і на строку виконання комплексу робіт) доти, поки сума строку здійснення цієї події й довжини максимального з наступних за ним шляхів не перевищить довжини критичного шляху.

Тому пізній строк $t_n(i)$ здійснення i-го події дорівнює: $t_n(i) = t_{кр} - \max t(L_{ci})$, де L_{ci} – будь-який шлях, що іде за i-ою подією, тобто шлях від i-ої до завершальної події мережі.

Якщо подія i має кілька наступних робіт (рис. 2.6), то пізній строк здійснення події i зручно знаходити за формулою:

$$t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i,j)\},\ (i,j) \in C(i), \qquad (2.2)$$

де C_i - безліч робіт (i,j), що виходять із вершини i.

При будь-якому $i = \overline{1,n}$ пізній строк здійснення події i знаходиться так: спочатку при $i = n$ вважається $t_n(n) = t_p(n) = t_{кр}$, потім послідовно для i рівним $n-1$, $n-2$, …, 1 обчислюють за формулою (2.2).

Резерв часу i-ої події визначається як резерв між пізнім і раннім строком її здійснення:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \qquad (2.3)$$

Резерв часу i-ої події показує, на який припустимий строк можна затримати настання цієї події, не викликаючи при цьому збільшення часу виконання комплексу робіт.

Критичні події резервів часу не мають, тому що будь-яка затримка в здійсненні події, що лежить на критичному шляху, викличе таку ж затримку в здійсненні завершальної події.

З цього випливає, що для визначення критичного шляху (якщо він єдиний) зовсім не обов'язково перебирати всі повні шляхи мережевого графіка й визначати їхні довжини. Визначивши ранній строк настання завершальної події мережі, ми тим самим визначимо довжину критичного шляху, а виявивши події з нульовими резервами часу, визначимо його конфігурацію.

Якщо критичних шляхів декілька, то виявлення їх за допомогою критичних подій може бути важко, тому що через частину критичних подій можуть проходити як критичні, так і некритичні шляхи. У цьому випадку для визначення критичних шляхів слід використовувати критичні роботи.

Приклад 1. За рис. 2.7 розрахувати ранні й пізні строки здійснення подій, а також їх резерви. Знайти критичний шлях виконання комплексу робіт і його довжину.

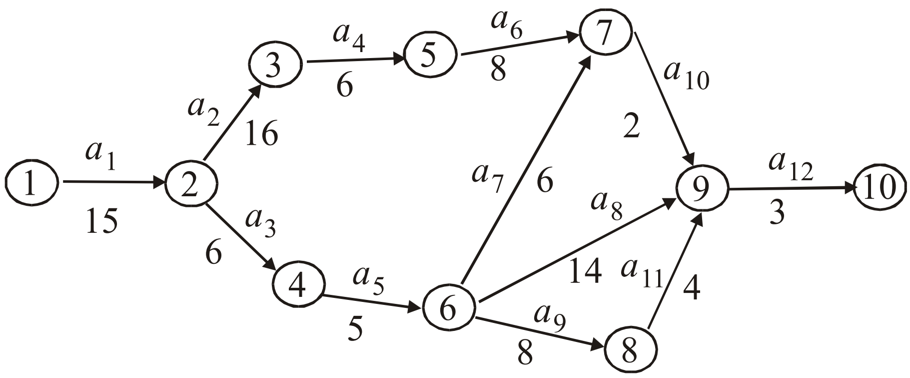


Рис. 2.7.

Розв'язок. Кожну вершину мережі розіб'ємо на чотири сектори. У верхній частині сектору відзначаємо номер події i, у лівій – ранній строк здійснення події i, у правій – пізній строк здійснення події i й у нижній – резерв часу цієї події (рис. 2.8).

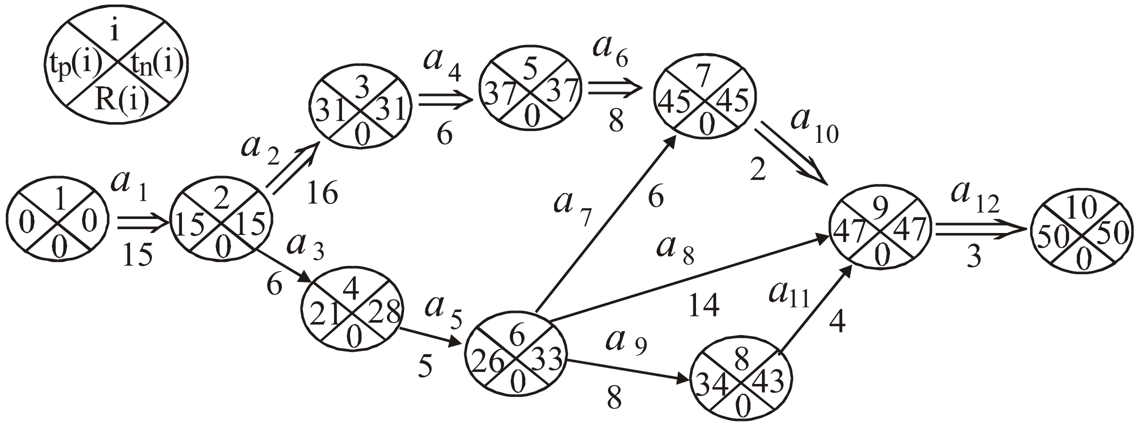


Рис. 2.8.

Спочатку за формулою (2.1) знаходимо ранні строки здійснення події i й заносимо їх у ліві сектори мережевого графіка. Маємо:

$$t_p(1) = 0;$$

$$t_p(2) = 0 + 15 = 15;$$

$$t_p(3) = 15 + 16 = 31;$$

$$t_p(4) = 15 + 6 = 21;$$

$$t_p(5) = 31 + 6 = 37;$$

$$t_p(6) = 21 + 5 = 26;$$

$$t_p(7) = \max\{37 + 8; 26 + 6\} = 45;$$

$$t_p(8) = 26 + 8 = 34;$$

$$t_p(9) = \max\{45 + 2; 26 + 14; 34 + 4\} = 47;$$

$$t_p(10) = 47 + 3 = 50.$$

Тепер розрахуємо пізні строки здійснення подій. Починаємо з останньої події й потім, «задкуючи», рухаємося до першої події.

Для i = 10 пізній строк здійснення події $t_n(10) = t_p(10) = 50$. Далі по формулі (2.2) маємо:

$t_n(9) = 50 - 3 = 47$;

$t_n(8) = 47 - 4 = 43$;

$t_n(7) = 47 - 2 = 45$;

$t_n(6) = \min\{45 - 6; 47 - 14; 43 - 8\} = 33$;

$t_n(5) = 45 - 8 = 37$;

$t_n(4) = 33 - 5 = 28$;

$t_n(3) = 37 - 6 = 31$;

$t_n(2) = \min\{31 - 16; 28 - 6\} = 15$;

$t_n(1) = 15 - 15 = 0$.

Результати розрахунків заносимо в праві сектори вершин мережі.

По формулі (2.1) розрахуємо резерви часу кожної події й занесемо їх у нижні сектори вершин.

Наприклад:

$R(1) = 0 - 0 = 0$;

$R(2) = 15 - 5 = 0$;

$R(3) = 31 - 31 = 0$;

$R(4) = 28 - 21 = 7$ і т.ін.

Щоб визначити критичний шлях, фіксуємо події, що не мають резервів часу. Це події 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10. Отже, шлях $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10$ є критичним.

Довжина критичного шляху $t_{кр} = t_p(10) = 50$.

Критичний шлях відзначаємо на мережевому графіку подвійною стрілкою.

Тепер перейдемо до параметрів робіт.

Окрема робота може початися в ранні, пізні або інші проміжні строки. Ранній строк $t_{рн}(i, j)$ початку роботи (i, j) – це найбільш ранній (мінімальний) з можливих моментів початку даної роботи. Він, мабуть, збігається з раннім строком настання її початкової події, тобто

$$t_{рн}(i, j) = t_p(i). \qquad (2.4)$$

Тоді ранній строк $t_{ро}(i, j)$ закінчення роботи (i, j) визначається за формулою

$$t_{ро}(I, j) = t_p(i) + t(i, j). \qquad (2.5)$$

Пізній строк $t_{по}(i, j)$ закінчень роботи (i, j) – найбільш пізній момент часу закінчення цієї роботи, після якого залишається стільки часу, скільки його необхідно для виконання всіх наступних робіт. І тому що жодна робота не може скінчитися пізніше припустимого пізнього строку своєї кінцевої події j, пізній строк закінчення робіт (i, j) визначається співвідношенням:

$$t_{по}(i, j) = t_п(j), \qquad (2.6)$$

а пізній строк $t_{пн}(i, j)$ початку цієї роботи – співвідношенням:

$$t_{пн}(i, j) = t_п(j) - t(i, j). \qquad (2.7)$$

З формул (2.4) – (2.7) видно, що моменти початку й закінчення роботи тісно пов'язані з сусідніми подіями.

Перш ніж розглядати резерви часу робіт, звернемося до резерву часу шляху. Такі резерви мають усі некритичні шляхи. Резерв часу шляху $R(L)$ визначається як різниця між довжиною критичного й розглянутого шляху

$$R(L) = t_{кр} - t(L).$$

Він показує, наскільки в сумі можуть бути збільшені тривалості всіх робіт, що належать цьому шляху. Якщо затягти виконання робіт, що лежать на цьому шляху, на час, більше, ніж $R(L)$, то критичний шлях переміститься на шлях L. Звідси можна зробити висновок: кожна з робіт шляху L на його ділянці, що не збігається із критичним шляхом, має резерв часу.

Серед резервів часу робіт виділимо повний і вільний резерви часу.

Повний резерв часу $R_п(i, j)$ роботи (i, j) – це максимально припустимий час, на який можна збільшити тривалість роботи (i, j) або відкласти початок її виконання так, що це не викличе затримки виконання всього комплексу робіт. Повний резерв часу роботи обчислюється за формулою:

$$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(j) - t(i, j) = t_{по}(i, j) - t_{ро}(i, j). \qquad (2.8)$$

Цим резервом можна скористуватись при виконанні даної роботи, якщо її початкова подія настане в самий ранній строк і можна допустити здійснення кінцевої події в його найпізніший строк.

Повний резерв часу роботи дорівнює резерву максимального зі шляхів, що проходять через дану роботу. При використанні повного резерву часу тільки для однієї роботи резерви часу інших робіт, що лежать на максимальному шляху, що проходить через неї, будуть повністю вичерпані. Цей шлях стає критичним. Резерви часу інших шляхів, що проходять через цю роботу, скоротяться на величину використаного резерву.

Якщо повний резерв часу деякої роботи дорівнює нулю, то затримка її виконання викличе таку ж за часом затримку виконання всього комплексу робіт.

Вільний резерв часу $R_c(i, j)$ роботи (i, j) – це максимальний запас часу, на який її можна відкласти (якщо вона була запланована в ранній строк) або збільшити її тривалість (якщо ця робота почалася в ранній строк), не змінивши при цьому раннього строку її кінцевої події.

Цим резервом можна скористатись при виконанні даної роботи в припущенні, що її початкова й кінцева події відбудуться у свої ранні строки.

Вільний резерв часу (i, j) знаходиться за формулою

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j). \qquad (2.9)$$

Вільний резерв часу роботи є частиною повного резерву. Справедливою є формула:

$$R_n(i,j) = R_c(i,j) + t_n(j) - t_p(j). \qquad (2.10)$$

Якщо на критичному шляху лежить подія j, то $R_n(i,j) = R_c(i,j)$.

Якщо використовувати вільний резерв часу роботи, то довжина будь-якого шляху, що проходить через цю роботу, скорочується на величину вільного резерву. На таких шляхах зберігаються вільні резерви всіх наступних робіт.

Вільним резервом часу користуються для запобігання випадковостей, які можуть виникнути в ході виконання робіт. Якщо планувати виконання робіт з ранніх строків їх початку й закінчення, то завжди буде можливість при необхідності перейти на пізні строки початку й закінчення робіт.

Роботи, що лежать на критичному шляху, так само як і критичні події, резервів часу не мають.

Приклад 2. Обчислити для мережевого графіка, зображеного на рис. 2.7, ранні й пізні строки початку й закінчення робіт, їх повні й вільні резерви часу. Знайти всі повні шляхи, обчислити їхню довжину й резерви часу. Побудувати мережевий графік у масштабі часу.

Розв'язок. Щоб знайти зазначені параметри робіт, використовуємо формули (2.1) – (2.9), а також результати розв'язку попереднього прикладу, оформлені у вигляді мережевого графіка (рис. 2.8).

Результати розрахунків зведемо в табл. 2.3.

Графа 3 заповнюється за допомогою мережевого графіка (рис. 2.8). Послідовно виписуються числа, що стоять у лівих секторах кружків. Графу 4 заповнюють, складаючи числа граф 2 і 3. Потім заповнюємо графу 6,

Таблиця 2.3

Робота	$t(i,j)$	Строки виконання				Резерви часу робіт	
		ранні		пізні			
		$t_{пн}(i,j)$	$t_{po}(i,j$	$t_{пн}(i,j$	$t_{po}(i,j)$	$R_n(i,j)$	$R_n(i,j)$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$a_1 = (1,2)$	15	0	15	0	15	0	0
$a_2 = (2,3)$	16	15	31	15	31	0	0
$a_3 = (2,4)$	6	15	21	22	28	7	0
$a_4 = (3,5)$	6	31	37	31	37	0	0
$a_5 = (4,6)$	5	21	26	28	33	7	0
$a_6 = (5,7)$	8	37	45	37	45	0	0
$a_7 = (6,7)$	6	26	32	39	45	13	13
$a_8 = (6,9)$	14	26	40	33	47	7	7
$a_9 = (6,8)$	8	26	34	35	43	9	0
$a_{10} = (7,9$	2	45	47	45	47	0	0
$a_{11} = (8,9)$	4	34	38	43	47	9	9
$a_{12} = (9,10)$	3	47	50	47	50	0	0

вибираючи послідовно числа з правих секторів кружків мережевого графіка. Графа 5 дорівнює різниці граф 6 і 2. Графа 7 дорівнює різниці граф 6 і 4. Графа 8 заповнюється на основі формули $R_n(i,j) = t_p(j) - t_{po}(i,j)$. Тут числа $t_p(j)$ беруться з лівих кружків графіка, а $t_{po}(i,j)$ – з графи 4. Для роботи $a_1 = (1,2)$. Вона кінчається в секторі кружка, що моделює подію 2, тому $t_p(2) = 15$. З графи 4 маємо $t_{po}(1,2) = 15$. Значить $R_c(1,2) = 15 - 15 = 0$. Для роботи $a_7 = (6,7)$ маємо $t_p(7) = 45$; $t_{po}(6,7) = 32$. Тому $R_c(6,7) = 45 - 32 = 13$ і т.ін. Виявимо тепер усілякі повні шляхи для виконання робіт комплексу, знайдемо їхню довжину, а також резерви часу.

$L_1 : 1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10$ – критичний шлях;

$L_2 : 1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7 \to 9 \to 10$;

$L_3 : 1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10$;

$L_4 : 1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 8 \to 9 \to 10$.

Довжина цих шляхів:

$$T_1 = t(L_1) = t_{кр} = 15 + 16 + 6 + 8 + 2 + 3 = 50 \text{ днів;}$$

$$T_2 = t(L_2) = 15 + 6 + 5 + 6 + 2 + 3 = 37 \text{ днів;}$$

$$T_3 = t(L_3) = 15 + 6 + 5 + 14 + 3 = 43 \text{ дня;}$$

$$T_4 = t(L_4) = 15 + 6 + 5 + 8 + 4 + 3 = 41 \text{ день.}$$

Таким чином, тривалість максимального шляху рівна 50 дням, за цей час усі роботи комплексу будуть виконані, тобто 50 днів – це мінімальний час для виконання всіх робіт комплексу.

Визначимо резерви часу по виявлених шляхах. Використовуючи формулу (2.6), одержимо:

$$R(L_1) = t_{кр} - T_1 = 0 \text{ днів;}$$

$$R(L_2) = t_{кр} - T_2 = 50 - 37 = 13 \text{ днів;}$$

$$R(L_3) = t_{кр} - T_3 = 50 - 43 = 7 \text{ днів;}$$

$$R(L_4) = t_{кр} - T_4 = 50 - 41 = 9 \text{ днів.}$$

У межах наявних резервів часу загальний строк виконання робіт не збільшується, якщо не збільшилася тривалість виконання кожної з робіт критичного шляху.

Для наочності виявлення резервів часу побудуємо мережевий графік робіт (рис. 2.7) у масштабі часу.

Побудова починається з критичного шляху L_1 відповідно до правил мережного моделювання з урахуванням зображення тривалості робіт t_1 у масштабі часу по осі абсцис. По осі ординат довжина стрілок вибирається з міркувань зручності сприйняття мережі в цілому. Цим пояснюється, наприклад, більша довжина стрілки роботи a_{10} порівняно з a_6, хоча за масштабом часу $t_6 > t_{10}$. У результаті одержимо мережевий графік, зображений на рис. 2.9.

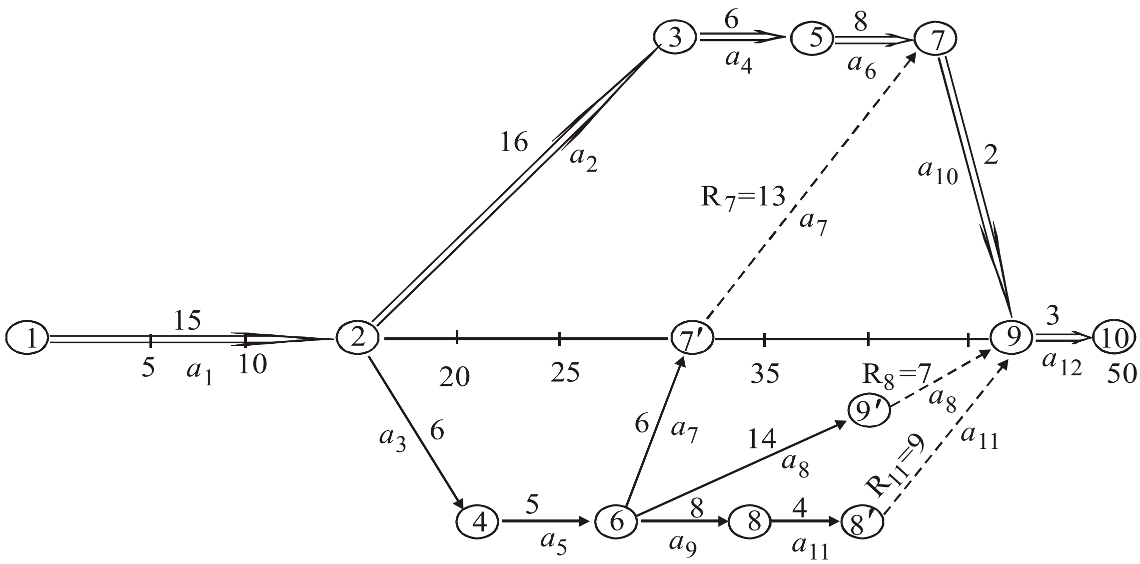


Рис. 2.9. *Мережевий графік робіт у масштабі часу*

При побудові мережевого графіка в масштабі часу ми зустрічаємося з необхідністю введення фіктивних робіт a'_7, a'_8, a'_{11} (пунктирні стрілки) і фіктивних подій $6'$, $8'$, $9'$. Час виконання цих фіктивних робіт дорівнює нулю, а їх структура показує розташування вільних резервів часу:

$R_7 = R_c(6,7) = 13$ днів;

$R_8 = R_c(6,9) = 7$ днів;

$R_{11} = R_c(8,9) = 9$ днів.

Коефіцієнт напруженості робіт

Після побудови мережевого графіка проводиться його всебічний аналіз, для того, щоб надалі вжити заходів по його оптимізації.

Аналіз мережевого графіка починається з аналізу структури мережі, що включає контроль побудови мережевого графіка, установлення доцільності вибору робіт, ступені їх розчленовування.

Потім проводиться класифікація й угруповання робіт з виявлення резервів, для того, щоб визначити ступінь труднощів виконання в строк кожної групи робіт.

Величина повного резерву часу не завжди може досить точно характеризувати, наскільки напруженим є виконання тієї або іншої роботи некритичного шляху. Усе залежить від того, на яку послідовність робіт поширюється обчислений резерв, яка тривалість цієї послідовності.

Визначити ступінь труднощів виконання в строк кожної групи робіт некритичного шляху можна за допомогою коефіцієнта напруженості робіт.

Коефіцієнтом напруженості $K_н$ роботи (i, j) називається відношення тривалості незбіжних (розташованих між тими самими подіями) відрізків шляху, одним із яких є шлях максимальної тривалості, що проходить через дану роботу, а іншим – критичний шлях:

$$K_н(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}}, \tag{2.11}$$

де $t(L_{\max})$ – тривалість максимального шляху, що проходить через роботу (i, j);

$t'_{кр}$ – тривалість відрізка розглянутого шляху, що збігається із критичним шляхом;

$t_{кр}$ – тривалість (довжина) критичного шляху.

Приклад 3. Знайти коефіцієнт напруженості роботи $a_5 = (4,6)$, зображеної на рис. 2.8.

Розв'язок. Максимальний шлях, що проходить через роботу $a_5 = (4,6)$ – це шлях:

$L_4: 1 \to 2 \to 4 \to 6 \to 9 \to 10;$

$t(L_{\max}) = t(L_4) = 43$ дня.

Незбіжні відрізки цього шляху й критичного шляху укладено між подіями 2 і 9. Для шляху L_4 – це відрізок $2 \to 4 \to 6 \to 9$; а для критичного шляху – відрізок $2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9$.

Відрізок шляху L_4, що збігається з критичним шляхом – це $1 \to 2$ й $9 \to 10$, довжина $t'_{кр}$ якого рівна $t'_{кр} = 15 + 3 = 18$; довжина критичного шляху $t_{кр} = 50$. Підставимо знайдені величини у формулу (2.11):

$$K_i(i, j) = \frac{43 - 18}{50 - 18} = \frac{25}{32} = 0,78.$$

Формулу (2.11) можна привести до вигляду:

$$K_н(i, j) = 1 - \frac{R_п(i, j)}{t_{кр} - t'_{кр}}. \qquad (2.12)$$

Коефіцієнт напруженості $K_н(i, j)$ може змінюватися в межах від 0 (для робіт, у яких відрізки максимального зі шляхів, що не збігаються з критичним шляхом, складаються з фіктивних робіт нульової тривалості) до 1 (для робіт критичного шляху).

Чим ближче до 1 коефіцієнт напруженості, тим складніше виконати дану роботу у встановлений термін, а чим ближче він до нуля, тим більший відносний резерв має максимальний шлях, що проходить через дану роботу.

Роботи можуть мати однакові повні резерви, але різний ступінь напруженості. І навпаки, різним повним резервам можуть відповідати однакові коефіцієнти напруженості.

З формули (2.12) видно, що величина коефіцієнта напруженості залежить від $R_п$ і $t'_{кр}$. Чим більшим є повний резерв часу $R_п$ від виконання деякої роботи й $t'_{кр}$, (тобто чим менше $t_{кр} - t'_{кр}$ – відрізок часу максимального шляху, що проходить через цю роботу й не збігається з критичним шляхом), тим більше буде дріб, що стоїть у правій частині формули (2.12), і чим меншим є коефіцієнт напруженості цієї роботи, тем легше буде її виконати. У загальному випадку зазначений дріб визначає питому вагу повних резервів часу робіт у тривалості відрізків максимальних шляхів, що не збігаються з критичним шляхом. Чим більша ця питома вага, тим менше коефіцієнт напруженості.

Завдання оптимізації часу виконання проекту

Оптимізація мережевого графіка представляє процес поліпшення організації виконання комплексу робіт, метою якого є скорочення довжини критичного шляху, скорочення загальної вартості робіт, раціонального використання ресурсів та ін.

Розглянемо метод розв'язку завдання мінімізації загальної тривалості проекту.

Мережевий графік складається після розподілу всіх ресурсів по кожній роботі. Ці ресурси визначають час виконання робіт. На мережевому графіку не всі роботи критичні. Тому можна зменшити час $t_{кр}$ за рахунок резервів на некритичних роботах. Перерозподіляючи ці резерви на критичні роботи, можна зменшити час їх виконання й тим самим одержати новий строк виконання робіт, менший $t_{кр}$. Оптимальним мережний план буде такий, коли $t_{кр}$ вийде найменшим із усіх можливих у даних умовах.

Позначимо ресурси по роботах a_1, a_2, … відповідно b_1, b_2, ….

Нехай робота a_i із часом її виконання t_i лежить на критичному шляху, а a_k – деяка робота, що лежить на некритичному шляху, і час її виконання $-\ t_k$.

Механізм перерозподілу коштів включає зменшення коштів роботи a_k на деяку величину $x_k < b_k$, що приводить до збільшення її часу виконання $t'_k = \varphi(x_k) > t_k$.

Кошти x_k, вкладені в роботу a_i, тобто $x_k = x_i$, приводять до зменшення часу її виконання:

$t'_i = f(x_i) < t_i$.

На практиці виконання розрахунків $\varphi(x_k)$ і $f(x_i)$ звичайно представляють наближеними лінійними виразами вигляду:

$$t'_k = t_k + t_k \frac{x_k}{b_k}; \quad t'_i = t_i - t_i \frac{x_i}{b_i}. \tag{2.13}$$

Позначимо $\dfrac{1}{b_i} = c_i$ – коефіцієнт перерахування.

Тоді формули (2.13) набудуть вигляду:

$$t'_k = t_k(1 + c_k x_k); \quad t'_i = t_i(1 - c_i x_i).$$

При таких операціях має виконуватися умова: сума знятих з некритичних робіт коштів повинна дорівнювати сумі вкладених коштів на критичні роботи: $\sum\limits_i^M x_i = \sum\limits_k^N x_k$, де M – число робіт, на які кошти вкладалися, а N – число робіт, з яких кошти знімалися.

Загальний строк виконання всього комплексу робіт визначається цільовою функцією:

$$t_{кр} = \sum_{i} t_i + \sum_{i}^{M} f(x_i). \tag{2.14}$$

Тут i – номера тих робіт критичного шляху, кошти яких не змінилися.

Потрібно так перерозподілити кошти з некритичних робіт на критичні, щоб функція (2.14) прийняла найменше значення.

Скільки коштів можна взяти з некритичної роботи? Ясно, що все взяти не можна. Кошти, що знімаються, визначаються наявністю резервів часу. Нехай вільний резерв часу роботи a_k рівний $R_c(a_k)$. Тоді повинна виконуватися умова $t_k c_k x_k \le R_c(a_k)$, звідки $x_k \le \dfrac{R_c(a_k)}{t_k c_k}$ – обмеження на кошти, що знімаються з роботи a_k.

Зауваження. Якщо ми знімаємо кошти з роботи a_k, що лежить на шляху L, то не можна вкладати дані кошти в іншу роботу, що лежить на цьому шляху, яка є також частиною критичного шляху.

Розв'язок задачі оптимізації полягає в послідовному перенесенні коштів з некритичних робіт на критичні, переході від одного шляху до іншого доти, поки всі роботи не будуть перебувати на критичних шляхах і мати резерви. У цьому випадку тривалість усіх шляхів стане однаковою.

Приклад 4. Провести оптимізацію мережевого графіка (рис. 2.9) за критерієм мінімуму часу виконання всіх робіт комплексу; побудувати оптимальний мережний план робіт; визначити економію. За умови, що $c_1 = 0{,}1$; $c_2 = 0{,}2$; $c_3 = 0{,}3$; $c_4 = 0{,}4$; $c_5 = 0{,}5$; $c_6 = 0{,}6$; $c_7 = 0{,}7$; $c_8 = 0{,}9$; $c_9 = 0{,}8$; $c_{10} = 1{,}0$; $c_{11} = 1{,}1$; $c_{12} = 1{,}2$.

Розв'язок. Виявлені вільні резерви дозволяють провести оптимізацію мережевого графіка, пов'язану з кращим перерозподілом виділених ресурсів, і побудувати план виконання всього комплексу робіт за менший час, тобто більш ощадливий.

Оптимізацію мережевого графіка будемо проводити шляхом перенесення частини коштів з некритичних робіт на критичні, фіксуючи при цьому номера робіт, з яких кошти знімаються й на які переносяться.

Переносячи резерви з некритичних робіт на критичні, ми будемо збільшувати некритичний шлях і зменшувати критичний доти, поки не збіжаться тривалості всіх шляхів.

Розташуємо тривалості всіх шляхів послідовно в порядку збільшення їх резервів і почнемо оптимізацію з першої пари шляхів L_1 і L_3.

На першому етапі оптимізації переносимо резерви з некритичного шляху L_3 некритичної роботи a_8, що має вільний резерв часу $R_8 = R_c(a_8) = 7$ днів. Беремо частину коштів x_8 роботи a_8 й переносимо на роботу a_2 критичного шляху. Ці кошти на роботі a_2 позначимо x_2. Тоді тривалість нових критичних шляхів: $T_1' = T_3' = t_{кр}' < t_{кр}$. Величину коштів x_8 можна визначити, розв'язавши систему:

$$\begin{cases} x_8 = x_2, \\ T_1 - c_2 x_2 t_2 = T_3 + c_8 x_8 t_8. \end{cases} \quad (2.15)$$

при обмеженні $x_8 \le \dfrac{R_8}{t_8 c_8}$

За умовою: $T_1 = 50$; $T_3 = 43$; $c_2 = 0{,}2$; $t_2 = 16$; $c_8 = 0{,}9$; $t_8 = 14$; $R_8 = 7$. Тому система (2.15) набуде вигляду:

$$\begin{cases} x_8 = x_2, \\ 50 - 0{,}2 \cdot 16 x_2 = 43 + 0{,}9 \cdot 14 x_8. \end{cases}$$

Звідси: $x_8 = 0{,}443$.

Обмеження $\dfrac{R_8}{t_8 c_8} = \dfrac{7}{0{,}9 \cdot 14} > 0{,}443 = x_8$ виконане.

Нові часи виконання робіт a_8 і a_2 знаходять за формулами: $t_8' = t_8(1 + c_8 x_8)$; $t_2' = t_2(1 - c_2 x_2)$; новий критичний строк $t_k' = T_1' = t_{кр} - t_2 c_2 x_2)$.

Маємо:

$t_8' = 14(1 + 0{,}9 \cdot 0{,}443) = 19{,}582$;

$t_2' = 16(1 - 0{,}2 \cdot 0{,}443) = 14{,}592$;

$t_{кр}' = T_1' = 50 - 16 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}443 = 48{,}583$.

На другому етапі розглядаємо наступний найближчий некритичний шлях L_4, на якому у роботи a_{11} є вільний резерв часу:

$$R_{11}' = t_{кр}' - T_4 = 48{,}583 - 41 = 7{,}583.$$

Частина коштів a_{11}, що знімається з роботи x_{11}, повинна відповідати умові $x_{11} \le \dfrac{R_{11}'}{t_{11} c_{11}}$.

Кошти x_{11} перенесемо на роботу a_2 в кількості x_2' й на роботу a_8 у розмірі x_8' для прискорення виконання робіт першого й третього шляхів.

Для знаходження величин цих коштів складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_8' + x_2' = x_{11}, \\ t_{кр}' - t_2' c_2 x_2' = T_4 + t_{11} c_{11} x_{11}, \\ t_{кр}' - t_8' c_8 x_8' = T_4 + t_{11} c_{11} x_{11}. \end{cases} \qquad (2.16)$$

Підставимо в систему (2.16): $c_2 = 0{,}2$; $t_2' = 14{,}592$; $c_8 = 0{,}9$; $t_8' = 19{,}582$; $t_{кр}' = 48{,}583$; $T_4 = 41$; $c_{11} = 1{,}1$; $t_{11} = 4$.

Маємо:

$$\begin{cases} x_8' + x_2' = x_{11}, \\ 48{,}583 - 14{,}592 \cdot 0{,}2 x_2' = 41 + 1{,}1 \cdot 4 x_{11}, \\ 48{,}583 - 19{,}582 \cdot 0{,}9 x_8' = 41 + 1{,}1 \cdot 4 x_{11}. \end{cases}$$

Отже, $x_{11} = 1{,}098$; $x_8' = 0{,}154$; $x_2' = 0{,}944$.

Обмеження $\dfrac{R_{11}'}{t_{11} c_{11}} = \dfrac{7{,}583}{1{,}1 \cdot 4} > 1{,}098 = x_{11}$ виконане.

Новий час виконання робіт a_2, a_8, a_{11} знаходимо за формулами:

$t_2'' = t_2'(1 - c_2 x_2')$; $t_8'' = t_8'(1 - c_8 x_8')$; $t_{11}' = t_{11}(1 + c_{11} x_{11})$.

Маємо:

$t_2'' = 14{,}592(1 - 0{,}2 \cdot 0{,}944) = 11{,}834$;

$t_8'' = 19{,}582(1 - 0{,}9 \cdot 0{,}154) = 16{,}880$;

$t_{11}'' = 4(1 + 1{,}1 \cdot 1{,}098) = 8{,}816$.

Новий критичний шлях:

$t_{кр}'' = T_3'' = T_4' = 41 + 4 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}098 = 45{,}831$.

На третьому етапі розглядаємо на останньому путі L_2 наявність резерву часу в роботі a_7. Вільний резерв часу в роботі a_7 рівний:

$R_7' = t_{кр}'' - T_2 = 45{,}831 - 37 = 8{,}831$.

Знімаємо кошти x_7 й записуємо умову допустимості $x_7 \le \dfrac{R_7'}{t_7 c_7}$.

Переносимо резерви x_7 некритичної роботи a_7 на роботи a_2, a_8, a_{11} інших критичних шляхів у розмірах x_2'', x_8'', x_{11}' відповідно й складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2'' + x_8'' + x_{11}' = x_7, \\ t_{кр}'' - t_2''c_2x_2'' = T_2 + t_7c_7x_7, \\ t_{кр}'' - t_8''c_8x_8'' = T_2 + t_7c_7x_7, \\ t_{кр}'' - t_{11}''c_{11}x_{11}'' = T_2 + t_7c_7x_7. \end{cases} \quad (2.17)$$

Розв'язуючи цю систему при числових даних: $c_2 = 0{,}2$; $c_8 = 0{,}9$; $c_{11} = 1{,}1$; $c_7 = 0{,}7$; $t_7 = 6$; $t_2'' = 11{,}834$; $t_8'' = 16{,}880$; $t_{11} = 8{,}816$; $t_{кр}'' = 45{,}831$; $T_2 = 37$,

одержимо: $x_2'' = 1{,}071$; $x_8'' = 0{,}167$; $x_{11}'' = 0{,}261$; $x_7 = 1{,}499$.

Обмеження $\dfrac{R_7'}{t_7c_7} = \dfrac{8{,}831}{0{,}7 \cdot 6} > 1{,}499 = x_7$ виконане.

Новий час виконання робіт a_2, a_8, a_{11}, a_7 обчислюється за формулами:

$t_2''' = t_2''(1 - c_2x_2'') = 11{,}834(1 - 0{,}2 \cdot 1{,}071) = 9{,}3$;

$t_8''' = t_8''(1 - c_8x_8'') = 16{,}880(1 - 0{,}9 \cdot 1{,}167) = 14{,}3$;

$t_{11}'' = t_{11}'(1 - c_{11}x_{11}') = 8{,}816(1 - 1{,}1 \cdot 0{,}261) = 6{,}3$;

$t_7' = t_7(1 + c_7x_7) = 6(1 + 0{,}7 \cdot 1{,}499) = 12{,}3$.

Новий критичний шлях:

$t_{кр}''' = T_3''' = T_4'' = T_2' = T_2 + t_7c_7x_7 = 37 + 6 \cdot 0{,}7 \cdot 10499 = 43{,}3$ доби.

Економія 50 – 43,3 = 6,7 доби.

Побудуємо оптимальний план робіт (рис. 2.10).

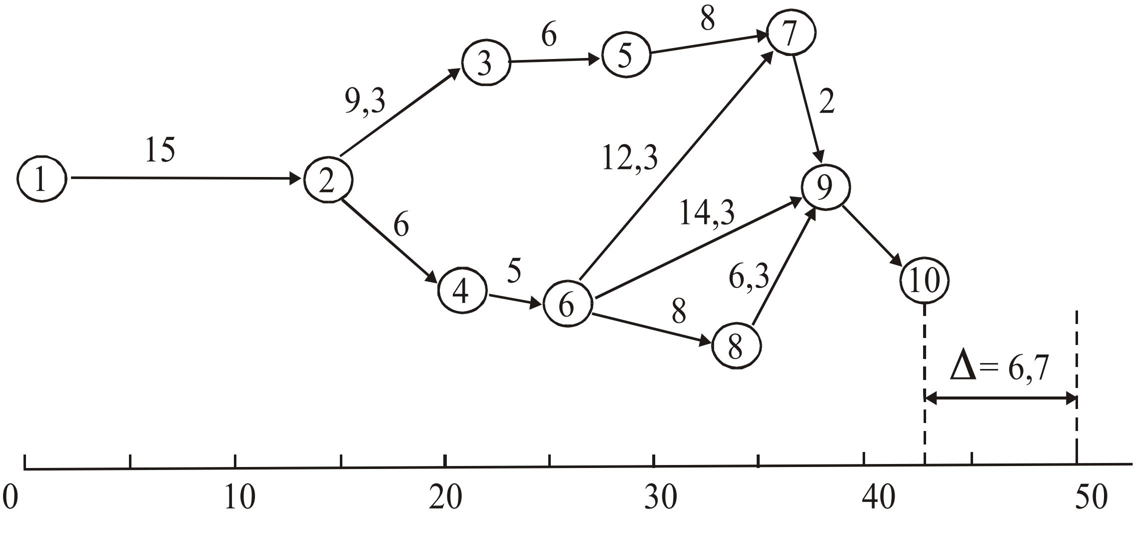


Рис. 2.10.

2.3. Планування роботи виробничого об'єднання

Моделювання проблем розвитку й розміщення виробництва приводить до завдань великої розмірності. Це зумовлено необхідністю побудови моделей з великим ступенем деталізації. З погляду конструювання моделей ця деталізація призводить до неможливості отримати універсальні моделі, застосовні до кожного (або багатьох) виробничих об'єднань. При детальному описі одержуємо індивідуалізовані моделі, що докладно відображають специфіку того або іншого об'єднання. Тому надалі ми зосередимо увагу не на моделях, а на методах розв'язку завдань поточного планування на рівні об'єднання. Основну увагу приділимо найбільш принциповим питанням моделювання роботи об'єднання із застосуванням методів ***багаторівневої оптимізації***.

Приклад. Об'єднання, що складається з двох підприємств, виробляє чотири види продукції. Норми витрат ресурсів на виробництва окремих продуктів, прибуток від їхньої реалізації й наявність ресурсів представлено в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Види ресурсів	Норми витрат ресурсів				Наявність ресурсів (т)
	Підприємство I		Підприємство II		
	Продукція А	Продукція Б	Продукція В	Продукція Г	
1	2	3	-	-	12
2	2	1	-	-	8
3	-	-	1	2	8
4	-	-	2	2	10
5	4	3	1	1	18
6	2	2	4	5	30
Прибуток (грн./шт.)	12	6	5	2	

Потрібно визначити оптимальний варіант виробничої програми об'єднання, що забезпечує одержання максимального прибутку.

Позначимо через x_j обсяг виробництва j-го продукту $(j=1,2,3,4)$. Тоді модель у чисельному вигляді буде записана в такий спосіб:

видаток власних ресурсів на підприємстві I не перевершує їхньої наявності:

$$2x_1+3x_2\le 12;$$

$$2x_1+x_2\le 8; \qquad (2.18)$$

видаток власних ресурсів на підприємстві II не перевершує їхньої наявності:

У будь-якій системі управління запасами рівень останніх змінюється відповідно до циклічної моделі. Процес зниження рівня запасів визначається відповідною моделлю попиту. У деякій точці для наповнення запасу буде зроблено нове замовлення. Через певний час, який називається *терміном поставки,* замовлення буде отримано, і рівень запасів зросте. Після цього починається новий цикл запасів (рис. 1).

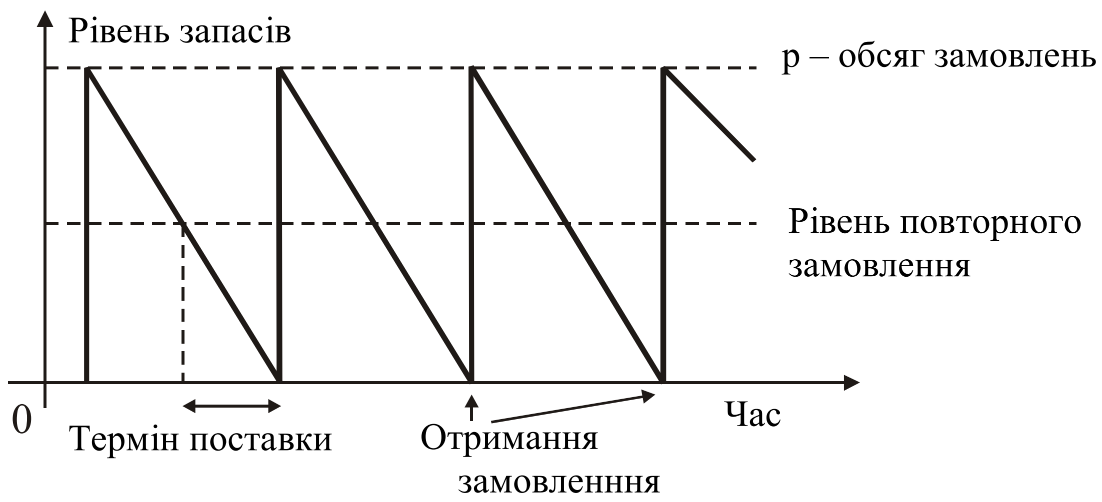


Рис. 1.

Система передумов моделі управління запасами. Для спрощення процесу моделювання в моделі вводиться ряд передумов:

1. Попит на продукцію є сталим або наближено сталим. Якщо коефіцієнт використання запасів є сталим, то рівень запасів також буде зменшуватися зі сталим коефіцієнтом.
2. Припустимо, що термін поставки відомий і є сталою величиною. Це означає, що замовлення можна здійснювати в точці з певним значенням часового параметра і обсяг запасу (рівень повторного замовлення), які забезпечують отримання замовлення в той момент, коли рівень запасів дорівнює нулю.
3. Відсутність запасів є недопустимою.
4. Протягом кожного циклу запасів здійснюється замовлення на стале число продукції (p).

Кінцевий вид моделі управління запасами показано на рис. 1.

Усі цикли запасів є однаковими. Максимальна кількість продукції, яка знаходиться в запасі, співпадає з обсягом замовлення *p.*

Витрати на збереження запасів. Якщо у зовнішнього постачальника замовляється партія продукції, процеси замовлення і виконання замовлення потягнуть за собою певні витрати. Необхідно створити відповідні умови для збереження та управління запасами. А тому в цій частині також виникають певні витрати. В окремих випадках може виникнути необхідність і в інших витратах, таких, наприклад, як витрати внаслідок нестачі запасів або збереження резервного запасу.

Ці поняття будуть введені нами по ходу викладення матеріалу. Тут ми розглянемо тільки поняття вартості здійснення замовлення, витрат на збереження або складування запасів, а також вартості покупки продукції.

Якщо говорити про випуск продукції у формі виробничих партій, а не про покупку продукції ззовні, виникають аналогічні витрати. У даному випадку вартість здійснення замовлення еквівалентна вартості організації технологічного процесу по випуску партії продукції, а вартість закупки – витратам виробництва продукції. А тому схема аналізу залишається незмінною. Кожний вид вартості або витрат включає в себе змінну і сталу компоненти. Проведемо аналіз моделі управління запасами, розглядаючи лише змінну II частину. При цьому введемо в модель нові передумови: змінні витрати здійснення замовлення або організації процесу випуску партії продукції відомі, є сталими і не залежать від обсягу замовлення.

Рівняння загальної вартості. Побудуємо модель, яка описує витрати, пов'язані з наявністю запасів за весь період їх збереження. Виберемо період, що дорівнює одному року, хоча тривалість цього періоду значення не має: це може бути один день, місяць, рік і т.ін. Введемо таку систему позначень:

K – щорічний попит на запас продукції;

L_0 – змінна вартість здійснення одного замовлення, гр. од./одне замовлення;

L_h – змінна вартість збереження одиниці продукції в запас і, гр. од. на одиницю продукції в рік.

L – ціна купівлі одиниці продукції в запасі, гр. од. на рік;

p – обсяг замовлення, од. продукції/замовлення.

Загальна вартість запасів на рік =
= загальна вартість здійснення замовлення на рік +
+ загальна вартість збереження запасів на рік

Кожну складову даного рівняння розглянемо окремо.

1. Якщо потреба в продукції складає K одиниць на рік, а кожне замовлення подається на партію в p одиниць, тоді щорічна кількість замовлень є $\frac{K}{p}$. А тому

щорічна вартість здійснення замовлень =
= вартості подачі одного замовлення ×
кількість замовлень, які подаються щорічно =

$$=L_0 \times \frac{K}{p} (гр.од.на\ \ рік).$$

2. Розрахунок щорічної вартості збереження запасів, як правило, проводять, виходячи з середньої кількості продукції, яка складає запас протягом одного циклу. У нашому випадку (найпростіша

ситуація) рівень запасів змінюється лінійно і належить проміжку від p до нуля, а тому середній рівень запасів дорівнює $\frac{p}{2}$. Зауважимо, що в більш складних ситуаціях для розрахунку середнього рівня запасів слід використовувати більш складні математичні залежності.

Вартість збереження одиниці продукції L_h визначається або як фіксована величина на весь рік, або як процент від загальної вартості одиниці продукції за рік. У різних фірмах застосовуються найрізноманітніші методи розрахунку витрат у цій сфері, але в цілому L_h характеризує величину процентів із грошових позик, заморожених у формі запасів, вартість пошкоджень або; збереження запасів, а також певну частину загальної вартості системи збереження запасів.

Щорічна вартість збереження запасів =
= вартість збереження одиниці продукції на рік ×
середній розмір запасу =

$$=L_h \cdot \frac{p}{2}\,(гр.од.\ \ на\ \ \ \ рік).$$

Отже, загальна вартість запасу на рік визначається наступним чином:

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2}\ \ (гр.\ \ од.\ \ \ \ на\ \ \ рік).$$

Таке рівняння називають *рівнянням загальної вартості* основної моделі управління запасами. Треба визначити значення $p,$ при якому значення загальної вартості найменше.

Оптимальний обсяг замовлення p_0. Для визначення оптимального значення $p,$ скористаємося загальною теорією дослідження функції на екстремум з використанням похідної.

Функція:

$$ВЗ = L_0 \cdot \frac{K}{p} + L_h \cdot \frac{p}{2}$$

набуває мінімального значення, якщо:

$$\frac{dBB}{dp} = 0 \qquad і \qquad \frac{d^2 ВЗ}{dp^2} > 0.$$

Випишемо першу похідну функції $ВЗ$ і прирівняємо її до нуля.

$$\frac{dBB}{dp} = -L_0 \cdot \frac{K}{p^2} + L_h \cdot \frac{1}{2}\ \ ;$$

$$-L_0 \cdot \frac{K}{p^2} + L_h \cdot \frac{1}{2} = 0\ \ .$$

Отже,

$$L_0 \cdot \frac{K}{p^2} = \frac{1}{2} \cdot L_h \ ; \qquad p^2 = \frac{2L_0 \cdot K}{L_h}; \qquad p_0 = \pm\sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}} \ .$$

Згідно з другою похідною:

$$\frac{d^2 ВЗ}{dp^2} = 2L_0 \cdot \frac{K}{p^3} + 0 > 0 \ ,$$

якщо $p > 0$.

А тому $ВЗ$ набуває мінімального значення, якщо $p_0 = +\sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}}$.

Отриманий обсяг замовлення називають *економічним обсягом замовлення (Е. 0.3.).* Вартість збереження буде мінімальною, якщо протягом року з рівними інтервалами замовляють дану кількість продукції. Корисно скористатися графічним представленням рівняння загальної вартості та його компонентів. Витрати на збереження пропорційні обсягу замовлення, отже, їх графік являє собою пряму, яка проходить через початок координат. Вартість подачі замовлення обернено пропорційна величині *p.* Графічне зображення вартості поданого замовлення, витрат на збереження та загальної вартості запасів показано на рис. 2.

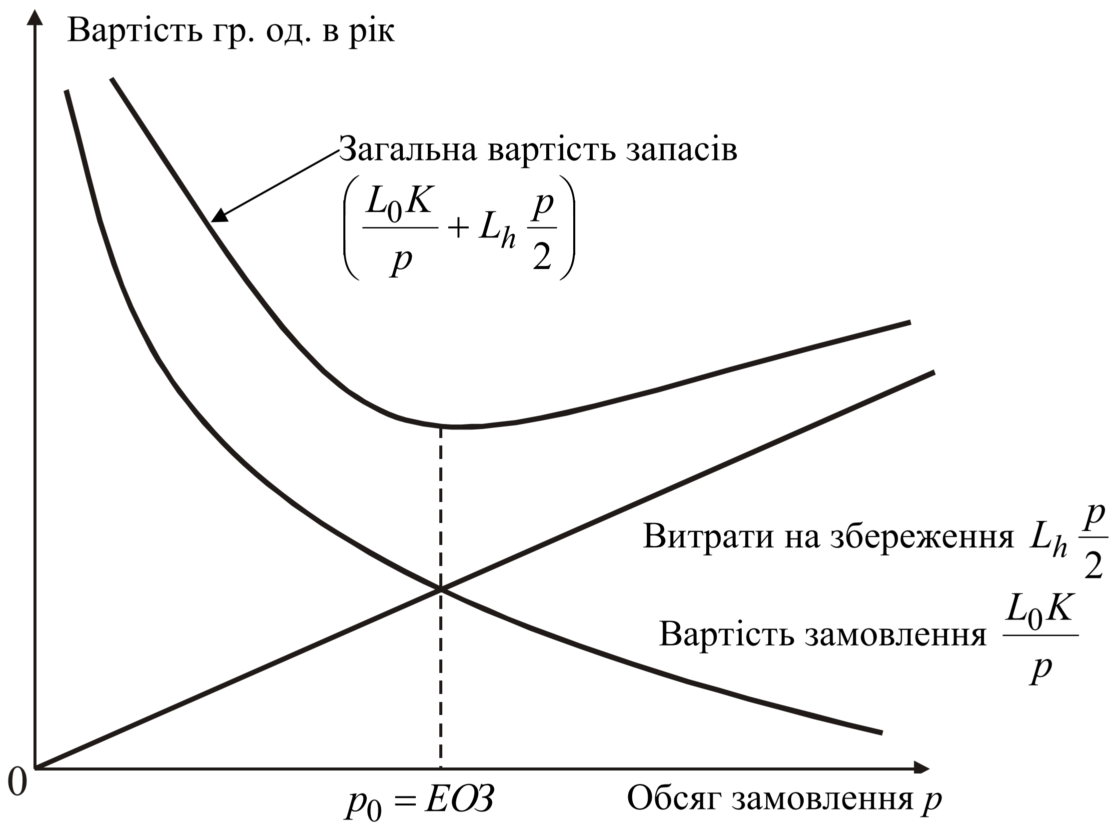


Рис. 2.

Легко переконатися, що якщо обсяг замовлення невеликий, то вартість подачі замовлення є домінуючою – в цьому випадку замовлення подаються часто, але на невелику кількість продукції. Якщо обсяг замовлення є достатньо великим, основною компонентою є вартість збереження – здійснюється невелика кількість замовлень, обсяг яких досить великий. Екстремальна точка на графіку рівняння загальної вартості відповідає ситуації, коли обидва види витрат рівні одне одному. Цей факт може бути корисним при розрахунку ЕОЗ. Слід відзначити, що в критичній точці крива загальної вартості помітно вирівнюється, це означає, що в даній області загальна вартість не є досить чутливою по відношенню до змін у обсязі замовлення. Після того, як одержимо значення ЕОЗ, залишається ще, як правило, декілька значень, а тому можна вибрати необхідний обсяг замовлення, який не приводить до значного збільшення загальної його вартості.

Рівень і інтервал повторного замовлення. Після з'ясування обсягу замовлення ще не відомо, з якою періодичністю його слід реалізувати.

Нехай термін виконання (час) реалізації замовлення постачальником складає N тижнів, тоді впродовж періоду постачання буде використано $N \cdot \frac{K}{52}$ одиниць продукції, які складають запас згідно з припущенням, що рік має 52 тижні. Оскільки величина попиту стала, кількість продукції, яка використовується протягом терміну виконання замовлення, є одночасно і рівнем повторного замовлення. Таким чином, нове замовлення слід подавати, коли рівень запасів знижується до величини $N \cdot \frac{K}{52}$. У цьому випадку нове замовлення буде одержано в той момент, коли рівень запасів стане дорівнювати нулю. На рис. 3 показано рівень та інтервал повторного замовлення.

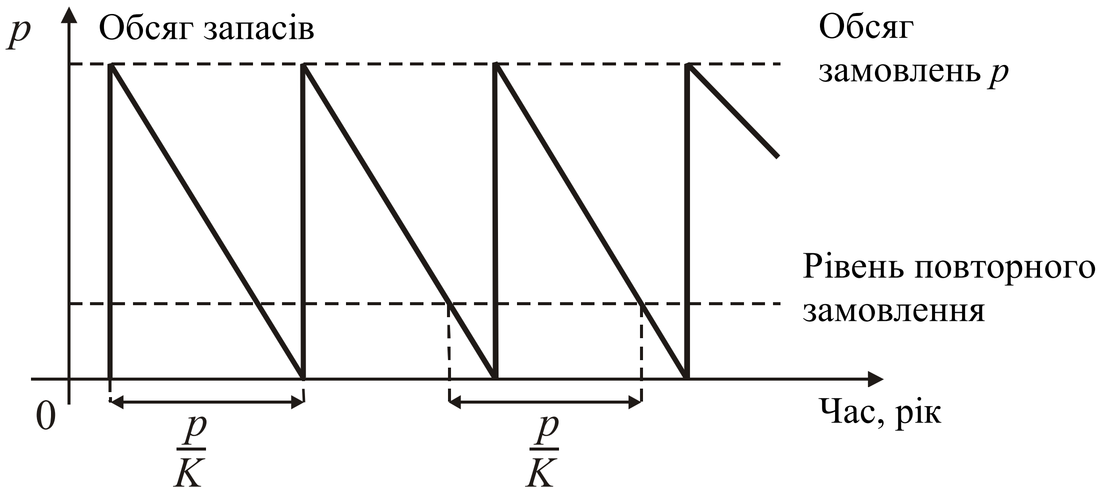


Рис. 3.

Протягом року потрібні $\frac{K}{p}$ замовлень з рівними інтервалами, а тому новий цикл завжди починається в точці

1 рік: $\frac{K}{p}$ замовлень $= \frac{p}{K}$ років.

Інтервал повторного замовлення також буде дорівнювати $\frac{p}{K}$, оскільки всі цикли замовлень однакові.

Приклад 1. Магазин продає близько 600 упаковок пакетного цукру на рік. Протягом року величина попиту розподіляється рівномірно. Одна упаковка цукру коштує 3 гр. од. Власник магазину повинен заплатити за одне замовлення 15 гр. од. Замовлення від постачальника доставляється за 10 робочих днів (робочий тиждень – 6 днів). Витрати на збереження складають 25% середньорічної вартості запасів. Скільки упаковок повинен замовляти власник кожного разу, якщо його мета полягає в мінімізації загальної вартості запасів? Визначити, з якою частотою слід здійснювати подачу замовлень і рівень повторного замовлення, якщо вважати, що магазин працює 300 днів на рік.

Розв'язок. Порахуємо економічний обсяг замовлення згідно з формулою:

$$p_0 = \sqrt{\frac{2L_0 \cdot K}{L_h}},$$

де K = 600 упаковок на рік,

L_0= 15 гр. од. за одне замовлення,

L_h =25% на рік від вартості запасів розміром в одну упаковку, або $0{,}25 \cdot 3$ гр. од. на рік за одну упаковку.

Отже,

$$p_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 600}{0{,}25 \cdot 3}} = \sqrt{24000} = 154{,}9.$$

Виберемо значення, що дорівнює $p_0 = 155$ упаковкам, оскільки кількість упаковок повинна бути цілим числом.

Мінімальне значення загальної вартості замовлення на рік визначається за формулою:

$$ВЗ = \frac{L_0 \cdot K}{p_0} \cdot + \frac{L_h \cdot p_0}{2}.$$

Отже,

$$ВЗ = \frac{15 \cdot 600}{155} \cdot + \frac{0{,}25 \cdot 3 \cdot 155}{2} = 58{,}06 + 58{,}13 = 116{,}19 \textit{ гр. од. на рік}\cdot$$

Загальна вартість куплених власником магазина 600 упаковок пакетного цукру дорівнює сумі вартості запасів і вартості покупки, тобто:

$$116{,}2\ гр.\ од. + 3гр.\ од. \times 600 = 1916{,}2\ \ гр.\ од.\ на\,рік.$$

Звідси вартість запасів складає $= 6{,}1\%$ загальної вартості покупки на рік. Якби власник подавав замовлення на партії в 170 упаковок, то загальна вартість запасів за рік дорівнювала б:

$$ВЗ_{170} = \frac{15 \cdot 600}{170} \cdot + \frac{0{,}25 \cdot 3 \cdot 170}{2} = 52{,}94 + 63{,}75 = 116{,}19\ \ гр.\ од.\ на\ \ рік \cdot$$

Збільшення вартості є невеликим (0, 50 гр. од. на рік) порівняно з вартістю, що відповідає знайденому значенню ЕОЗ. Кожного разу по закінченню періоду, що дорівнює $\frac{155}{600}$ років, власник магазину повинен здійснювати нове замовлення. Оскільки в році 300 робочих днів, то інтервал повторного замовлення буде дорівнювати:

$$\frac{155}{600} \cdot 300 = 77{,}5 \approx 78 \text{ робочих днів.}$$

За 10 днів поставка замовлення пакетного цукру складе:

$$\frac{попит}{к - ть\quad днів} \cdot час\quad поставки = \frac{600}{300} \cdot 10 = 20\quad упаковок.$$

Отже, рівень повторного замовлення дорівнює 20 упаковкам. Коли рівень запасів дорівнює 20 упаковкам, тоді здійснюють нове замовлення.

3.2. Класичне завдання управління запасами

У цьому підрозділі ми виконаємо узагальнення моделі, яка досліджувалася в підрозділі 3.1.

Під завданням управління товарними запасами розуміється така оптимізаційна задача, у якій задана інформація:

- про поставки товару;
- про попит на товар;
- про витрати й умови зберігання товарних запасів;
- критерій оптимізації.

Розглянемо завдання управління запасами в так званій класичній постановці. Виберемо за одиничний інтервал часу один день. Нехай до кінця дня $t-1$ на складі перебуває запас товару в обсязі $x_{t-1} \geq 0$. Склад робить замовлення на поповнення запасу товару в обсязі h_t. Це поповнення надходить до початку наступного дня t, так що запас товару на початку наступного дня становить $x_{t-1} + h_t$. Нехай S_t - обсяг товару, запитуваний споживачем (або споживачами) у день t (обсяг заявки).

Якщо $S_t \le x_{t-1} + h_t$, то склад задовольняє заявку споживача повністю, а залишки товару $x_t = x_{t-1} + h_t - S_t$ переносяться на наступний день $t+1$, причому витрати зберігання цього запасу пропорційні його обсягу й дорівнюють $C \cdot x_t = C(x_{t-1} + h_t - S_t)$.

Якщо обсяг заявки $S_t > x_{t-1} + h_t$, то склад повністю віддає свій запас, а за недопоставлений товар зазнає втрат (наприклад, штрафується за дефіцит), пропорційних обсягу дефіциту й рівних $k(S_t - x_{t-1} - h_t) = -k(x_{t-1} + h_t - S_t)$.

Таким чином, повні витрати $\varphi(x_{t-1}, h_{t,} S_t)$ складу можна записати у вигляді:

$$\varphi(x_{t-1}, h_{t,} S_t) = \max\{x_{t-1} + h_t - S_t); -k(x_{t-1} + h_t - S_t)\}, \qquad (3.1)$$

при цьому залишок товару дорівнює:

$$x_t = \max\{0; x_{t-1} + h_t - S_t\}.$$

З (3.1) випливає, що:

якщо $x_t > 0$, то $\varphi(x_t) = c \cdot x_t$;

якщо $x_t < 0$, то $\varphi(x_t) = -k \cdot x_t$;

якщо $x_t = 0$, то $\varphi(x_t) = 0$.

У класичній постановці завдання управління запасами передбачається, що сама величина попиту S_t невідома, однак вона є незалежною випадковою величиною, що має заданий закон розподілу $F(x)$ зі щільністю розподілу $f(x)$.

Тоді середні повні витрати $\Phi(x_{t-1} + h_t)$ задаються формулою ($M -$ *математичне очікування*):

$$\Phi(x_{t-1} + h_t) = M\varphi(x_{t-1}, h_t, S_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_{t-1}, h_t, S_t) dF(S_t).$$

Завдання ставиться в такий спосіб: визначити обсяг замовлення на поповнення h_t, яке мінімізує середні повні витрати, тобто:

$\Phi(x_{t-1} + h_t) \to \min$, де $h_t \ge 0$.

Розглянемо розв'язок класичного завдання управління товариними запасами у статичній постановці. Позначимо $y = x_{t-1} + h_t$ й вилучимо внаслідок статичності завдання індекс t у записі обсягу попиту й поповнення. Розглянемо наступне завдання:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{c(y-s); \quad -k(y-s)\} dF(s) \to \min. \qquad (3.2)$$

Перепишемо функцію $\Phi(y)$ в більш зручному вигляді:

$$\Phi(y) = c\int_{-\infty}^{y}(y-s)dF(s) + k\int_{y}^{+\infty}(s-y)dF(s)$$

і обчислимо її похідну:

$$\Phi'(y) = c\cdot F(y) - k(1-F(y)) = (c+k)F(y) - k. \qquad (3.3)$$

Відзначимо, що друга похідна цієї функції невід'ємна (тобто функція опукла):

$$\Phi''(y) = (c+k)F'(y) = (c+k), \qquad f(y) \ge 0,$$

тому, дорівнявши першу похідну нулю, одержимо рівняння для запасу y^*, за якого досягається мінімум:

$$F(y^*) = \frac{k}{c+k}. \qquad (3.4)$$

Розв'язок (3.4) завдання (3.2) визначає стратегію оптимального поповнення запасів. Величина поповнення запасів h_t^*, яка мінімізує середні повні витрати, задається в такий спосіб:

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & при \quad x_{t-1} \ge y^* \\ y^* - x_{t-1}, & при \quad x_{t-1} \le y^* \end{cases}. \qquad (3.5)$$

Конкретні числові характеристики системи управління запасами залежать від функції щільності розподілу $f(x)$ випадкові величини попиту. Як приклад розглянемо випадок симетричного «трикутного роподілу» попиту:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \;\; x \le b; \\ \dfrac{x+b}{b^2}, & при \;\; -b \le x \le 0; \\ \dfrac{-x+b}{b^2}, & при \;\; 0 \le x \le b; \\ 0, & при \;\; x \ge b. \end{cases} \qquad (3.6)$$

Обчислимо числові характеристики для функції щільності розподілу, заданої в (3.6). У цьому випадку функція розподілу $F(x)$ задається умовами:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при \ x\le -b; \\ \dfrac{(x+b)^2}{2b^2}, & при \ -b\le x\le 0; \\ 1-\dfrac{(x-b)^2}{2b^2}, & при \ 0\le x\le b; \\ 1, & при \ x\ge b. \end{cases} \tag{3.7}$$

Випадкова величина попиту S має наступні числові характеристики: математичне очікування $MS=0$; математичне очікування квадрата $MS^2=\dfrac{b^2}{6}$; дисперсія $DS=\dfrac{b^2}{6}$;середнє квадратичне відхилення $\sigma_S=\dfrac{b}{\sqrt{6}}$.

Безпосередні обчислення з використанням функції середніх витрат у вигляді (3.2) показують, що при $x\le -b$

$$\Phi(x)=-k\int_{-\infty}^{+\infty}(x-s)f(s)ds=-kx\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)ds+k\int_{-\infty}^{+\infty}sf(s)ds=$$
$$=-kx+kMS=-kx \tag{3.8}$$

Використовуючи вираз для першої похідної $\Phi'(x)$ у вигляді (3.3) і вираз (3.7) для функції розподілу $F(x)$, можна визначити, що при $-b\le x\le 0$

$$\Phi(x)=(c+k)\frac{(x+b)^3}{6b^2}-kx+C_1 \tag{3.9}$$

Тут константа інтегрування C_1 визначається шляхом прирівнювання виразів (3.8) і (3.9) при $x=-b; kb=kb+C_1$, тобто $C_1=0$.

Аналогічно при $0\le x\le b$ можна одержати:

$$\Phi(x)=-(c+k)\frac{(x-b)^3}{6b^2}+cx, \tag{3.10}$$

а при $x\ge b$:

$$\Phi(x)=cx. \tag{3.11}$$

Вирази (3.8) – (3.11) задають у різних інтервалах шукану функцію середніх повних витрат. Заміняючи в них x на $x-a$, одержимо функцію середніх повних витрат, якщо функція щільності розподілу попиту зміщена по осі x вправо на a. У випадку $k>c$ оптимальний рівень запасу дорівнює:

$$y^* = a + b - \sqrt{\frac{2c}{c+k}} \cdot b.$$

У загальному вигляді для даної функції щільності розподілу попиту оптимальний рівень запасу задається умовами:

$$y^* = \begin{cases} a - b + \sqrt{\dfrac{2c}{c+k}} \cdot b, & при \quad c > k; \\ a, & при \quad c = k; \\ a + b + \sqrt{\dfrac{2c}{c+k}}, & при \quad c < k, \end{cases} \tag{3.12}$$

а значення $\Phi^* = \Phi(y^*)$ мінімуму середніх повних витрат має вигляд:

$$\Phi^* = \begin{cases} bk\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2c}{c+k}}\right) & при \quad c > k; \\ \dfrac{bk}{3} = \dfrac{bc}{3} & при \quad c = k; \\ bc\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2c}{c+k}}\right) & при \quad c < k. \end{cases} \tag{3.13}$$

З формул (3.12) і (3.13) для даної моделі випливає, що оптимальний рівень запасу при $c \neq 0$ й мінімум середніх повних витрат при всіх c, k лінійно залежать від величини b, тобто від інтервалу, у якому укладений розкид значень величини попиту на товар.

Нагадаємо, що стратегія оптимального поповнення запасів задається формулами (3.5).

Приклад 2. Нехай деяка фірма відповідно до договору реалізує зі складу за заявками холодильники, причому щоденний попит є випадковою величиною, функція щільності розподілу якої представлена формулою (3.6), і коливається від 20 до 80 холодильників на день. Середні витрати зберігання одного холодильника в день становлять 80 грн., а штраф за дефіцит (недопоставку) одного холодильника в день 170 грн. Потрібно визначити стратегію оптимального запасу холодильників і мінімальні середні повні витрати.

В умовах розглянутого завдання $b = \dfrac{80-20}{2} = 30\ (хол.)$; $a = \dfrac{20+80}{2} = 50\ (хол.)$; $C = 80\ \ грн.$; $k = 170\ \ грн.$ Відповідно до формули (3.12), оптимальний рівень запасу $(c < k)$ становить:

$$y^* = 50 + 30 - \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{80 + 170}} \cdot 30 = 80 - 4/5 \cdot 30 = 56 \quad (хол.).$$

Тоді величина h_t^* поповнення запасу холодильників, при якому середні
повні витрати будуть мінімальні, задається відповідно до формули (3.5) умовами:

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & если \quad x_{t-1} \geq 56; \\ 56 - x_{t-1}, & если \quad x_{t-1} \leq 56, \end{cases}$$

де x_{t-1} - запас холодильників на складі фірми на кінець попереднього дня. Так, якщо на кінець попереднього дня на складі фірми було 60 холодильників, то поповнювати запас не слід, а якщо на кінець попереднього дня на складі залишалося 25 холодильників, то слід реалізувати заказ на поповнення запасу у кількості 56 - 25 = 31 холодильник.

Якщо дотримуватися цієї стратегії поповнення запасу холодильників, то мінімальний рівень середніх повних витрат розраховуючи на один день відповідно до формули (3.13) складе:

3.3. Стохастичні моделі управління запасами

У попередньому підрозділі ми вже почали розглядати стохастичні моделі управління запасами. У стохастичних моделях управління запасами попит є випадковою величиною, що описується законами теорії ймовірностей. Врахування випадковості суттєво ускладнює аналіз та отримання рішень на таких моделях, а тому розглянемо найпростіші з них.

Припустимо, що попит r за інтервал часу T є випадковим і заданий його закон розподілу (дискретний) $p(r)$ або ж щільність розподілу ймовірності $f(r)$. Якщо попит r є нижчий, ніж рівень запасу s, то закупівля (збереження продаж) залишку продукту потребуватимуть додаткових затрат c_2 на одиницю продукту. Якщо ж попит вищий за рівень запасу, то це приводить до штрафу за дефіцит c_3 на одиницю продукції. Критерієм затрат, оскільки вони є випадковою величиною, вважатимемо математичне сподівання сумарних затрат $M[s]$.

Для моделі, що розглядається, матимемо у випадку дискретного попиту:

$$M[s] = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r).$$

Перша складова враховує затрати на набуття (зберігання) надлишку $(s-r)$ одиниць продукту (при $r \leq s$), а друга - штраф за дефіцит в $(r-s)$ одиниць продукту (при $r>s$). У випадку неперервного випадкового попиту, що задається щільністю розподілу $f(r)$, для математичного сподівання сумарних витрат отримаємо:

$$M[s]=c_2\int_0^s (s-r)f(r)dr+c_3\int_s^\infty (r-s)f(r)dr.$$

Таким чином, задача полягає у визначенні такого запасу s, при якому математичне сподівання сумарних витрат є найменшим. Якщо s^* - запас, що мінімізує $M[s]$, то справедливі наступні співвідношення:

для дискретного розподілу $F(s^*)<\eta<F(s^*+1)$,

для неперервного розподілу $F(s^*)=\eta$,

де $F(s)=p(r<s)$ - інтегральна функція розподілу попиту,

$\eta=\dfrac{c_3}{c_2+c_3}$ - щільність збитків внаслідок незадоволеного попиту $(0\le\eta\le 1)$.

В управлінні запасами η має велике значення: якщо значення c_3 мале порівняно з c_2, то η близьке до нуля, якщо ж, навпаки, значно перевищує його, то η близьке до одиниці. Таким чином, η можна розглядати як міру припустимості дефіциту - якщо дефіцит не допускається, то $c_3=\infty$, тобто $\eta-1$.

Припустимо тепер, що витрачання запасу здійснюється неперервно з однаковою інтенсивністю (див рис. 3.4).

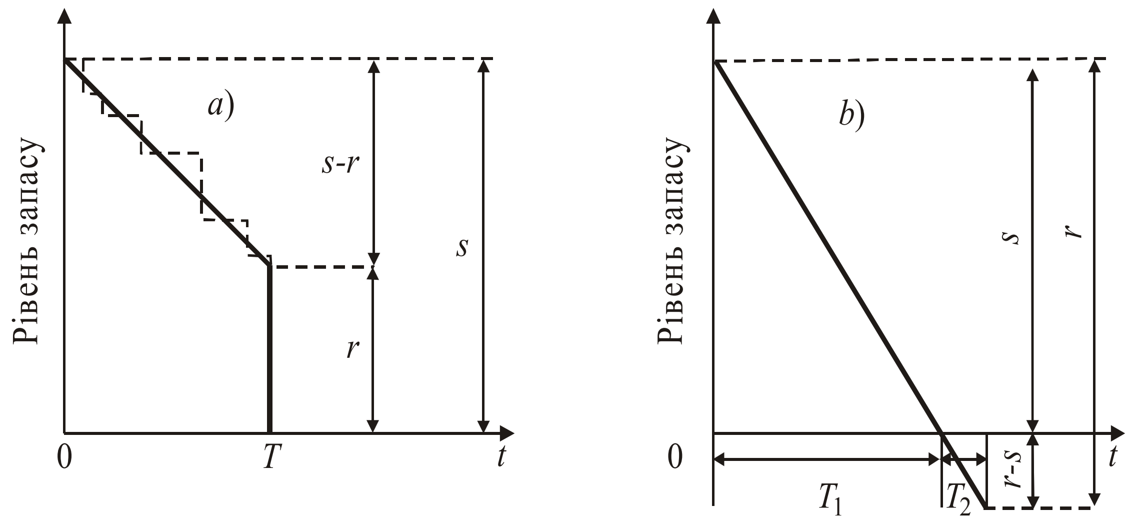


Рис. 3.4. *Витрачання запасу з постійною інтенсивністю*

Варіант *а)* відповідає випадку, коли попит не перевищує запасу $(r \le s)$, а *b)* - коли попит перевищує запас $(r > s)$. Насправді витрачання запасу здійснюється крок за кроком, але пряма є непоганим наближенням до цієї ламаної.

Середній запас, що відповідає варіанту а), становить:

$$s_1 = \frac{1}{2}(s + (s - r)) = s - \frac{1}{2}r .$$

Середній запас, що відповідає варіанту *b)* з врахуванням того, що: $T_1 = \frac{s}{r}T,\ \ T_2 = \frac{r-s}{r}$, становить $s_2 = \frac{1}{2}s\frac{T_2}{T_1} = \frac{s^2}{2r}$.

Таким чином, середній дефіцит продукту за період T_2 для випадку *b)* буде $s_3 = \frac{1}{2}(r-s)\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{2}\frac{(r-s)^2}{r}$

і математичне сподівання сумарних витрат становитиме:

$$M[s] = c_2\sum_{r=0}^{s}(s - \frac{r}{2})p(r) + c_2\sum_{r=s+1}^{\infty}\frac{s^2}{r}p(r) + c_3\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(r-s)^2}{r}p(r).$$

У загальній теорії доведено, що в цьому випадку математичне сподівання сумарних витрат є мінімальним при рівні запасу s^*, для якого справедлива нерівність:

$$L(s^*) \le \eta \le L(s^* + 1),$$

де $\quad L(s) = F(s) + \left(s - \frac{1}{2}\right)\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r},\ \ F(s) = p(r < s).$

Ця модель є достатньо ідеалізованою, оскільки вважається, що поповнення запасу відбувається миттєво. Однак в багатьох задачах час затримання поставок виявляється значним, і його необхідно враховувати в моделі.

Нехай за час затримання поставок θ вже замовлені n партій по одній в кожному з періодів тривалістю $T = \theta / n$. Позначимо s_0 - початковий рівень запасу (до початку першого періоду), s_i, r_i, q_i - - відповідно запас, попит та поповнення запасу за i -й період.

У цьому випадку до завершення n -го періоду в комору надійде $\sum_{i=1}^{n} q_i$ одиниць продукту, а використано буде $\sum_{i=1}^{n} r_i$ таким чином:

$$s_n = s_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{i=1}^{n} r_i, \quad або\ s_n = s - r,$$

$$\text{де } s_n = s_0 + \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad r = \sum_{i=1}^{n} q_i .$$

Необхідно визначити оптимальний об'єм партії замовлення, який потрібно зробити на n -й період.

Математичне сподівання сумарних витрат визначимо як:

$M[s] = c_2 \sum_{r=0}^{s} (s-r)p(r) + c_3 \sum_{r=s+1}^{\infty} (r-s)p(r)$, а оптимальний запас - за співвідношенням:

$$F(s^*) < \eta < F(s^* + 1).$$

Знайшовши оптимальний запас s^*, та знаючи $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$, обчислимо:

$$q_n = s^* - \left(s_0 + \sum_{i=1}^{n-1} q_i \right).$$

Аналітично визначити оптимальні значення точки запасу та об'єму партії вдається лише в найпростіших випадках. Якщо ж система має складну структуру з багатьма видами продукції та коморами, то єдиним способом її аналізу виявляється імітаційне моделювання.

3.4. Визначення економічно вигідного розміру партії

При необхідності поповнити запаси продукції розв'язується задача визначення розміру замовлення (чи розміру партії) продукції. Відновлення рівня запасів може здійснюватися або шляхом виконання замовлення на виготовлення деякого фіксованого обсягу продукції, зареєстрованого системою нижнього рівня, або шляхом виконання замовлення на виготовлення об'єму продукції, рівного різниці між рівнем розміщуваного запасу (який дорівнює: Наявний запас + Об'єм замовлень - Очікувані витрати продукту) і максимальним рівнем запасів, дані про який також зберігаються в системі обліку.

Правила, що вирішуються, розробляються зазвичай на другому рівні трирівневої системи управління запасами для визначення економічно обґрунтованого оптимального розміру замовлення. Ці правила використовуються при визначенні запланованого чи максимального рівня запасу для конкретного типу чи типів продукції.

Аналіз та формування припущень щодо умов функціонування системи управління запасами.

Різні підходи до розв'язання задачі визначення економічного розміру замовлення (партії продукції) базуються на тих чи інших можливих припущеннях щодо таких показників, як спосіб постачання замовленої продукції, інтенсивність реалізації продукції, витрати на освоєння виробництва нової продукції, собівартість одиниці продукції і поточні витрати на збереження запасів.

Розглянемо деякі можливі припущення щодо зазначених факторів.

Спосіб постачання замовленої продукції

1) Уся замовлена продукція постачається у вигляді однієї партії. Відповідно до моделі, наявний запас зростає від мінімального рівня таким чином, що до початку наступного циклу досягає розміру партії.

2) Продукція надходить в комору з моменту початку виробничого циклу протягом інтервалу часу, достатнього для реалізації продукції до постачання всієї партії.

Інтенсивність і терміни реалізації продукції

1) Продукція реалізується з постійною інтенсивністю протягом необмеженого часу. Це вимагає багаторазового поповнення запасів за рахунок замовлень однакового розміру, причому наявний запас буде зменшуватися за лінійним законом. Практично припущення про необмежений час реалізації означає, що необхідно принаймні більш ніж три поповнюючі партії продукції.

2) Продукція реалізується з відомою чи прогнозованою інтенсивністю, що змінюється в часі. У цьому випадку для одержання точного розв'язку потрібно застосовувати методи динамічного програмування.

3) При значних випадкових коливаннях попиту мінімальний рівень запасу відмінний від нуля. У цьому випадку існує резервний запас. Якщо розмір партії продукції, що замовляється, збільшується порівняно з тим, що відповідає випадку виконання замовлень, то ймовірність дефіциту продукції протягом року зменшується. Отже, резервний запас повинен бути таким, щоб забезпечити бажаний рівень обслуговування споживачів. Загальна економія в результаті одноразового визначення рівня резервного запасу і розміру партії продукції для його поповнення здійснюється в тих випадках, коли розмір партії продукції, обчислений за умови відсутності дефіциту, менший, ніж стандартне відхилення помилок прогнозу на інтервалі випередження.

4) Продукція реалізується доти, доки не з'явиться непередбачена необхідність повного списання запасу, що залишився.

У цьому випадку варто брати до уваги технологічні зміни, що плануються на майбутнє, для того, щоб поступово звести до нуля поточні запаси. Для цього остання партія виробів, що постачається, повинна мати об'єм, достатній для споживання лише в межах планового періоду, що передує моменту запланованого нововведення.

5) Якщо інтенсивність реалізації продукції протягом деякого інтервалу часу періоду планування впаде до нуля (закінчення контракту, зміна моделі виробу, порушення неперервності і т.ін.), то розмір останньої партії повинен бути таким, щоб компенсувати різницю між наявним запасом і загальним незадоволеним попитом. Для вирішення питання про те, чи економічно вигідним є виготовлення виробів у кількості, що задовольняє попит, який залишився, однією чи декількома партіями, потрібно використання моделей динамічного програмування.

3.5. Прийняття рішень щодо рівня резервного запасу

Таким чином, матеріальні запаси служать для того, щоб згладити безпосередню залежність між динамікою виробництва продукції та її споживанням. Наявність запасів дозволяє налагодити виробництво продукції оптимальними партіями, а також визначити оптимальні партії поставок по кожному продукту.

Матеріальний запас - це демпфер, що згладжує залежність споживача від можливих коливань випуску продукції, послаблює залежність виробничого процесу постачальника від нерівномірностей споживання цієї продукції споживачами; запаси згладжують залежність окремих цехів, робочих місць і т.ін. один від одного. Завдяки створенню запасів вирівнюються та здешевлюються виробничі процеси. Запаси роблять систему стійкішою, вони створюють необхідні передумови для забезпечення неперервності виробничого процесу.

З точки зору затримок функціонування системи важливим є не просто безумовне (100%), неперервне постачання продукції. При такому постачанні потрібно було б мати надзвичайно великі запаси. Виникає завдання визначення оптимального рівня запасів. Оптимальний рівень запасів складається з економічно оптимальної партії поставки плюс деякий страховий запас. Необхідність страхового запасу диктується випадковими явищами, які органічно наявні в будь-якій системі матеріально-технічного постачання.

Нехай k - витрати на оформлення замовлення, що мають місце щоразу при його розміщенні в припущенні, що витрати на зберігання одиниці замовлення *в* ***одиницю часу*** дорівнюють S. Припускається, що інтенсивність попиту (в одиницю часу) дорівнює μ.

Нехай υ - випадкова величина з заданим законом розподілу $f(\upsilon)$ і скінченим математичним сподіванням μ. Якщо величину партії поставки визначати за формулою Уілсона $q=\sqrt{\dfrac{2k\mu}{S}}$, то період повторення замовлень становить $T=\sqrt{\dfrac{2k}{\mu S}}$. Але оскільки попит є випадковою величиною, то приблизно в 50% випадків буде спостерігатися дефіцит. Для гарантії від випадкових коливань в попиті або інших непередбачених ситуацій в системі необхідно мати деякі додаткові страхові запаси. При достатньо великому рівні страхового запасу практично можна досягнути бездефіцитного постачання. Але при цьому можливі значні витрати від іммобілізації засобів в запасах. При малому страховому запасі можливі втрати від дефіциту. Позначимо через p ймовірність того, що потреби в інтервалі T перебільшать наявний запас, тобто ймовірність того, що величина фактичної потреби Q буде більша, ніж сума страхового запасу R і партії поставки q:

$$P(Q>q+R)=p. \tag{3.14}$$

Щоб знайти R, необхідно знати розподіл випадкової величини Q.

1. Нехай випадкова величина Q має нормальний розподіл з математичним сподіванням q і середнім квадратичним відхиленням σ. Як відомо, функція щільності ймовірності при цьому буде мати вигляд:

$$f(Q)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(Q-q)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.15}$$

В якості випадкової величини введемо відхилення випадкової змінної Q від її математичного сподівання q, вираженого в одиницях середньоквадратичного відхилення:

$$u=\frac{Q-q}{\sigma}. \tag{3.16}$$

Задача при цьому полягає в тому, щоб знайти таке значення u_p для якого справедлива рівність:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_p}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=p. \tag{3.17}$$

Значення u_p, яке задовольняє рівності (3.17), можна знайти з таблиць нормального розподілу. З рівнянь (3.15) і (3.16) випливає, що величина страхового запасу, відповідно до рівня обслуговування p, повинна задовольняти рівність:

$$R = Q - q = u_p \sigma. \tag{3.18}$$

Наприклад, при $u_p = 3$, тобто при $R = 3\sigma$ коефіцієнт ризику $p = 0{,}003$;

при $R = 2\sigma$; $p = 0{,}046$; при $R = \sigma$ $p = 0{,}317$.

Таким чином, при нормальному розподілі величину страхового запасу повністю визначають заданий коефіцієнт обслуговування, тобто ймовірність того, що заданий рівень запасу практично буде достатнім.

Враховуючи рівність (3.18), середній рівень запасу, який задовольняє потреби з ймовірністю $(1-p)$, знаходиться за формулою:

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{k\mu}{2S}} + u_p \sigma .$$

2. Нехай випадкова величина попиту розподілена за законом Пуасона. Функція щільності ймовірностей при розподілі за цим законом має вигляд:

$$f(Q) = \frac{e^{-q} q^{\sigma}}{Q!} .$$

Можна показати, що якщо $q \to \infty$, то розподіл за законом Пуасона зводиться до особливого виду нормального розподілу з математичним сподіванням q і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{q}$.

Тому величина страхового запасу становить:

$$R = u_p \sigma = u_p \sqrt{q} .$$

3. Розглянемо випадок рівномірного розподілу попиту. Як відомо, розподіл ймовірностей називається рівномірним, якщо на інтервалі, якому належать всі можливі значення випадкової величини, функція розподілу випадкової величини має стале значення. Нехай $Q_{\max}$ і $Q_{\min}$ відповідно максимальне і мінімальне значення випадкової величини Q. Так як

$$F(Q)(Q_{\max} - Q_{\min}) = 1, \quad \text{то} \quad F(Q) = \frac{1}{Q_{\max} - Q_{\min}} .$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини дорівнює:

$$q=\int_{-\infty}^{+\infty} Qf(Q)dQ=\frac{1}{2}(Q_{\max}-Q_{\min}).$$

Величина страхового запасу визначається з рівності (3.14). Знайдемо величину страхового запасу. Нехай Q_p - величина споживання з заданою ймовірнісно p. Так як p - це ймовірність того, що створений страховий запас R буде недостатнім, то:

$$Qq=(1-p)(Q_{\max}-Q_{\min})$$

і, відповідно,

$$R=Qq-q=(1-p)(Q_{\max}-Q_{\min})-\frac{1}{2}(Q_{\max}-Q_{\min})=\left(\frac{1}{2}-p\right)(Q_{\max}-Q_{\min}),$$

тобто при рівномірному розподілі ймовірностей розмір страхового запасу прямо пропорційний різниці між максимально і мінімально можливою потребою.

Встановимо зв'язок між коефіцієнтом ризику p і окремими затримками функціонування системи. Позначимо через S окремі затримки. Мінімізуємо математичне сподівання сумарних затримок, пов'язаних з зберіганням запасу і можливими втратами від дефіциту:

$$L=S\int_{\infty}^{R}[R-(Q-q)]f(Q)dQ+d\int_{R}^{\infty}[(Q-q)-R]f(Q)dQ.$$

З умови оптимальності значення R:

$$\frac{\partial L}{\partial R}=S\int_{-\infty}^{R}f(Q)dQ-d\int_{R}^{\infty}f(Q)dQ=0,$$

знаходимо:

$$\frac{\int_{-\infty}^{R}f(Q)dQ}{\int_{R}^{\infty}f(Q)dQ}=\frac{d}{S}. \tag{3.19}$$

Відзначимо, що $\int_{R}^{\infty}f(Q)dQ$ - це ймовірність того, що

$Q-q>R$, але $p(Q-q>R)=p$, отже $\int_{R}^{\infty}f(Q)dQ=1-p$. Таким чином, з рівняння (3.19) отримаємо:

$$\frac{1-p}{p}=\frac{d}{S}\text{, звідси } p=\frac{S}{d+S}. \qquad (3.20)$$

Знаючи d і S, з формули (3.20) можна визначити припустимий коефіцієнт ризику. У свою чергу, вираз (3.20) може застосовуватись для оцінки втрат від дефіциту.

Рішення щодо подачі замовлення на поповнення запасів приймається системою управління нижнього рівня і залежить від результатів порівняння поточного стану запасу (Наявний запас + Замовлений обсяг продукції -Заявки на замовлення) з максимальним значенням розумних потреб на інтервалі виконання, що зберігається як точка замовлення на нижньому рівні інформаційної системи. Відлік часу виконання постачання виробу в запаси (час випередження) починається з моменту одержання заявки, що зменшує наявний запас виробу нижче від точки замовлення. Час постачання включає власне час опрацювання замовлення, час, необхідний постачальнику на виконання замовлення, і деякий необхідний надалі час на одержання матеріалів і передачу їх для використання.

Максимальний розумний попит є сумою прогнозованого попиту протягом часу попередження і резервного запасу. Резервний запас дорівнює добутку коефіцієнта резервного запасу на стандартне відхилення помилок прогнозування попиту протягом часу виконання замовлення на поповнення запасу, тобто $k\sigma$.

Якщо час попередження відомий з достатнім ступенем точності, то величина стандартного відхилення σ може бути оцінена з урахуванням помилок прогнозування попиту. Якщо час випередження змінюється непередбачено, то для порівняння розподілу цього часу з розподілом помилок прогнозування небезпечно використовувати будь-яку модель. Результативний розподіл дуже чутливий стосовно припущень щодо статистичної залежності (часто припускають незалежність), що існує між цими розподілами.

Між цими розподілами існує позитивна або негативна кореляція і реальні дані практично не дають основ для припущення про незалежність цих розподілів. Інтервали випередження для продукції різного типу, природно, різні. Перше завдання полягає в тому, щоб знайти причину розходжень і, якщо можливо, усунути її. Багато компаній домовляються з постачальником про конкретні дати постачань, завдяки чому час попередження стає відомим, що, у свою чергу, дозволяє визначити необхідний рівень резервного запасу.

Приклад 3. *Стохастична модель управління запасами*

Підприємство купує агрегат з запасними блоками до нього. Вартість одного блока становить 5 грошових одиниць. У випадку виходу з ладу агрегату внаслідок поломки блоку, який відсутній в запасі, простій агрегату та раптове замовлення нового блока до нього становитимуть 100 грошових одиниць. Емпіричний розподіл агрегатів за кількістю блоків, що потребуватимуть заміну, встановлений та відображений в таблиці.

Число замінених блоків	0	1	2	3	4	5	6
Статистична ймовірність (частка агрегатів) $p(r)$, для яких потрібно було замінити r блоків	0,90	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

Розв'язання. За умовою $c_2 = 5,\ c_3 = 100$. Обчислимо щільність збитків внаслідок незадоволеного попиту $\eta = \dfrac{c_3}{c_2 + c_3} = \dfrac{100}{100+5} = 0{,}952 \cdot$

На основі співвідношення для інтегральної функції розподілу $F(s) = p(r < s)$ розрахуємо значення функції розподілу попиту та зведемо їх в таблицю:

S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**>6**
r	0	1	2	3	4	5	6	>6
$F(s)$	0,00	0,00	0,90	0,95	0,97	0,98	0,99	1,00

Оскільки розподіл дискретний, для визначення оптимального рівня запасу використаємо співвідношення $F(s^*) < \eta < F(s^* + 1)$, $F(3) < 0.952 < F(4)$, і, таким чином, оптимальний рівень запасу становитиме $s^* = 3$.

Приклад 4. ***Стохастична модель управління запасами.***

Розв'язати задачу з прикладу 16.1 за умови, що попит є випадковим, але розподілений за неперервним експоненційним законом з інтегральною функцією розподілу $F(r) = 1 - e^{-\lambda r}$ зі значенням $\lambda = 0{,}8$.

Розв'язання. Оптимальну кількість запасних блоків визначимо зі співвідношення для неперервного розподілу $F(s^*) = \eta = 1 - e^{-\lambda s^*}$, звідки:

$$s^* = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - \eta) = -\frac{1}{0{,}8} ln(1 - 0{,}952) = \frac{3{,}036}{0{,}98} = 3{,}795 \approx 4 .$$

Приклад 5. ***Стохастична модель з неперервною витратою запасу***

Вироби, що є в коморі, витрачаються рівномірно протягом місяця. Затрати на зберігання одного виробу становлять 5 грошових одиниць, а штраф за дефіцит одного виробу становить 100 грошових одиниць.

На основі вивчення попиту був побудований розподіл кількості виробів, що споживаються за місяць, наведений у таблиці:

Попит r	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**>=6**
Статистична вірогідість $p(r)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,0

Необхідно визначити оптимальний місячний запас в коморі.

Розв'язання. Для визначення оптимального запасу розрахуємо значення функції $L(r)$ і зведемо результати в таблицю:

s	r	$p(r)$	$\frac{p(r)}{r}$	$\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	$\left(s-\frac{1}{2}\right)\sum_{r=s}^{\infty}\frac{p(r)}{r}$	$F(s)$	$L(s)$
0	0	0,1	-	-	-	0,0	-
1	1	0,2	0,200	0,445	0,2225	0,1	0,3225
2	2	0,2	0,100	0,245	0,3675	0,3	0,6675
3	3	0,3	0,100	0,145	0,3625	0,5	0,8625
4	4	0,1	0,025	0,045	0,1575	0,8	0,9575
5	5	0,1	0,020	0,020	0,0900	0,9	0,9900
>=6	>=6	0,0	0,000	0,000	0,0000	1,0	1,0000

Оптимальний рівень запасу відповідає $s^{*}=3$, тому що $L(3)<0{,}952<L(4)$.

Приклад 6. ***Стохастична модель з фіксованим часом затримки поставок***

Товар, що швидко псується, замовляється крамницею щоденно, а надходить 7 днів після замовлення (тобто замовлення робиться за тиждень наперед). У момент чергового замовлення запас товару склав у вартісному еквіваленті 10 грошових одиниць. Товар, що продається в день виготовлення, дає дохід 0,95 грошової одиниці, а не проданий в цей день товар може бути реалізованим зі збитком в 0,1 грошову одиницю.

У результаті опрацювання дослідних даних отримано наступний розподіл попиту на товар, наведений у таблиці:

r	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
$p(r)$	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,06	0,08	0,09	0,12	0,13	0,10
r	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	>200
$p(r)$	0,08	0,05	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00

Необхідно визначити оптимальний об’єм замовленого товару q_7 на сьомий день після замовлення.

Розв'язання. Щільність збитків, зумовлена дефіцитом товару становить:

$$\eta = \frac{c_3}{c_2 + c_3} = \frac{0{,}95}{0{,}10 + 0{,}95} = 0{,}905.$$

Умова $F(s^*) < \eta < F(s^* + 1)$ задовільняється у випадку $F(120) < 0{,}905 < F(130)$, тобто $s^* = 120$. Таким чином, оптимальний запас товару за 7 днів повинен бути на суму 120 грошових одиниць, звідки отримуємо оптимальний об'єм замовленого товару на сьомий день, що становить:

$$q_7 = s^* - \left(s_0 + \sum_{i=1}^{6} q_i \right) =$$

$$= 120 - (10 + (10 + 20 + 10 + 10 + 20 + 10)) = 30 \text{ грош.од.}$$

У стохастичних моделях управління запасами попит є випадковою величиною, що описується законами теорії вірогідностей. Врахування випадковості суттєво ускладнює аналіз та отримання рішень на таких моделях, а тому аналітичні рішення можливо отримати лише для найпростіших випадків. Якщо ж система має складну структуру з багатьма видами продукції та коморами, то єдиним способом її аналізу виявляється імітаційне моделювання.

При необхідності поповнити запаси продукції розв'язується задача визначення розміру замовлення (чи розміру партії) продукції. Відновлення рівня запасів може здійснюватися або шляхом виконання замовлення на виготовлення деякого фіксованого обсягу продукції, зареєстрованого системою нижнього рівня, або шляхом виконання замовлення на виготовлення певного обсягу продукції. Правила розробляються, зазвичай, на другому рівні трирівневої системи управління запасами для визначення економічно обґрунтованого оптимального розміру замовлення. Ці правила використовуються при визначенні запланованого чи максимального рівня запасу для конкретного типу чи типів продукції. Різні підходи до розв'язання задачі визначення економічного розміру замовлення (партії продукції) базуються на тих чи інших можливих припущеннях щодо таких показників, як спосіб постачання замовленої продукції, інтенсивність реалізації продукції, витрати на освоєння виробництва нової продукції, собівартість одиниці продукції і поточні витрати на збереження запасів. Спочатку для кожного з перерахованих факторів робляться найпростіші припущення, а потім розглядаються умови, за яких можливі припущення виявляються кращими, ніж первісне. Оскільки вважається, що припущення щодо одного з факторів не пов'язані з припущеннями щодо інших факторів, то можливі сотні їх комбінацій, що приводять до різних правил розв'язку. З такої множини правил можна обрати найприйнятніше, однак доцільність того чи іншого вибору визначається з урахуванням конкретної ситуації, у якій ці правила будуть реалізовані.

Матеріальні запаси служать для того, щоб згладити безпосередню залежність між динамікою виробництва продукції та її споживанням. Наявність запасів дозволяє налагодити виробництво продукції оптимальними партіями, а також визначити оптимальні партії поставок по кожному продукту. Матеріальний запас - це демпфер, що згладжує залежність споживача від можливих коливань випуску продукції, послаблює залежність виробничого процесу постачальника від нерівномірностей споживання цієї продукції споживачами; запаси згладжують залежності окремих цехів, робочих місць і т.ін. один від одного. Завдяки створенню запасів вирівнюються та здешевлюються виробничі процеси. Запаси роблять систему стійкішою, вони створюють необхідні передумови для забезпечення неперервності виробничого процесу. Оптимальний рівень запасів складається з економічно оптимальної партії поставки плюс деякий страховий запас. Необхідність страхового запасу диктується випадковими явищами, які органічно наявні в будь-якій системі матеріально-технічного постачання. Час постачання включає власне час опрацювання замовлення, час, необхідний постачальнику на виконання замовлення, і деякий необхідний надалі час на одержання матеріалів і передачу їх для використання. Максимальний розумний попит є сумою прогнозованого попиту протягом часу попередження і резервного запасу. Резервний запас дорівнює добутку коефіцієнта резервного запасу на стандартне відхилення помилок прогнозування попиту протягом часу виконання замовлення на поповнення запасу. Оскільки кожне правило розв'язку при подальшому уточненні постановки задачі може пов'язуватися з досягненням множини цілей, то при оцінці можливих правил варто враховувати побічні ефекти, такі як середній запас у системі загалом, число рішень з розподілу ресурсів протягом року, очікуване число випадків дефіциту запасів і величина цього дефіциту.

Питання для самоконтролю

1. Які елементи задачі управління запасами ви знаєте?
2. Які бувають витрати на збереження?
3. Що таке вартість поставки?
4. Які види штрафів ви знаєте?
5. На які змінні накладаються обмеження в ЗУЗ?
6. Що таке рівняння загальної вартості?

7. Як визначається оптимальний обсяг замовлення?
8. Що таке рівень і інтервал повторного замовлення?
9. Сформулюйте класичне завдання управління запасами?
10. Що таке стохастичні моделі управління запасами?
11. Як визначається економічно вигідний розмір партії?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Магазин продає близько 600+N упаковок пакетного цукру на рік. Протягом року величина попиту розподіляється рівномірно. Одна упаковка цукру коштує 3.3 грн. Власник магазину повинен заплатити за одне замовлення 16 грн. Замовлення від постачальника доставляється за 12 робочих днів (робочий тиждень – 6 днів). Витрати на збереження складають 22% середньорічної вартості запасів. Скільки упаковок повинен замовляти власник кожного разу, якщо його мета полягає в мінімізації загальної вартості запасів? Визначити, з якою частотою слід здійснювати подачу замовлень і рівень повторного замовлення, якщо вважати, що магазин працює 310 – N днів на рік.

N - номер студента у списку групи.

Задача 2

Цукерня торгує тортами власного виготовлення. Кожен кілограм торта приносить 20 грошових одиниць прибутку. Наступного дня торти продаються зі знижкою в 2 грошові одиниці. У результаті опрацювання статистичних даних отримано наступний розподіл попиту на торти, заданий таблицею:

Попит r	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**>=60**
Статистична вірогідність $p(r)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1	0,0

Визначити, який денний виробіток тортів буде оптимальним.

Задача 3

Розв'яжіть завдання 16.1 за умови, що попит на торти є випадковою величиною, що розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0{,}9$.

ЧАСТИНА 2. МОДЕЛЮВАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

РОЗДІЛ 4. МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ФІРМОЮ

4.1. Теорія однoресурсної фірми

Нехай фірма виробляє один вид продукції у кількості y, для чого використовує тільки один ресурс x. Фірма цілком характеризується своєю виробничою функцією $y = f(x)$, яка виражає залежність обсягу продукції, що випускається від обсягу витраченого ресурсу x.

Виробнича функція (ВФ) – це функція, незалежна змінна x якої набуває значень обсягу ресурсу, який використовується у виробництві (фактор виробництва), а залежна змінна у – значення обсягу продукції, яку випускає дане підприємство, фірма або галузь. Позначення виробничої функції:

$$y = f(x). \tag{4.1}$$

Тут $x(x > 0)$ і $y(y > 0)$ – числові величини, тобто $y = f(x)$ є функцією однієї змінної x. У зв'язку з цим виробничу функцію (2.24) називають *однoресурсною*, або *однофакторною*. Її область визначення – множина невід'ємних дійсних чисел. Запис $y = f(x)$ означає: якщо ресурс витрачається або використовується в кількості x одиниць, то продукція випускається в кількості $y = f(x)$ одиниць. Знак функції f є характеристикою виробничої функції, яка перетворює ресурс у випуск продукції, і пов'язує між собою незалежну змінну x та залежну змінну y.

Далі вважатимемо, що виробнича функція двічі диференційовна й задовольняє дві умови.

У м о в а 1. В області D, $D \subset D(f)$ визначення функції $y = f(x)$, яку називатимемо *економічною областю D,* дана функція неспадна, тобто збільшення обсягу ресурсу не спричинює зменшення випуску продукції.

Математично це означає, що для двох довільних точок x_1, $x_2 \in D$ таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$.

Отже, в області D похідна $f'(x)$ невід'ємна, тобто $f'(x) \ge 0$. Похідну $f'(x)$ називають *граничним продуктом.*

Ум о в а 2. Існує підмножина E економічної області D, $E \subset D$, така, що для всіх $x \in E : f''(x) \le 0$.

Зупинимося на економічному змісті цих двох умов. Умова 1 стверджує, що виробнича функція – не якась абстрактна, вигадана математиком-теоретиком. Вона відображує економічно важливе й водночас тривіальне твердження: в розумній економіці збільшення витрат ресурсу не може спричинити зменшення випуску продукції.

Умову 2 в економіці називають ***законом спадної доходності:*** *зі збільшенням обсягу ресурсу з деякого моменту (при вході в область Е) починає зменшуватися граничний продукт.*

Розглянемо дії фірми. Нехай p – ціна одиниці ресурсу, а w – ціна одиниці продукції, що випускається. Отже, прибуток фірми $P = P(x)$ є функцією від обсягу ресурсу x (і цін, але вони вважаються сталими). Тоді $P(x) = wf(x) - px$.

Завдання одноресурсної фірми

Розглянемо ***задачу фірми:*** *потрібно знайти максимальне значення прибутку – функції $P(x)$ за умови, що $x \geq 0$,* тобто:

$$P(x) \to max, \; x \geq 0. \tag{4.2}$$

Обчислимо похідну функції $P(x)$ та прирівняємо її до нуля:

$$P'(x) = wf'(x) - p, \; wf'(x) - p = 0,$$

звідки

$$f'(x^*) = \frac{p}{w}. \tag{4.3}$$

Очевидно, що обсяг ресурсу додатний, а отже, точка x^*, що задається формулою (4.3), є точкою екстремуму. Оскільки ми припустили, що $f''(x) \leq 0$, то це точка максимуму.

Точку x^*, *яка* визначається зі співвідношення (4.3), називають *оптимальним разв 'язком задачі фірми.*

Розглянемо економічний зміст співвідношення (4.3). Нагадаємо, що $f'(x)$ – граничний продукт, а $wf'(x)$ – це вартість граничного продукту, додатково виробленого з одиниці ресурсу. Але вартість одиниці ресурсу дорівнює p, тобто дістаємо рівновагу: можна залучити у виробництво додаткову одиницю ресурсу, витративши на її закупівлю p грош. од., але в результаті виграшу не буде, оскільки після переробки ресурсу й реалізації продукції одержимо стільки ж грошей, скільки витратили на придбання одиниці ресурсу. Отже, оптимальна точка, що задається співвідношенням (4.3), є точкою рівноваги: вже неможливо вижати з ресурсів більше, ніж витрачено на їх закупівлю.

Очевидно, нарощування випуску продукції фірмою відбувалося поступово: спочатку вартість граничного продукту була вищою за закупівельну ціну ресурсів, що потрібні для його виробництва. Нарощування обсягу виробництва триває доти, доки починає виконуватися співвідношення (4.3): рівність вартості граничного продукту та закупівельної ціни ресурсу, потрібного для його виробництва.

За певних умов, накладених на виробничу функцію, оптимальний розв'язок задачі фірми, що визначається співвідношенням (4.3), єдиний для всіх *p* і *w*.

Приклад. Обсяг видобування щебеня у (т/год) залежить від кількості праці х (людино-год): у $=6\sqrt{x}$. Ціна щебеня – 40 грн./т, заробітна плата робітника – 30 грн./год. Крім заробітної плати, інші витрати не враховуються. Завдання: визначити оптимальну кількість праці (кількість робітників).

За кількості робітників x прибуток фірми:

$$P(x) = wy - px = 40\cdot 6\sqrt{x} - 30x = 240\sqrt{x} - 30x = 30\left(8\sqrt{x} - x\right).$$

Отже, $P(x) = 30\left(8\sqrt{x} - x\right)$.

Знайдемо похідну функції прибутку:

$$P'(x) = 30\left(8\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) = 30\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right)$$

та стаціонарні точки з умови: $P'(x) = 0$, тобто $\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1\right) = 0$, звідки $x^* = 16$.

Знайдемо другу похідну:

$$P''(x) = 30\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^3}} = -60\frac{1}{x\sqrt{x}}$$

та її значення в стаціонарній точці x^*:

$$P''(16) = -60\frac{1}{16\sqrt{16}} = -60\frac{1}{16\cdot 4} = -\frac{15}{16} < 0.$$

Тому $x^* = 16$ – точка максимуму.

Оптимальні ціна, граничні витрати та обсяг виробництва фірми

Нехай монополіст, знаючи (наприклад, із маркетингових досліджень) функцію попиту на свою продукцію, вирішує, скільки її виробляти й за якою ціною продавати. Якщо монополіст установить достатньо високу ціну, то споживачі за певний період придбають у нього не дуже багато продукції. Якщо він вироблятиме більше, то йому доведеться знизити ціну, аби продати всю продукцію за певний період часу. При цьому прибуток збільшиться за рахунок зростання обсягу продажу (доход) і водночас зменшиться через зменшення ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що буде більше: доход чи витрати. Як же монополіст може визначити оптимальний обсяг випуску продукції? Для цього він має знати залежність прибутку (якщо враховувати витрати випуску) від обсягу продукції.

Фірма виробляє продукцію в обсязі q. Нехай задано функцію доходу $R = R(q)$ й функцію витрат $C = C(q)$ фірми. Тоді функція її прибутку від випуску продукції має вигляд:

$$P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q).$$

Визначимо, за якого обсягу продукції прибуток фірми буде максимальним.

Завдання вибору фірмою оптимального обсягу виробництва

Зазначене завдання розглянемо як приклад, з якого буде видно, наскільки важливе дослідження функцій для прийняття оптимальних рішень.

Аби одержати максимальний прибуток фірма має випускати продукцію обсягом q_0, так, щоб значення $P(q_0)$ було максимальним. Практично обсяг продукції $q \in [0;Q]$, де Q – це верхня межа обсягу продукції, який може випускати фірма. Математично завдання зводиться до знаходження максимуму функції прибутку $P = P(q)$ на відрізку $[0;Q]$. Оскільки теоретично функція прибутку $P = P(q)$ може досягати максимального значення й на кінцях проміжку при $q = 0$ і $q = Q$, то обидві ці ситуації, коли фірма не випускає нічого ($q = 0$) або випускає продукцію на межі своїх виробничих можливостей $q = Q$, є крайніми. Зараз ми не розглядатимемо їх і припустимо, що функція прибутку досягає максимуму в точці $q_0 \in (0;Q)$. Отже, нехай виконуються такі умови:

1) функції $R = R(q)$ і $C = C(q)$ визначені й диференційовні на відрізку $[0;Q]$;
2) функція прибутку досягає максимуму в деякій точці q_0 ($q_0 \neq 0$ і $q_0 \neq Q$).

У випадку, коли максимум прибутку $P(q_0) > 0$, умова $q_0 \neq 0$ природно виконується, оскільки $P(0) = 0$ (немає випуску – немає доходу, немає доходу – немає прибутку).

Якщо виконуються обидві умови, то функція $P = P(q)$ диференційовна й на відрізку $[0;Q]$ має максимум у точці $q_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Ферма $P'(q_0) = 0$. Оскільки $P'(q) = R'(q) - C'(q)$, то в точці $q = q_0$ дістаємо рівність:

$$R'(q_0) = C'(q_0). \tag{4.4}$$

Пригадавши, що похідна функції витрат C' виражає граничні витрати, а похідна R' – граничний дохід, то, використовуючи цю термінологію, дістанемо ***базовий економічний принцип***: *оптимальний продуктивний рівень фірма досягає, коли граничний річний дохід дорівнює граничним витратам*.

В економічній теорії рівність (4.4) визначає правило, за яким *фірма, яка максимізує свій прибуток, установлює обсяг виробництва таким чином, що граничний дохід дорівнює граничним витратам.*

У випадку, коли обсяг виробництва q не впливає на ціну продукції p, маємо $R(q) = pq$, $R'(q) = p$. Рівність (4.4) набуває вигляду:

$$p = C'(q_0). \tag{4.5}$$

Приклад. Знайдемо оптимальний обсяг продукції фірми, якщо відомі ціна одиниці продукції $p = 15$ грош. од. і функція витрат $C(q) = q^3 + 3q$.

Запишемо функцію прибутку фірми в разі виробництва q одиниць продукції:

$$P(q) = 15q - q^3 - 3q = q(12 - q^2).$$

Очевидно, $P(q) \geq 0$, якщо $q \in \left[0; \sqrt{12}\right]$. Оскільки $P = P(q)$ – неперервна функція, то на відрізку $\left[0; \sqrt{12}\right]$, у деякій точці q_0, вона набуває свого найбільшого значення. Використовуючи рівність (4.5), дістанемо:

$$15 = C'(q_0) = 3(q_0)^2 + 3.$$

Звідси $q_0 = 2$.

Оскільки фірма намагається одержати максимальний прибуток, то вона випускатиме дві одиниці продукції. Фактично ми з'ясували, що за ціни $p = 15$ грош. од. фірмі вигідно випускати для продажу дві одиниці продукції.

Оскільки річний дохід і прибуток фірми залежать від її місця на ринку, то слід розглянути випадок монополії, коли фірма повністю забезпечує потребу ринку в даному виді продукції. У цій ситуації ціна визначається функцією попиту. Інакше кажучи, ціна товару, за якою споживачі купують його, залежить від попиту $p = p(q)$, де q – стала. Якщо відома функція ціни $p = p(q)$, то функція прибутку $P = qp(q) - C(q)$, й необхідною умовою її максимуму є $P'(q) = 0$, яку можна записати у вигляді:

$$qp'(q) + p(q) - C'(q) = 0. \tag{4.6}$$

У кожному окремому випадкові рівність (4.6) можна використовувати для знаходження максимуму функції прибутку, але слід зауважити, що не всі критичні точки функції прибутку $P = P(q)$, де $q \in [0; Q]$, є точками максимуму, оскільки умова (4.6) є необхідною, але не достатньою.

Розглянемо тепер у загальнішому випадку, коли ціна продукції p є диференційованою функцією $p = p(q)$ від обсягу випуску продукції q. Обчислимо похідну функції доходу фірми $R(q) = p(q)q$. Враховуючи, що еластичність ціни за випуском $E_q(p)$ визначається як $E_q(p)=\frac{q}{p}\cdot\frac{dp}{dq}$, знаходимо:

$$R'(q) = qp'(q) + p(q) = p(q)(E_q(p)+1).$$

Тоді рівність (4.4) запишемо у вигляді $p(q_0)(E_q(p)+1)=C'(q_0)$, звідки дістанемо рівняння для ціни:

$$p(q_0)=\frac{C'(q_0)}{E_q(p)+1}. \tag{4.7}$$

Якщо фірма займає суттєву частку ринку, то збільшення її випуску спричиняє насиченню ринку й падінню ціни. У цьому разі $E_q(p)<0$ і з рівності (4.7) випливає, що ціна $p(q_0)$ більша за граничні витрати $C'(q_0)$.

Приклад. Розглянемо задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функцію прибутку якої можна змоделювати залежністю: $P(q)=R(q)-C(q)=q^2-8q+10$.

Знайдемо похідну: $P'(q)=2q-8$.

Перевіримо необхідні умови локального екстремуму. Прирівнюємо похідну до нуля; $P'(q)=0, 2q-8=0$. Тоді дістаємо $q_0=4$.

Щоб визначити, чи є обсяг випуску $q=4$ оптимальним для фірми, треба проаналізувати характер зміни знака похідної при переході через точку q_0 (тобто перевірити достатні умови локального екстремуму): при $q<q_0$ маємо $P'(q)<0$, і функція прибутку спадає; при $q<q_0$ маємо $P'(q)>0$ і функція прибутку зростає. Отже, в точці $q_0=4$ функція прибутку набуває мінімального значення, і обсяг випуску не є оптимальним.

Яким же має бути оптимальний обсяг випуску фірми? Відповісти на це запитання дає змогу додаткове дослідження виробничих потужностей фірми. Якщо фірма не може виробляти за період , що розглядається більш як 8 одиниць продукції, то оптимальне рішення для неї – взагалі нічого не виробляти, а здавати в оренду приміщення або обладнання й одержувати дохід. Якщо фірма може виробляти більш як 8 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для неї буде випуск на межі своїх виробничих можливостей.

Приклад. Фірма реалізує свою продукцію за ціною р за одиницю, а витрати виробництва при цьому задаються кубічною залежністю $C(x)=ax+\lambda x^3 (a<p, \lambda>0)$. Знайти оптимальний для фірми обсяг виробництва продукції й максимальний прибуток.

Позначимо обсяг продукції через *x*. Запишемо функцію прибутку $P(x) = R(x) - C(x)$, де $R(x)$ – дохід від реалізації продукції.

У нашому випадкові $P(x) = px - (ax + \lambda x^3)$.

Знаходимо похідну функції прибутку: $P'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2)$.

Знаходимо критичні точки першого роду. Для цього прирівняємо похідну до нуля: $P'(x) = 0$. Тоді $(p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, звідки $3\lambda x^2 = p - a$.

Отже, $x^2 = \dfrac{p-a}{3\lambda}$ і $x_1 = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$, причому $x_2 = -\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}} < 0$ – сторонній розв'язок.

Знаходимо $P''(x) = -6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$.

Дістанемо $P'' = \left(\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}} < 0$ при всіх x.

Отже, при $x = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток буде максимальним. Знаходимо його:

$$P_{\max} = P\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

4.2. Динамічні завдання однoресурсної фірми

Реальні економічні процеси відбуваються в поточному часі. Тому велика кількість задач однoресурсної фірми в якості однієї з незалежних змінних містять час, що приводить до необхідності вирішувати динамічні завдання розвитку фірми. Принцип побудови динамічних моделей і одержання економічної інформації на їх основі найбільш доцільно розглянути на конкретних прикладах. Основні ідеї цього пункту будуть розвинуті в розділах 5 і 7.

Приклад 1. Модель рівноважного зростання випуску продукції

Нехай продукція деякої фірми продається за фіксованою ціною p. Позначимо через $q(t)$ обсяг продукції, реалізованої в момент часу t. Тоді на цей момент часу дістанемо дохід $R(t) = pq(t)$. Припустимо, що частина доходу використовується на інвестиції у виробництво реалізованої продукції, тобто

$$I(t) = mpq(t), \tag{4.8}$$

де m – норма інвестицій (стале число), причому $0 < m < 1$.

Якщо виходити з припущення про ненасичення ринку (тобто про повну реалізацію продукції, що виробляється), то в результаті розширення виробництва буде одержано приріст доходу, частина якого знову використовуватиметься для розширення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску продукції (акселерації), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$q'(t) = lI(t), \tag{4.9}$$

де $1/l$ – норма акселерації. Норма акселерації визначається технологією виробництва. Підставивши (4.8) у (4.9), дістанемо

$$q' = lmpq(t),$$

або

$$q' = kq(t), \tag{4.10}$$

де $k = lmp$.

Рівняння (4.10) – це диференціальне рівняння першого порядку з відокремленими змінними, загальний розв'язок якого $q = Ce^{kt}$, де C – довільна стала.

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ обсяг продукції становить q_0. Тоді $q_0 = Ce^{kt_0}$.

Виразимо сталу: $C = q_0 e^{-kt_0}$ і підставимо її значення в загальний розв'язок. Дістанемо частинний розв'язок рівняння (4.9), тобто розв'язок задачі Коші:

$$q_0 = q_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{4.11}$$

Зазначимо, що ті самі математичні моделі можуть пояснювати різні явища. Так, рівняння (4.11) описує також динаміку зростання цін за постійної інфляції, процес розмноження бактерій, процес радіоактивного розпаду.

Приклад 2. Модель зростання випуску продукції в умовах конкуренції

Припустимо, що деяка фірма випускає продукцію й продає її за ціною p за одиницю. Позначимо через $q = q(t)$ обсяг продукції, яка реалізована в момент часу t. Нехай ціна залежить від обсягу продукції. Тоді $p = p(t)$ – спадна функція, тобто зі збільшенням обсягу випуску продукції її ціна на ринку зменшується. Це означає, що $\dfrac{dp}{dq} < 0$. У момент часу t фірма одержує дохід $R(t) = p(q(t))q(t)$. Якщо частина доходу використовується на інвестиції $I(t)$ у виробництво реалізованої продукції, то за умови ненасиченості ринку швидкість випуску продукції пропорційна збільшенню інвестицій, тобто $q' = kq$, $K = lmp$, де m - це норма інвестицій, $1/l$ – норма акселерації, p – стала ціна.

У випадку, коли ціна $p = p(q)$, дістанемо диференціальне рівняння першого порядку відносно q з відокремленими змінними,

$$q' = \alpha p(q) q, \tag{4.12}$$

де $\alpha = lm$. Оскільки всі співмножники в правій частині цього рівняння додатні, то й $q' > 0$, тобто функція $q = q(t)$ зростаюча. Характер зростання функції визначається її другою похідною. Диференціюючи рівняння (4.12), дістанемо:

$$q'' = \alpha\left(q'p(q) + q\frac{dp}{dq}q'\right) = \alpha q'\left(p + \frac{dp}{dq}q\right). \tag{4.13}$$

Оскільки еластичність попиту $E_p(q) = \dfrac{dq}{dp}\dfrac{p}{q}$, то рівність (4.13) можна записати у вигляді:

$$q'' = \alpha q' p\left(1 + \frac{dp}{dq}\frac{q}{p}\right) = \alpha q' p\left(1 + \frac{1}{E_p(q)}\right).$$

Якщо врахувати, що $\dfrac{dq}{dp} < 0$, а отже, й $E_p(q) < 0$, остаточно дістанемо:

$$q'' = \alpha q' p\left(1 - \frac{1}{\left|E_p(q)\right|}\right). \tag{4.14}$$

З рівності (4.14) випливає, що за еластичного попиту, тобто коли $\left|E_p(q)\right| > 1$, $q'' > 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрям опуклості вниз, а це означає прогресивне зростання; за нееластичного попиту, тобто при $\left|E_p(q)\right| < 1$, $q'' < 0$, графік функції $q = q(t)$ має напрям опуклості вгору, що означає уповільнене зростання (насичення).

Розглянемо залежність ціни від попиту $p = p(q)$ у вигляді лінійної функції:

$$p(q) = a - bq,\ a > 0,\ b > 0. \tag{4.15}$$

З (4.15) зрозуміло, що $\dfrac{1}{E_p(q)} = \dfrac{dp}{dq}\dfrac{q}{p} = -b\dfrac{q}{p}$.

Тоді рівняння (4.12) і (4.14) набирають вигляду

$$q' = \alpha(a - bq)q \tag{4.16}$$

і

$$q'' = \alpha q'(a - 2bq), \tag{4.17}$$

відповідно.

Зі співвідношень (4.16) і (4.17) дістанемо, що $q' = 0$ при $q = 0$ і $q = \dfrac{a}{b}$, $q'' > 0$ при $q < \dfrac{a}{2b}$, $q'' < 0$ при $q > \dfrac{a}{2b}$. Отже, $q = \dfrac{a}{2b}$ – точка перегину графіка функції $q = q(t)$ (див. рис. 4.1).

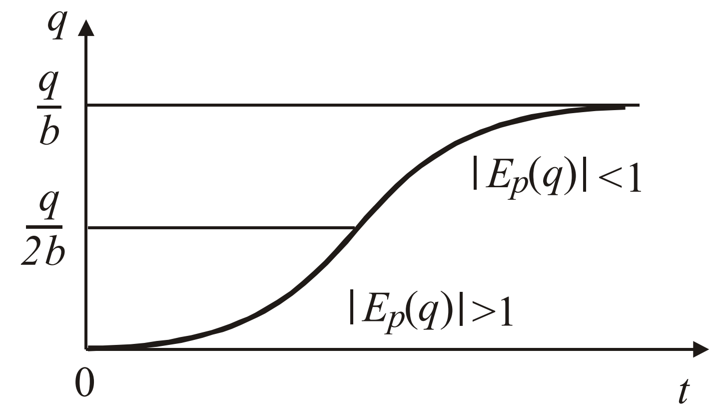


Рис. 4.1. *Графік логістичної кривої*

Графік функції $q = q(t)$ – однієї з інтегральних кривих диференціального рівняння (4.12) – називають ***логістичною кривою***.

Приклад 3. Рух фондів

Нехай K – величина фондів у натуральному або вартісному вираженні, μ – коефіцієнт вибуття фондів. Вибуття призводить до зменшення фондів за рік на величину μK. Якщо вважати, що вибуття фондів відбувається рівномірно, то за час Δt фонди зменшуються на $\mu K \Delta t$. З іншого боку, інвестиції приводять до збільшення фондів. Припустимо, що інвестиції в розмірі *I* за рік дадуть збільшення фондів на величину ρI, де ρ, *I* – константи. Тоді за час Δt інвестиції при їхньому рівномірному вкладенні дадуть збільшення фондів на величину $\rho I \Delta t$.

Якщо врахувати попередні припущення, маємо:

$$K(t + \Delta t) = K(t) - \mu K \Delta t + \rho I \Delta t \Rightarrow$$

$$K(t + \Delta t) - K(t) + \mu K \Delta t = \rho I \Delta t.$$

Розділивши ліву й праву частини на Δt, одержуємо:

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} + \mu K = \rho I. \qquad (4.18)$$

Переходячи до межі при $\Delta t \to 0$, одержимо $\dfrac{dK}{dt} + \mu K = \rho I$.

Розв'язок. Будемо шукати розв'язок отриманого лінійного диференціального рівняння у вигляді: $K(t) = K_{о.о.} + K_{ч.н.}$, де $K_{о.о.}$ –

загальний розв'язок однорідного рівняння $\frac{dK}{dt}+\mu K=0$, а $K_{ч.н.}$ – деякий частиний розв'язок неоднорідного рівняння.

Розділимо змінні й проінтегруємо, тоді одержимо:

$$\frac{dK}{K}=-\mu dt \Rightarrow \ln K=-\mu t+\ln C\text{, звідки } K_{o.o.}=Ce^{-\mu t}.$$

З урахуванням раніше наведених зауважень частковий розв'язок вибираємо у вигляді $K_{ч.н.}=\overline{K}=const$. Після підстановки в рівняння (4.18), одержимо $\mu\overline{K}=\rho I \Rightarrow \overline{K}=\frac{\rho I}{\mu}$.

Отже, шукана величина фондів виражається залежністю $K(t)=\overline{K}+K_{o.o.}=\frac{\rho I}{\mu}+Ce^{-\mu t}$.

Приклад 4. Теорія фірми, ринок

Визначимо інтенсивність випуску продукції $y(t)$ як обсяг продукції, виробленої протягом часу $[t;t+1]$. Продовжимо дослідження моделі з прикладу 2 з використанням додаткового припущення, що швидкість збільшення інтенсивності випуску продукції є зростаючою функцією доходу.

Нехай $y(t)$ – інтенсивність випуску продукції деякого підприємства. Відповідно до результатів прикладу 2, припускаємо, що зі збільшенням випуску буде відбуватися насичення ринку й ціна товару $p(y)$ буде падати. Нехай ця залежність відповідає рівнянню (4.15): $p(y)=a-by$, $(a,b>0)$.

Скласти диференціальне рівняння для функції $y(t)$ й розв'язати його.

Розв'язок. Згідно з механічним змістом похідної швидкість зміни функції $y(t)$ є $y'=\frac{dy}{dt}$. За умовою $\frac{dy}{dt}=k(a-by)y$, де $p(y)y$ – дохід від продажу випуску $y(t)$ за ціною $p(y)$. Розділимо змінні, тоді одержимо рівняння:

$$\frac{dy}{y(a-by)}=kdt\text{, інтеграл якого має вигляд } y=\frac{Cae^{akt}}{1+Cbe^{akt}}.$$

Отримана в результаті інтегрування функція $y(t)$ являє собою рівняння логістичної кривої, що часто виникає в різних розділах економічних і соціальних наук (див. рис. 4.1).

Приклад 5. Економічне завдання вирівнювання цін за рівнем активу

Якщо попит і пропозиція щодо певного товару на ринку знаходяться у рівновазі ($d = s$), то фірма, що випускає цей товар, має деякий оптимальний рівень активу q_0. Нехай зміна рівня активу q пропорційно різниці між пропозицією s і попитом d з коефіцієнтом пропорційності $k(k > 0)$. Нехай, крім того, зміна ціни p також пропорційна відхиленню активу q від деякого фіксованого рівня q_0 з коефіцієнтом пропорційності m $(m > 0)$.

Записати систему диференціальних рівнянь, відповідну до завдання вирівнювання цін за рівнем активу q при вищевикладених припущеннях.

Розв'язок. Дотримуючись умов завдання, можемо записати:

$$\begin{cases} q' = k(s - d), \\ p' = -m(q - q_0), \end{cases}$$

де штрих при змінній позначає похідну за часом.

У результаті, враховуючи той факт, що пропозиція s і попит d обоє є функціями ціни p, тобто $s(p)$, $d(p)$, маємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} q' = k[s(p) - d(p)], \\ p' = -m(q - q_0). \end{cases}$$

Отримана система диференціальних рівнянь описує динамічну модель вирівнювання цін за рівнем активу. Система рівнянь може бути як лінійною, так і нелінійною залежно від характеру функцій попиту та пропозиції.

Розглянемо найпростіший випадок залежності функції попиту та пропозиції від ціни – лінійну залежність. Надалі, якщо буде потрібно, завдання можна ускладнити й розглянути інші залежності від ціни згаданих функцій.

Отже, нехай $s(p) = ap + s_0$, $d(p) = -cp + d_0$, $a > 0$, $c > 0$ і тоді система диференціальних рівнянь набуде вигляду:

$$\begin{cases} q' = k[(a + c)p + (s_0 - d_0)], \\ p' = -m(q - q_0). \end{cases}.$$

Спростимо систему рівнянь, для чого використаємо більш зручні позначення й інше написання похідних. Маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = A_{11}q + A_{12}p + A_{10} \\ \dfrac{dq}{dt} = A_{21}q + A_{22}p + A_{20}, \end{cases}$$

де $A_{11} = 0$, $A_{12} = k(c + a)$, $A_{10} = k(s_0 - d_0)$,

$A_{21} = -m$, $A_{22} = 0$, $A_{20} = mq_0$.

Таким чином, ми одержали систему лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами. Система є неоднорідною через те, що коефіцієнти A_{10}, A_{20} не дорівнюють нулю.

Оскільки досліджувана система має стаціонарні розв'язки, вірніше стаціонарну точку $q = q_0$, $p = p_0$, яка знаходиться з рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = k[(a + c)p + (s_0 - d_0)] = 0, \\ \dfrac{dp}{dt} = -m(q - q_0) = 0 \end{cases}$$

і її координати дорівнюють $p = p_0 = \dfrac{d_0 - s_0}{a + c}$, $q = q_0$, то щойно отримана система може бути приведена до вигляду однорідної системи диференціальних рівнянь. Для цього достатньо записати рівняння у варіаціях щодо стаціонарної точки, що буває необхідно при подальшому дослідженні стабільності знайдених стаціонарних розв'язків (стаціонарних точок).

До останньої системи диференціальних рівнянь вже легко може бути застосований увесь апарат теорії диференціальних рівнянь так само, як і теорії стабільності знайдених стаціонарних розв'язків (стаціонарних точок), оскільки тільки стійкі стаціонарні розв'язки або режими будуть зберігатися.

Приклад 6. Економічне завдання вирівнювання цін за рівнем активу (продовження)

У прикладі 5 отримана система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з постійними коефіцієнтами.

Виконаємо заміну змінних: $x_1 = q - q_0$, $x_2 = p - \dfrac{d_0 - s_0}{a + c}$. У результаті чого одержимо систему однорідних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = k(a+c)x_2\,, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -mx_1\,. \end{cases}$$

Завдання полягає в знаходженні загального розв'язку даної системи.

Розв'язок. Розв'яжемо цю систему методом виключення невідомих. Для цієї мети диференціюємо друге рівняння: $\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -m\dfrac{dx_1}{dt}$.

З урахуванням першого рівняння системи одержуємо диференціальне рівняння другого порядку $\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + mk(a+c)x_2 = 0$.

Позначимо $mk(a+c) = \alpha^2$ й складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i\alpha$. Отже,

$$x_2(t) = C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -\alpha C_1\sin\alpha t + \alpha C_2\cos\alpha t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1(t) = -\frac{1}{m}\cdot\frac{dx_2}{dt} = \frac{\alpha}{m}C_1\sin\alpha t - \frac{\alpha}{m}C_2\cos\alpha t.$$

Нагадаємо, що $x_1 = q - q_0$, $x_2 = p - p_0$.

Таким чином: $q(t) = q_0 + \dfrac{\alpha}{m}\left(C_1\sin\alpha t - C_2\cos\alpha t\right)$,

$$p(t) = p_0 + C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t.$$

Економічний зміст отриманих (модельних) розв'язків полягає в тому, що випадкові відхилення між рівнем попиту та пропозиції (які завжди мають місце в умовах ринку) приводять до синусоїдальних (у часі) коливань рівнів активу й ціни на продукцію даного підприємства.

Приклад 7. **Динамічна оптимізація монополіста**

Розглядається фірма-монополіст, що виробляє однорідну продукцію з квадратичною функцією витрат $C = \alpha Q^2 + \beta Q + \gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$.

Оскільки запаси продукції не передбачаються, то випуск Q завжди встановлюється рівним попиту. Отже, ми будемо вживати символ $Q(t)$ для позначення обох величин. Попит передбачається залежним не тільки від ціни $P(t)$, але також від швидкості зміни ціни $P'(t)$:

$$Q = a - bP(t) + hP'(t), \ \left(a, b, > 0; h \neq 0\right).$$

Таким чином, прибуток фірми є функцією двох змінних P й P':

$$\pi(P, P') = PQ - C = P(a - bP + hP') - \alpha(a - bP + hP')^2 -$$
$$- \beta(a - bP + hP') - \gamma .$$

Метою фірми є знаходження оптимальної траєкторії ціни $P(t)$, яка максимізує загальний прибуток π на скінченному проміжку часу [0, *T*]. Цей проміжок передбачається досить коротким, щоб виправдати припущення про фіксовані функції попиту й витрат, так само як відсутність множника дисконтування.

Отже, завдання фірми-монополіста може бути записано у вигляді:

$$\max \pi = \max \int_0^T \pi(P, P')dt, \text{ при умовах } P(0) = P_0, \ P(T) = P_T.$$

Розв'язок. Необхідна умова максимуму $\dfrac{d\pi}{dt} = 0$ може бути записана у вигляді так званого рівняння Эйлера (див. [11]): $\dfrac{\partial \pi}{\partial P} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \pi}{\partial P'}\right) = 0$,

де

$$\pi(P, P') = b(1 + \alpha b)P^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)P - \alpha h^2 P'^2 - h(2\alpha a + \beta)P' +$$
$$+ h(1 + 2\alpha b)PP' - \left(\alpha a^2 + \beta a + \gamma\right).$$

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial \pi}{\partial P} = -2b(1 + \alpha b)P + (a + 2\alpha ab + \beta b) + h(1 + 2\alpha b)P',$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial P'} = -2\alpha h^2 P' - h(2\alpha a + \beta) + h(1 + 2\alpha b)P,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \pi}{\partial P'}\right) = \pi_{P't} + \pi_{P'P}P'(t) + \pi_{P'P'}P''(t),$$

де $\pi_{P't} = 0$,

$$\pi_{P'P} = h(1 + 2\alpha b),$$

$$\pi_{P'P'} = -2\alpha h^2.$$

Після приведення подібних членів рівняння Эйлера набуде вигляду: $P'' - \frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2} P = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha}$, тобто завдання оптимізації звелося до розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок цього рівняння може бути знайдений методом варіації довільних сталих і має вигляд:

$$P^*(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt} + \overline{P},$$

де $\quad \overline{P} = \frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2b(1+\alpha b)}, \ r = \sqrt{\frac{b(1+\alpha b)}{\alpha h^2}},$

$$C_1 = \frac{P_0 - \overline{P} - \left(P_T - \overline{P}\right)e^{rT}}{1 - e^{2rT}}, \ C_2 = \frac{P_0 - \overline{P} - \left(P_T - \overline{P}\right)e^{-rT}}{1 - e^{-2rT}}.$$

На рис. 4.2 для ілюстрації показано залежності P^* від t при $\overline{P} = 1$, $r = 1$.

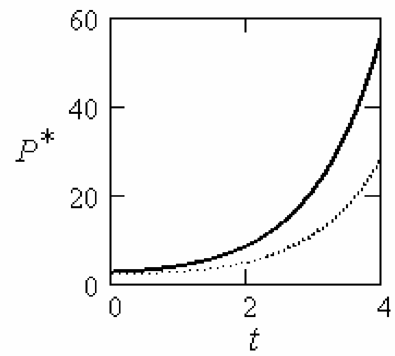


Рис. 4.2 *Залежність* P^* *від* t*: суцільна лінія -* $C_1 = 1$*,* $C_2 = 0{,}5$*;*
точкова лінія - $C_1 = 0{,}5$*,* $C_2 = 1$

Ми бачимо, що оптимальна траєкторія ціни $P^*(t)$ є зростаючою функцією часу.

4.3. Багатофакторні виробничі функції

Важливими елементами мікро- й макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого – виробничі технологічні процеси.

Вивчаючи економічні процеси в сучасному суспільстві для побудови економіко-математичної моделі, яка описує внутрішній бік виробництва, потрібно зібрати необхідну інформацію про фактори й ресурси, які впливають на обсяг продукції, що випускається. Зв'язок між обсягом виробництва й використаними ресурсами визначається за допомогою виробничих функцій.

Виробничою функцією називається аналітичне співвідношення, що зв'язує змінні величини витрат (фактори, ресурси) з величиною випуску продукції.

Історично одними з перших робіт з побудови й використання виробничих функцій були роботи з аналізу сільськогосподарського виробництва в США. У 1909 р. Митчерліх запропонував нелінійну виробничу функцію: добрива – урожайність. Незалежно від нього Спіллман запропонував показникове рівняння врожайності.

На їхній основі був побудований ряд інших агротехнічних виробничих функцій.

Досвід використання виробничих функцій у сільськім господарстві показав, що максимізація надоїв молока, приросту ваги тварин і інших натуральних показників продуктивності не збігається, як правило, з максимізацією економічних показників (прибуток, собівартість), тобто натурально-речовинний оптимум і економічний по своїй суті різні поняття.

У 1928 р. Ч. Кобб і П. Дуглас на основі даних по обробній промисловості (несільськогосподарські галузі) США за період 1899-1922 рр. визначили функцію $P = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$, де P – розрахунковий індекс виробництва; K – індекс основного капіталу; L – індекс зайнятості. Це була перша емпірична виробнича функція, побудована за даними часових рядів.

У 1928 р. В. Рамсей запропонував спрощену модель, у якій дається не тільки опис довгострокового зростання, але й ставиться проблема визначення його оптимального варіанта. Модель цікава тим, що, по суті, вона була передвісницею оптимізаційного підходу до проблем економічного зростання.

Виробничі функції призначені для моделювання процесу виробництва деякої господарської одиниці: окремої фірми, галузі або всієї економіки держави в цілому.

За допомогою виробничих функцій вирішуються завдання:

- оцінки віддачі ресурсів у виробничому процесі;
- прогнозування економічного зростання;
- розробки варіантів плану розвитку виробництва;
- оптимізації функціонування господарської одиниці за умови заданого критерію й обмежень по ресурсах.

Загальний вид виробничої функції:

$$Y = Y(R_1, R_2, ..., R_i, , ..., R_n),$$

де Y – показник, що характеризує результати виробництва;
R – факторний показник *i-го* виробничого ресурсу;
n – кількість факторних показників.

Виробничі функції визначаються двома групами припущень: математичних і економічних.

Математично передбачається, що виробнича функція повинна бути *безперервною* й *двічі диференційовною.*

Економічні припущення полягають у наступному:

• при відсутності хоча б одного виробничого ресурсу виробництво неможливе, тобто виконується:

$$Y(0, R_2, ..., R_i, ..., R_n) = ... = Y(R_1, R_2, ..., 0, ..., R_n) = \\ = Y(R_1, R_2, ..., R_i, ..., 0) = 0;$$

• зростання обсягів використаних ресурсів приводить до зростання результату виробництва, тобто виконуються співвідношення:

$$\frac{\partial Y}{\partial R_i} > 0 \text{ , при } R_i > 0 \text{ , } i = 1,2,...,..n;$$

• збільшення витрат лише одного ресурсу приводить до зниження ефективності його використання:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial R_i^2} < 0 \text{ , } i = 1,2,...,..n.$$

При *макроекономічнім* моделюванні часто використовується припущення про те, що:

$$Y(\lambda R_1, \lambda R_2, ..., \lambda R_i, ..., \lambda R_n) = \lambda Y(R_1, R_2, ..., R_i, ..., R_n), \text{ при } \lambda > 0,$$

де λ – постійна, тобто про пропорційність зростання випуску продукції зростанню обсягів витрачених ресурсів.

Виробничу функцію будемо розглядати у просторі (K, L, Y). Оберемо точку Y_c, яка відображає рівень виробництва $Y = Y_c$. Проведемо через цю точку площину, паралельну площини KOL. Проекція лінії перетинання на площину KOL називається ***ізоквантою,*** або ***виробничою кривою байдужності:***

$$Y_c = F(K, L) = const.$$

Тобто, ***ізокванта*** це геометричне місце точок, яким відповідає однаковий рівень випуску продукції.

Зміст ізокванти полягає в тому, що одна й та сама кількість продукції Y_c може бути вироблена при різних комбінаціях ресурсів виробництва K і L.

Проекції виробничої функції на площині YOK і YOL утворюють криві, які називаються кривими «витрати-випуск». Графіки кривих «витрати-випуск» показано на рис. 4.3. На рисунках: $K_1 > K_2 > K_3$ і $L_1 > L_2 > L_3$.

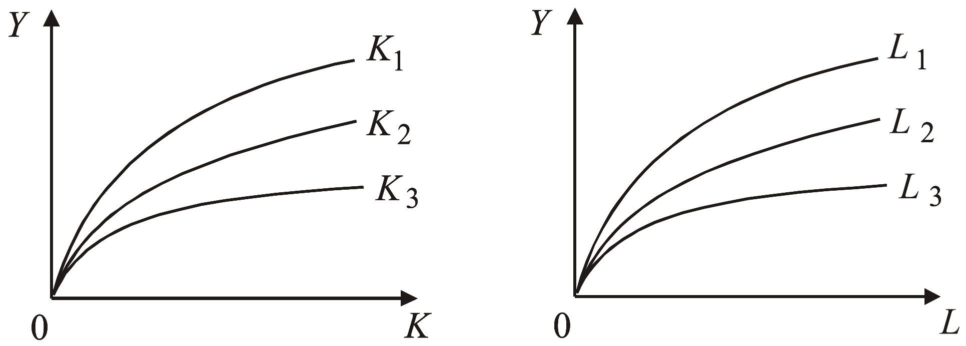


Рис. 4.3. *Криві «витрати-випуск»*

Виробничі функції дозволяють визначати середні й граничні показники, що характеризують виробничий процес: середні віддачі ресурсів; граничні віддачі ресурсів; коефіцієнти еластичності випуску по ресурсах; граничні норми заміщення ресурсів; коефіцієнти еластичності заміщення ресурсів.

Для двофакторної виробничої функції дріб $\frac{Y}{K}$ називається ***продуктивністю капіталу*** або ***капіталовіддачею.*** Дроби $\frac{K}{Y}$ й $\frac{L}{Y}$ називаються відповідно ***капіталомісткістю*** й ***трудомісткістю*** випуску. Дроби $\frac{Y}{L}$ й $\frac{K}{L}$ називаються відповідно ***продуктивністю праці*** й ***капіталоозброєністю праці.***

Коефіцієнти еластичності випуску по ресурсах визначаються наступними формулами:

$$E_K = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{Y},$$

$$E_L = \frac{\partial Y(K,L)}{\partial L} \cdot \frac{L}{Y}.$$

Ці коефіцієнти показують, на скільки відсотків зміниться обсяг виробництва при зміні витрат відповідного виробничого ресурсу на один відсоток при незмінних обсягах іншого ресурсу. Коефіцієнти еластичності випуску E_K і E_L залежать від того, при яких значеннях K і L вони підраховуються.

Сума $E_K + E_L = E$ називається ***еластичністю виробництва.***

Для двофакторної виробничої функції ***граничною нормою заміщення*** ресурсу K ресурсом L називається характеристика

$$\gamma_{KL} = -\frac{dL}{dK},$$

яка показує, скільки одиниць ресурсу K може бути вивільнено (притягнуто) при збільшенні (зменшенні) витрат ресурсу L на одиницю при незмінному обсязі випуску. Аналогічно може бути визначена гранична норма заміщення ресурсу *L*.

З визначення повного диференціалу

$$dY = Y'_K \cdot dK + Y'_L \cdot dL$$

з урахуванням того, що рівень випуску залишається незмінним, тобто $dY = 0$, отримаємо:

$$Y'_L \cdot dL = -Y'_K \cdot dK,$$

$$dL = -\frac{Y'_K}{Y'_L} \cdot dK,$$

$$\frac{dL}{dK} = -\frac{Y'_K}{Y'_L}.$$

Таким чином,

$$\gamma_{KL} = \frac{Y'_K}{Y'_L} = \frac{E_K}{E_L} : \frac{K}{L},$$

тобто гранична норма заміни основного капіталу працею дорівнює відношенню еластичностей випуску по основному капіталу й праці, поділеному на капіталоозброєність праці.

Для кількісної характеристики швидкості зміни граничної норми заміщення при русі уздовж ізокванти використовується величина σ, яка називається ***еластичністю заміщення ресурсів.*** Величина σ показує, на скільки відсотків повинно змінитися відношення ресурсу K до ресурсу *L* при русі уздовж ізокванти, щоб при цьому гранична норма заміщення змінилася на один відсоток:

$$\sigma = \frac{d(K/L)/(K/L)}{d\gamma/\gamma}.$$

Показники ***середньої віддачі ресурсів*** визначаються за формулами:

$$A_i = \frac{Y}{R_i}, \quad i = 1,2,...,n..$$

Показники ***граничної*** (***маржинальної***) ***продуктивності ресурсів*** визначаються за формулами:

$$M_i = \frac{\partial Y}{\partial R_i}, \quad i = 1,2,...,n..$$

Показник M_i визначає, на скільки одиниць збільшиться обсяг випуску *Y*, якщо обсяг витрат *i-го* ресурсу зросте на одну (досить малу) одиницю при незмінних обсягах іншого затрачуваного ресурсу.

Використовуючи вищесказане, можна записати, що:

$$E_i = \frac{M_i}{A_i},$$

тобто еластичність випуску по одному з ресурсів можна визначити як відношення граничної продуктивності M_i цього ресурсу до його середньої продуктивності A_i.

У ***мікроекономічних*** дослідженнях для побудови виробничих функцій успішно застосовуються лінійні, експонентні, поліноміальні, мультиплікативні залежності.

Побудова виробничих функцій

Виробничі функції визначаються у формі однофакторних і багатофакторних статистичних залежностей – регресійних рівнянь.

Вихідні дані для побудови виробничої функції задаються табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Результуючий показник Y	**Факторні показники**							
	R_1	R_2	R_3	...	R_i	...	R_n
Y_1	R_{11}	R_{12}	R_{13}	...	R_{1i}	...	R_{1n}
Y_2	R_{21}	R_{22}	R_{23}	...	R_{2i}	...	R_{2n}
…	…						
Y_j	R_{j1}	R_{j2}	R_{j3}	...	R_{ji}	...	R_{jn}
…	…						
Y_m	R_{m1}	R_{m2}	R_{m3}	...	R_{mi}	...	R_{mn}

Побудова виробничої функції базується на попередньому статистичному аналізі даних.

Перший етап – *аналіз даних по вибірках.* Мета цього етапу – переконатися в репрезентативності вибірок.

Аналіз даних по вибірках складається з наступних процедур (використовуючи Майстер функцій Excel):

- визначення стандартних квадратичних відхилень (δ) кожної з вибірок Y і R_i $(i = \overline{1,n})$. (Excel: статистична функція СТАНДОТКЛОН);
- визначення дисперсій вибірок (Excel: статистична функція ДИСП);
- визначення медіан, min і max кожної вибірки (Excel: статистичні функції МЕДИАНА, МИН, МАКС);
- Z-Тестування вибірок (Excel: статистична функція ZТЕСТ).

Середнє квадратичне відхилення й дисперсія оцінюють кожну вибірку з погляду розкиду даних відносно середньовибіркового значення. Якщо ці показники великі, то великий і розкид даних і, можливо, доцільно виключити з відповідних вибірок пікові (мінімальні й максимальні) значення перш ніж переходити до регресійного аналізу.

Числові характеристики – мода, медіана, мінімальне й максимальне значення дають загальне уявлення про устрій вибірки:

• мінімальне й максимальне значення не вимагають спеціальних пояснень;

• медіана визначає середину вибірки, тобто вказує таке значення показника у вибірці, для якого половина значень, що залишилися, не перевершує це значення, а друга половина перевершує медіану.

Z-Тестування вибірки застосовується для одержання стандартної оцінки кожного з елементів кожної вибірки. Стандартні оцінки дозволяють перевірити (оцінити) приналежність цих конкретних спостережень до конкретної генеральної сукупності. При застосуванні Z-Тестування апріорно встановлюється правило оцінки репрезентативності вибірки, наприклад, вибірка вважається репрезентативною, якщо в ній не більше 10% даних мають імовірнісні оцінки < 0,7 згідно з Z-Тестом.

Якщо наведене правило не виконується, то вибірку вважають не представницькою й відповідно подальший аналіз проводити з такими даними вважається недоцільним.

Другий етап – *кореляційний аналіз даних.* На цьому етапі здійснюється парне порівняння вибірки результуючого показника з вибірками показників, які згідно з теоретичною моделлю розглядаються як факторні, а також перевіряється ступінь кореляції факторних показників.

Для цих цілей розраховуються коефіцієнти парної кореляції (R) (Excel: статистична функція КОРРЕЛ), які змінюються від -1 до 1. Чим ближче значення коефіцієнта кореляції до 1 або -1, тим вищий ступінь кореляції відповідних випадкових величин.

Однак при R, близьких до -1 або 1, регресійні зв'язки між відповідними випадковими величинами встановлюватися не можуть, оскільки ця ситуація означає фактично функціональний взаємозв'язок показників. Тому ті показники, які спочатку були обрані в якості факторних і для яких коефіцієнти кореляції з результуючим показником виявилися дуже близькі до -1 або 1, з подальшого розгляду доцільно виключати.

Знак коефіцієнта парної кореляції вказує на характер взаємозв'язку величин: «+» – на пряму залежність; «–» – на зворотну.

Аналогічно роблять із факторними показниками, для яких коефіцієнти кореляції дуже близькі до нуля. Їх виключають із подальшого розгляду, виходячи з того, що відповідні випадкові величини є слабо скорельовані й, отже, у якості факторних не можуть бути використані.

Для оцінки щільності зв'язку між двома вибірками як множинами даних розраховуються коефіцієнти коваріації, на основі аналізу яких робиться висновок про те, наскільки сильний вплив того або іншого факторного показника на результуючий показник.

І, нарешті, на третьому кроці цього етапу аналізу розраховуються безрозмірні коефіцієнти Пірсона (Excel: статистична функція ПИРСОН), на основі яких оцінюється ступінь лінійної залежності між двома множинами даних (вибірками).

Іншими словами, коефіцієнти Пірсона дозволяють зробити висновок про можливість і доцільність використання лінійної форми регресійного взаємозв'язку між результуючим і факторним показником.

Третій етап – *регресійний аналіз.*

На цьому етапі, використовуючи метод найменших квадратів, будується багатофакторна регресійна залежність результуючого показника від факторних показників, що залишилися після попередніх кроків аналізу.

Перед побудовою багатофакторної регресійної залежності доцільно ще раз переконатися в правильності вибору факторних показників для моделювання виробничої функції. З цією метою застосовується аналіз за Ф-Критерієм (Excel: статистична функція ФТЕСТ). Ф-Критерій – це результат дисперсійного аналізу, що дозволяє зробити висновок про ступінь впливу кожної факторної ознаки в сукупності обраних для регресійного моделювання на результуючий показник. Чим більший вплив факторної ознаки на результуючий – тим більше значення Ф-Критерію.

У результаті аналізу за Ф-Критерієм ряд факторних показників, включених спочатку у регресійну залежність, може бути виключений через слабкий ступінь впливу на результуючий показник, що дозволяє спрощувати форму виробничої функції.

Крім того, стандартні функції Excel «ЛИНЕЙН» і «ЛГРФПРИБЛ» дають можливість одержувати додаткові статистичні характеристики регресійної залежності:

• стандартні значення помилок регресійних коефіцієнтів і стандартне значення помилки результуючого фактора: чим менші відповідні величини, тим, мабуть, більш точно побудоване рівняння апроксимує фактичні дані;

• коефіцієнт детермінування, який змінюється від 0 до 1, і чим ближче значення цього коефіцієнта до 1, тим сильніша кореляційна залежність, а чим ближче до 0, тим слабкіша, тобто обрана форма регресійного зв'язку є невдалою для прогнозування;

• F-Статистику, яка в сукупності з допоміжною характеристикою ступеня свободи дозволяє по стандартних таблицях F-Критичних значень цього критерію визначити, наскільки встановлений між факторами взаємозв'язок випадковий, тобто визначає рівень надійності регресійної моделі: чим більше спостережувана (розрахункова) F-Статистика перевищує табличну, тим вірогідніша обрана модель.

Порядок обчислення за допомогою функції «ЛИНЕЙН» наступний:

1) введіть вихідні дані або відкрийте існуючий файл, що містить аналізовані дані;

2) виділіть область порожніх гнізд 5х3 (5 рядків, 3 стовпця) для висновку результатів регресійної статистики;

3) активізуйте «Майстер функцій» будь-яким зі способів:

а) у головному меню виберіть «Вставка/Функція»;

б) на панелі інструментів Стандартна клацніть по кнопці «Вставка функції»;

4) у вікні «Категорія» виберіть «Статистичні», у вікні «Функція» – «ЛИНЕЙН». Натисніть на кнопку «ОК»;

5) заповніть аргументи функції: *відомі_значення_ у* – діапазон, що містить дані результативної ознаки; *відомі_значення _х* – діапазон, що містить дані факторів незалежної ознаки;

Константа – логічне значення, яке вказує на наявність або відсутність вільного члена в рівнянні; якщо *Константа* = 1, то вільний член розраховується звичайним чином, якщо *Константа* = 0, то вільний член рівний 0;

Статистика – логічне значення, яке вказує, виводити додаткову інформацію з регресійного аналізу чи ні. Якщо *Статистика* = 1, то додаткова інформація виводиться, якщо *Статистика* = 0, то виводиться тільки оцінки параметрів рівняння. Натисніть на кнопку «ОК»;

6) у лівому верхньому гнізді виділеної області з'явиться перший елемент підсумкової таблиці. Щоб розкрити всю таблицю, натисніть на клавішу <F2>, а потім - на комбінацію клавіш <CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>. Додаткові статистичні характеристики регресійної залежності будуть виводитися в порядку, зазначеному в наступній схемі (табл. 4.2):

Таблиця 4.2

Значення коефіцієнта A_2	**Значення коефіцієнта A_1**	**Значення коефіцієнта A_0**
Середнє квадратичне відхилення A_2	Середнє квадратичне відхилення A_1	Середнє квадратичне відхилення A_0
Коефіцієнт детермінації R^2	Середнє квадратичне відхилення Y	
F-Статистика	Число ступенів свободи	
Регресійна сума квадратів	Залишкова сума квадратів	

Зауваження. У нижчевикладених контрольних завданнях побудову виробничих функцій пропонується здійснювати за допомогою стандартної функції Excel «ЛИНЕЙН» з розділу статистичних функцій у формах: $Y = A_0 + A_1R_1 + A_2R_2 + ... + A_iR_i + ... + A_nR_n$,

$$Y = A_0 R_1^{A_1} R_2^{A_2} ... R_i^{A_i} ... R_n^{A_n},$$

де A_i – невідомі коефіцієнти регресії, які підлягають визначенню.

Приклад побудови й аналізу виробничої функції

Статистичні дані по виробничому процесу деякого підприємства за 15 років наведено в таблиці:

	1	2	3	4	5	6	7	8
К	3,45	3,48	3,06	3,66	3,79	3,85	3,44	4,08
L	6,17	7,55	6,93	6,55	6,71	7,73	7,43	7,55
Y	10,11	13,65	13,75	11,64	12,87	12,43	14,33	15,26
	9	10	11	12	13	14	15	
К	4,5	4,31	3,57	3,55	4,61	3,99	4,78	
L	7,6	6,88	6,54	4,37	6,92	7,33	6,01	
Y	15,9	18,21	13,22	13,45	12,22	12	13.07	

Провести статистичний аналіз вихідних даних, побудувати лінійну й степеневу форми виробничих функцій $Y = Y(K, L)$ для заданого виробничого процесу. На основі статистичного аналізу обґрунтувати вибір форми регресійної залежності й провести економічний аналіз обраної виробничої функції.

У табл. 4.3 наведена послідовність статистичних розрахунків, необхідних для побудови й вибору аналітичної форми виробничої функції. Відповідні розрахунки по контрольних завданнях необхідно представляти в аналогічній або подібній по підзаголовках формі при підготовці звіту.

Зауваження. Для побудови степеневої регресійної залежності необхідно вихідну формулу $y = A_0 \cdot K^{A_1} \cdot L^{A_2}$ прологарифмувати, що приведе до представлення нової залежності в лінійній формі:

$$LnY = \ln A_0 + A_1 \ln K + A_2 \ln L,$$

для якої знову слід використовувати функцію «ЛИНЕЙН». При поверненні до степеневої залежності не забути, що $A_0 = e^{\ln A_0}$ (це значення занести в таблицю поруч із коефіцієнтом $\ln A_0$).

Статистичний аналіз даних

1. Стандартні відхилення вибірок вихідних даних порівняно зі значеннями самих даних невеликі, тобто розкид точок у вибірках невеликий.

2. Відхилення максимальних і мінімальних значень вибірок від відповідних медіан і середнього значення також невеликі. Це означає, що точки вибірок розташовані досить щільно.

3. Результати Z-Тесту показують, що у вибірці Y імовірності влучення значень Y_1, Y_4, K_2, K_3, L_1, L_{13} у відповідні генеральні сукупності дуже малі, особливо для Y_1 й L_{13}, тому при розв'язку реальних практичних завдань відповідні рядки даних потрібно вилучити з подальшого розгляду й почати статистичний аналіз для змінених вибірок знову.

4. Коефіцієнт парної кореляції Y й K рівний 0,28, що говорить про наявність не дуже сильної кореляційної залежності цих вибірок. Кореляція між Y і L також досить слабка, оскільки їх коефіцієнт парної кореляції рівний 0,24. Кореляція незалежних факторів K і L дуже слабка, коефіцієнт їх парної кореляції рівний 0,09.

Це говорить про те, що факторні показники слабко пов'язані між собою, тобто досить незалежні й відповідно правильно обрані для моделювання регресійної залежності.

5. Коефіцієнти Пірсона за своєю величиною невеликі. Це говорить про те, що, швидше за все, між результуючим показником Y і факторними показниками K й L не існує стійкої лінійної залежності.

Таблиця 4.3

Результати розрахунків

Вихідні дані				**Z-Тест**			
XX	**Y**	**K**	**L**	**Y**	**K**	**L**	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	10,11	3,45	6,17	8.47E-12	0,000451	0,001971	
2	13,65	3,48	7,55	0,63764	0,001018	0,99955	
3	13,75	3,06	6,93	0,70961	9,63E-11	0,703123	
4	11,64	3,66	6,55	0,000121	0,04668	0,12006	
5	12,87	3,79	6,71	0,11342	0,254052	0,324378	
6	12,43	3,85	7,73	0,018357	0,423556	0,999982	
7	14,33	3,44	7,43	0,956622	0,00034	0,997289	

Продовж. табл. 4.3.

1	2	3	4	5	6	7	8
8	15,26	4,08	7,55	0,999824	0,94575	0,99955	
9	15,9	4,5	7,6	0,999999	0,999999	0,999804	
10	18,21	4,31	6,88	1	0,999666	0,621208	
11	13,22	3,57	6,54	0,305647	0,008623	0,111301	
12	13,45	3,55	4,37	0,48085	0,005579	0	
13	12,22	4,61	6,82	0,006052	1	0,515538	
14	12	3,99	7,33	0,001592	0,816338	0,990134	
15	13,07	4,78	6,01	0,209441	1	0,000158	
Числові характеристики вибірок				*Коефіцієнт парної кореляції*			
Min	10,11	3,06	4,37		K	L	
Max	18,21	4,78	7,73	Y	0,28342547	0,242615	
Медіана	13,22	3,79	6,88	K		0,091686	
Ст. відх.	1,935628	0,49549	0,86162	*Коефіцієнти Пірсона*			
Дисперс.	3,746654	0,24551	0,74239		K	L	
				Y	0,28342547	0,242615	
				K		0,091686	
XX	Ln*Y*	Ln*K*	Ln*L*	*Ф-Тест*			
1	2,313525	1,23837	1,81969		K	L	
2	2,61374	1,24703	2,02154	Y	8.2E-06	0,004578	
3	2,621039	1,11841	1,93586	K		0,04705	
4	2,454447	1,29746	1,87946				
5	2,554899	1,33236	1,90359	*Лінійна регресія*			
6	2,520113	1,348073	2,045109	0,943477	1,805948		
7	2,662355	1,235471	2,005526	0,45217	0,794747		
8	2,725235	1,40609	2,02154	0,039416	1,968711		

Продовж. табл 4.3.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	2,766319	1,50407	2,02814	0,266715	13		
10	2,901971	1,46093	1,92861				
11	2,581731	1,27256	1,87793	*Степенева регресія*			
12	2,598979	1,26694	1,47476	0,186233	0,275795	1,864359	6,451802
13	2,503074	1,52822	1,91985	0,267494	0,303091	0,619078	
14	2,484907	1,38379	1,99197	0,109086	0,142496	#Н/Д	
15	2,57032	1,56444	1,79342	0,73466	12	#Н/Д	
				0,029835	0,243662	#Н/Д	
Рівняння лінійної регресії				*Рівняння степеневої регресії*			
Y=0,943L+1,806K				Y=6,452*L^0, 186*K^0,275			

6. Відповідно до результатів застосування Ф-Критерію випливає, що вплив факторних ознак на результуючу у сукупності обраних невеликий, тобто при наявності сукупності деяких інших ознак факторні показники K й L могли б бути виключені з подальшого розгляду як малозначні для змістовного аналізу виробничого процесу й замінені на інші, більш значимі. Однак у силу умовності прикладу, яка відзначалася вище, і відсутності інших даних у завданнях ці фактори будуть залишені.

Зауваження. При виконанні контрольних завдань усі етапи й кроки статистичного аналізу необхідно виконати повністю незалежно від окремих задовільних або незадовільних результатів статистичного аналізу, які в значній мірі зумовлені умовністю контрольних прикладів і малим числом значень у розглянутих вибірках.

Регресійний аналіз даних і вибір форми виробничої функції

Додаткова статистика, отримана при побудові лінійної й степеневої регресійних залежностей, дозволяє зробити наступні висновки:

• стандартні помилки коефіцієнтів A_1 і A_2 для лінійної залежності незначні (0,452 і 0,795). Разом з тим, стандартні помилки коефіцієнтів експонентної залежності (0,267 і 0,303) суттєво нижчі, що говорить про перевагу вибору степеневої залежності для моделювання розглянутого виробничого процесу;

• аналогічний висновок можна зробити й за значеннями стандартних помилок для Y: для лінійної залежності вона становить 1,968, а для степеневої – 0,142;

• коефіцієнти детермінованості обох залежностей (0,039 і 0,109) невеликі, тобто, швидше за все, на стадії вербального моделювання при відборі факторних ознак були не включені у вихідний розгляд якісь фактори, що мають більш суттєвий вплив;

• при перевірці надійності моделей по F-Статистиці одержуємо наступні невтішні результати: як для лінійної, так і для експонентної залежності табличне значення 3,88 суттєво перевищує розрахункові: 0,27 і 0,73 відповідно; тому обидві залежності мають слабку надійність, тобто встановлені взаємозв'язки по вибірках носять випадковий характер і непридатні для прогнозування розвитку виробничого процесу. Табличні значення F-Статистики визначаються за будь-яким довідником. Висновок: у якості виробничої функції більш доцільно вибрати експонентну форму регресійного взаємозв'язку.

Економічний аналіз виробничої функції

Структуру економічного аналізу виробничої функції продемонструємо на прикладі лінійної залежності, яка має такий вигляд:

$$Y = 0{,}943L + 1{,}806K.$$

Визначається масштаб виробничої функції.

Оскільки функція має лінійну форму, мабуть, що при зміні масштабу факторів масштаб *Y зміниться на таку ж величину.*

Будуються графіки «витрати-випуск».

Фіксуємо три значення фактора $L =$ 3, 4 і 5. Відповідно одержимо рівняння:

$$Y = 1{,}806K + 2.83$$

$$Y = 1{,}086K + 3{,}77$$

$$Y = 1{,}086K + 4{,}72$$

Аналогічним чином можуть і повинні бути побудовані при виконанні завдання графіки для фіксованих значень іншої незалежної змінної.

Розраховуються формули для визначення середньої ефективності (віддачі) виробничих ресурсів:

$$A_K = Y/K = 0{,}943(L/K) + 1{,}806$$
$$A_L = Y/L = 1{,}806(K/L) + 0{,}943.$$

Розраховуються граничні ефективності ресурсів:

$$M_K = 1{,}806;\ M_L = 0{,}943.$$

Для лінійної функції граничні ефективності ресурсів постійні.

Розраховуються коефіцієнти еластичності випуску по ресурсах:

$$E_k = M_k / A_k = 1{,}806/(0{,}943(L/K) + 1{,}806),$$
$$E_k = M_L / A_L = 0{,}943/(1{,}806(L/K) + 0{,}943).$$

Будуються ізокванти моделі. Для побудови ізоквант фіксуються деякі значення Y, наприклад: 10, 5 і 3. При незмінних Y ізокванти лінійної виробничої функції мають лінійну форму.

Визначається еластичність заміщення ресурсів.

Проводяться імітаційні розрахунки планованих варіантів зміни виробництва.

Фрагмент таких розрахунків виглядає в такий спосіб. Припустимо, що в базовому періоді випускалося 10 од. (одна одиниця, наприклад, відповідає 100 000 грн.) продукції, тобто $Y_0 = 10$. Планується в наступному плановому періоді збільшити обсяг випуску на 25%, тобто випускати відповідно 12,5 од. Передбачається, що обмежень по ресурсах немає (K - це витрати основних виробничих фондів - ОВФ, а L - ресурси працезатрат).

Оскільки в розглянутій економічній системі має місце постійна віддача від розширення виробництва, то очевидно, що для чергового планового періоду слід планувати витрати ресурсів, пропорційні витратам у базовому періоді. Якщо, наприклад, у базовому періоді на випуск 10 одиниць продукції витрачалося 5 одиниць вартості ОВФ і відповідно 1,03 одиниць працезатрат, то в черговому плановому періоді їх буде потрібно відповідно $K = 5 \cdot 1{,}25 = 6{,}25$ й $L = 1{,}03 \cdot 1{,}25 = 1{,}29$ одиниць. Обсяг випуску при цьому складе $Y = 0{,}943 \cdot 1{,}29 + 1{,}806 \cdot 6{,}25 = 12{,}51$. Середня ефективність ресурсів у базовому періоді: продуктивність праці 9,71 і фондовіддача 2. У плановому періоді, відповідно, вони не зміняться. Не зміняться й еластичності ресурсів.

Аналогічно розраховуються характеристики будь-яких інших планових варіантів, які необхідно виконати при підготовці звіту по контрольних завданнях.

4.4. Математична теорія виробництва багаторесурсної фірми

4.4.1. Економічні характеристики процесу виробництва

В економічному аналізі процесу виробництва за допомогою багатофакторних (багаторесурсних) виробничих функцій $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначаються такі показники:

- середні й граничні ефективності;
- коефіцієнти еластичності;
- коефіцієнти заміщення.

Середні показники ефективності визначаються за формулою:

$$\bar{z}_i = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{x_i} \tag{4.19}$$

і називаються *середньою продуктивністю* i*-го ресурсу (фактора виробництва)*, або *середнім випуском за* i*-м ресурсом (фактором виробництва)*.

Для найбільш поширеної виробничої функції двох змінних $f(K, L)$, де K – основні фонди, L – праця, – визначають такі середні показники ефективності. ***Середня фондовіддача*** – *це відношення обсягу виробленої продукції до розміру основних фондів*:

$$\bar{y}_K = \frac{f(K, L)}{K}.$$

Середня продуктивність праці – *це відношення обсягу виробленої продукції до кількості витраченої праці:*

$$\bar{y}_L = \frac{f(K, L)}{L}.$$

Зазвичай, для виробничих функції така залежність є спадною функцією від змінної L. Економічно це можна трактувати так: *зі збільшенням витрат ресурсів середня продуктивність праці знижується*. Це має природне пояснення: оскільки значення другого фактора K залишається без змін, то нова робоча сила не забезпечуватиметься додатковими засобами виробництва, що спричинить зниження продуктивності праці.

Поряд із середніми показниками виробничої функції важливу роль відіграють ***граничні показники***, які виражають частинними похідними першого порядку й часто називають ***граничними продуктами***, або ***граничними продуктивностями*** i***-го ресурсу (фактора).*** Позначення:

$$M_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.20}$$

Гранична продуктивність наближено показує, на скільки одиниць збільшиться обсяг випуску продукції *y*, якщо обсяг витрат i-го ресурсу

x_i зростатиме за незмінних обсягів витрат інших ресурсів.

Вектор-градієнт виробничої функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, тобто вектор $\vec{M} = (M_1, ... M_n)$ називають ***граничним вектор-продуктом,*** *або* ***вектором граничних продуктів****.*

Цей вектор визначає зміну обсягу випуску продукції при зміні вектора ресурсів-витрат.

З економічних міркувань виокремлюється множина:

$$E = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \middle| \frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} \geq 0, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \geq 0 \right\},$$

яку називають ***економічною областю***.

Для виробничої функції $f(K, L)$ економічна область показана на рис. 4.4.

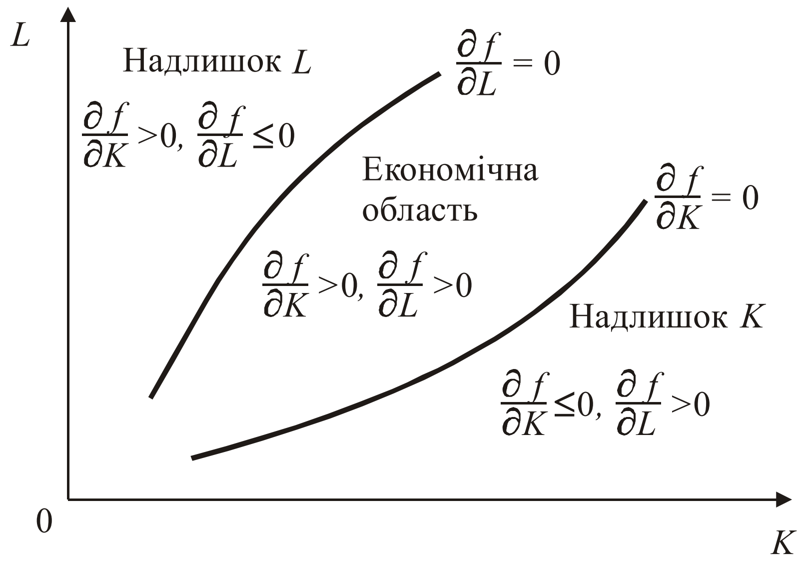


Рис. 4.4. *Економічна область для виробничої функції* $f(K, L)$

Економічна область фактично визначає межі прийнятного співвідношення між факторами виробництва. Зрозуміло, що не варто запроваджувати виробництво у разі, наприклад, $\frac{\partial f}{\partial K} \leq 0$, тобто якщо при збільшенні вартості основних фондів випуск продукції не зростає.

Приклад 2. *Для лінійної двофакторної виробничої функції* $f(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$, *де* $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, *знайдемо середні й граничні продуктивності факторів* x_1 *і* x_2.

Обчислимо середні показники ефективності факторів x_1 *і* x_2*:*

$$\bar{z}_{x_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_i} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_1} = \frac{a_0}{x_0} + a_1 + \frac{a_2 x_2}{x_1},$$

$$\bar{z}_{x_2} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + \frac{a_1 x_1}{x_2} + a_2.$$

Знайдемо граничні продуктивності факторів x_1 *і* x_2:

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a_1, \; M_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_2.$$

Бачимо, що $M_1 \le \bar{z}_{x_1}$, $M_2 \le \bar{z}_{x_2}$. Отже, $\frac{M_1}{\bar{z}_{x_1}} \le 1$, $\frac{M_2}{\bar{z}_{x_2}} \le 1$.

Приклад 3. Для виробничої функції Кобба–Дугласа $f(x_1, x_2) = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, де $x_1 = K$ – обсяг основного капіталу, $x_2 = L$ – трудові ресурси, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ і $a_1 + a_2 = 1$, знайти середні й граничні продуктивності.

Визначимо середні показники ефективності факторів x_1 *і* x_2:

$$\bar{z}_{x_1} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2}, \quad \bar{z}_{x_2} = \frac{f(x_1, x_2)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1}.$$

Знайдемо граничні продуктивності факторів x_1 *і* x_2:

$$M_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a_1 a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2} = a_1 \bar{z}_{x_1},$$

$$M_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = a_2 a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1} = a_2 \bar{z}_{x_2}.$$

Бачимо, що $\frac{M_1}{\bar{z}_{x_1}} = a_1 \le 1$, $\frac{M_2}{\bar{z}_{x_2}} = a_2 \le 1$. Отже,

$$M_1 \le \bar{z}_{x_1}, \; M_2 \le \bar{z}_{x_2}.$$

У наведених прикладах виконуються нерівності $M_i \le \bar{z}_{xi}$, $i = \overline{1, n}$, тобто гранична продуктивність i-го ресурсу не більша за його середню продуктивність.

4.4.2. Стадії виробництва

За допомогою виробничої функції можна побудувати **криві продукції,** які наочно ілюструють стадії виробництва та закон спадної дохідності. Для більш зручної геометричної інтерпретації скористаємось альтернативною системою позначень. Виробничу функцію позначимо $F(x)$. Якщо $\bar{x}(x_i)$ – вектор витрат, у якому зафіксовані всі компоненти, крім *і*-ої, то *крива продукції для витрат і*-го типу P_i, *крива середнього і*-го *продукту* AP_i та *крива і*-го *граничного* *продукту* MP_i визначаються відповідно до означень (4.19) та (4.20) рівностями:

$$P_i(x_i) = F(\bar{x}(x_i)), \quad AP_i = \frac{F(\bar{x}(x_i))}{x_i} = \frac{P_i(x_i)}{x_i}, \tag{4.21}$$

$$MP_i(x_i) = \frac{dP_i(x_i)}{dx_i} = \frac{\partial F(\bar{x}(x_i))}{\partial x_i}, \quad x_i \ge 0. \tag{4.22}$$

Перша рівність відображає залежність випуску від витрат *i*-го виду при незмінних інших витратах (це так званий **сукупний продукт** *i*-го фактора). Друга рівність характеризує випуск продукції, виробленої в розрахунку на одиницю витрат *i*-го виду (**продуктивність** *i*-го фактора), третя – додатковий дохід, отриманий при використанні додаткової кількості витрат *i*-го виду.

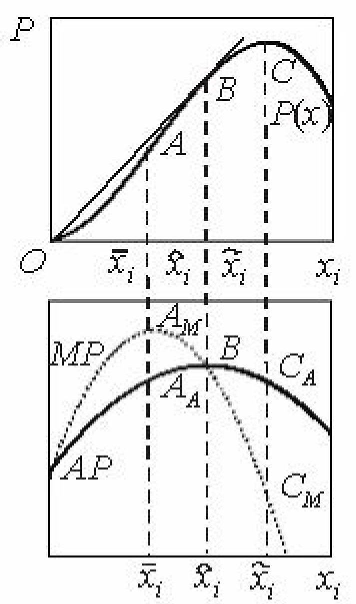


Рис. 4.5

Для графічної ілюстрації теорії, що викладена в посібнику [2], розглянемо конкретний приклад. Нехай випуск продукції заданий функцією:

$$P(x) = 0{,}3x + x^2 - 0{,}15x^3.$$

На рис. 4.5 показано графік функцій $P(x)$ та розраховані за (4.21), (4.22) графіки функцій $AP(x)$ і $MP(x)$. Оскільки в нас лише одна змінна, то фактично ми вважаємо, що $x_i = x$. За поведінкою кривих продукції розрізняють *чотири стадії виробництва та критичні точки виробництва* (рис. 4.5).

Перша критична точка $\bar{x}_i$ – це точка, де $P_i(x_i)$ має точку перегину (коли $MP_i(x_i)$ досягає максимуму). У **другій критичній точці** $\hat{x}_i$ - промінь, проведений з початку координат у систему координат (x_i, q), дотикається до кривої $P_i(x_i)$, а $AP_i(x_i)$ досягає максимуму і дорівнює $MP_i(\hat{x}_i)$. У **третій критичній точці** $\tilde{x}_i$ $P_i(x_i)$ досягає максимуму $(MP_i(\tilde{x}_i) = 0)$. *Закон спадної дохідності* геометрично виражається в тому, що $MP_i(x_i)$ спадає після першої критичної точки $\bar{x}_i$.

Перша стадія виробництва починається в точці $x_i = 0$ і продовжується до точки $\bar{x}_i$. На цій стадії граничний, середній та сукупний продукти зростають, причому граничний продукт перевищує середній:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i), \quad 0 < x_i < \bar{x}_i.$$

Друга стадія виробництва починається в точці $x_i = \bar{x}_i$ і продовжується до точки $\hat{x}_i$. Тут зростають сукупний та середній продукти, граничний продукт спадає, але все ще перевищує середній:

$$MP_i(x_i) > AP_i(x_i), \quad \bar{x}_i < x_i < \hat{x}_i.$$

Третя стадія виробництва знаходиться між другою та третьою критичними точками, де зростає лише сукупний продукт, а середній та граничний – спадають, причому середній продукт перевищує граничний, а останній є додатним:

$$AP_i(x_i) > MP_i(x_i) > 0, \quad \hat{x}_i < x_i < \tilde{x}_i.$$

Четверта стадія виробництва розміщена після третьої критичної точки. На цій стадії спадають усі показники, а граничний продукт є від'ємним: $MP_i(x_i) < 0, \quad x_i > \tilde{x}_i$.

Зауважимо, що на першій стадії *закон спадної дохідності* не виконується.

4.4.3. Завдання багаторесурсної фірми

У п. 6.8.5 розглядалася теорія одноресурсної фірми. Коли фірма використовує не один ресурс, а кілька, багато понять теорії є аналогічними.

Нехай фірма випускає один товар (його обсяг позначимо через *q) і* використовує для його виробництва певні ресурси. Позначимо через $x_1, x_2, ..., x_n$ обсяги різних ресурсів, які фірма використовує для випуску продукції, а через $p_1, p_2, ..., p_n$ – відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини). Витрати виробництва однозначно пов'язані з випуском продукції, і цей зв'язок визначає виробнича функція $q = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка виражає обсяг *q* продукції, що випускається, через обсяги $x_1, x_2, ..., x_n$ ресурсів, які використовуються у виробництві.

Припускатимемо, що виробнича функція задовольняє необхідні умови диференційовності, а також умови, аналогічні наведеним у п. 6.8.5, тобто виробнича функція не спадна в економічній області *E*. Звідси випливає, що її частинні похідні, які називаються граничними продуктами, невід'ємні в цій області.

Доходом R фірми за певний період часу (наприклад, у певному році) називають добуток загального обсягу продукції q, що випускається, на (ринкову) ціну p_0 цієї продукції:

$$R = p_0 q.$$

Витратами С фірми називають її загальні витрати за певний інтервал часу, тобто:

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n,$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – обсяги ресурсів, які використовує фірма (фактори виробництва); $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

Прибутком Р фірми за певний інтервал часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва: $P = R - C$, тобто:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= p_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n).$$

У теорії фірми вважають: якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ вона вплинути не може, тобто фірма «погоджується» з цими цінами. Випадки функціонування фірми в умовах чистої монополії, монополістичної конкуренції та олігополії спеціально розглядаються в межах курсу мікроекономіки.

Основна задача багаторесурсної **фірми** полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві.

З математичного погляду ця задача зводиться до розв'язання задачі про знаходження максимального значення функції прибутку $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають, при яких значеннях $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$ вона набуває свого найбільшого значення.

Набір ресурсів $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають ***оптимальним***.

Фірма може вільно вибирати вектор ресурсів $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причому $x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,n$. Знайдемо оптимальну для фірми комбінацію ресурсів $(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$, тобто розв'яжемо основну задачу багаторесурсної фірми.

Прирівнявши частинні похідні функції прибутку до нуля, дістанемо:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{p_1}{p_0},\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{p_2}{p_0},\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=\frac{p_n}{p_0}. \tag{4.23}$$

Припустимо, що всі витрати ресурсів строго додатні (нульові просто можна не розглядати). Тоді точка $\left(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_n^*\right)$, яка визначається співвідношеннями (4.23), є критичною, й вважатимемо, що умови, які накладаються на виробничу функцію, гарантують, що це точка максимуму. Тоді $\left(x_1^*;x_2^*;\ldots;x_n^*\right)$ називають *оптимальним розв'язком задачі багаторесурсної фірми.*

Приклад. Нехай задано виробничу функцію фірми $f(x,y)=x^{1/4}y^{1/2}$ та ринкові ціни продукції $p_0=2$ і факторів виробництва – відповідно $p_1=1$, $p_2=1/2$ умов. грош. од. Знайти комбінацію ресурсів $\left(x^*;y^*\right)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток.

Функція прибутку фірми:

$$P(x,y)=2x^{1/4}y^{1/2}-x-\frac{1}{2}y.$$

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку й прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} P'_x=2\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}-1=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}-1=0, \\ P'_x=2\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{3}{4}}, \\ \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=4x^{\frac{3}{2}}, \\ x=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4, \\ x=1. \end{cases}$$

Отже, точка $M(1;4)$ є критичною.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їхні значення в точці $M(1;4)$:

$$P''_{xx}=\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}y^{\frac{1}{2}},\ P''_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{2}},\ P''_{yy}=-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{3}{2}};$$

$$A = -\frac{3}{8}1 \cdot 2 = -\frac{3}{4}, \; B = \frac{1}{4}1\frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \; C = -\frac{1}{2}1\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{16}.$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} > 0 \text{ і } A = -\frac{3}{4} < 0,$$

то точка $M(1;4)$ – точка локального максимуму. Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$P_{max} = R(1;4) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 - \frac{1}{2}4 = 4 - 1 - 2 = 1.$$

Приклад. Завдання визначення оптимальної фондоозброєності праці

Припустимо, що деяке виробництво має виробничу функцію $y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$,

де x_1 – витрати живої праці;

x_2 – витрати упредметненої праці;

α_1, α_2 – коефіцієнти еластичності;

α_0 – коефіцієнт впливу неврахованих факторів.

Припустимо, що відомі параметри, необхідні для розрахунків балансового прибутку:

ξ – питомий фонд заробітної плати;

β – коефіцієнт, що характеризує норму витрат сировини на одиницю товарної продукції;

μ – коефіцієнт амортизації;

Р – балансовий прибуток як різниця між вартістю товарної продукції й витратами;

$\xi x_1 + \beta y + \mu x_2$ – собівартість,

тоді прибуток можна розрахувати як:

$$P = y - (\xi x_1 + \beta y + \mu x_2) = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} - \left(\xi x_1 + \beta \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \mu x_2\right).$$

Розділивши обидві частини рівності на собівартість, тобто:

$$\xi x_1 + \beta \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \mu x_2,$$

одержимо рентабельність:

$$r = \frac{\alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{\xi x_1 + \beta\alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \mu x_2} - 1.$$

Фондоозброєність φ за означенням є відношення: $\varphi = \frac{x_2}{x_1}$.

Визначимо рентабельність як функцію фондоозброєності, тобто $r(\varphi)$. Для цього розділимо чисельник і знаменник дробу:

$$\frac{\alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{\xi x_1 + \beta\alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} + \mu x_2}$$

на $x_1 \neq 0$. Якщо коефіцієнти еластичності $\alpha_2 + \alpha_1 = 1$, то:

$$\frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}}{x_1} = x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} = x_1^{-\alpha_2} x_2^{\alpha_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha_2} = \varphi^{\alpha_2},$$

тоді:

$$r(\varphi) = \frac{\alpha_0 \varphi^{\alpha_2}}{\xi + \beta\alpha_0 \varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi} - 1.$$

Визначимо фондоозброєність, при якій рентабельність досягає свого максимального значення. Для цього знайдемо частинну похідну по φ функції рентабельності:

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{\alpha_0\alpha_2\varphi^{\alpha_2 - 1}\left(\xi + \beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi\right) - \alpha_0\varphi^{\alpha_2}\left(\beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2 - 1} + \mu\right)}{\left(\xi + \beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0\varphi^{\alpha_2 - 1}\left(\alpha_2\xi + \alpha_2\beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \alpha_2\mu\varphi - \varphi\beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2 - 1} - \varphi\mu\right)}{\left(\xi + \beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi\right)^2} =$$

$$= \frac{\alpha_0\alpha_2\varphi^{\alpha_2 - 1} + \alpha_0\alpha_2\mu\varphi^{\alpha_2} - \alpha_0\mu\varphi^{\alpha_2}}{\left(\xi + \beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi\right)^2} = \frac{\alpha_0\varphi^{\alpha_2 - 1}\left(\alpha_2\xi + \alpha_2\mu\varphi - \mu\varphi\right)}{\left(\xi + \beta\alpha_0\varphi^{\alpha_2} + \mu\varphi\right)^2}.$$

Екстремум функції досягається в точці, де похідна або не існує, або дорівнює нулю.

Знаменник цього дробу завжди відмінний від нуля. Отже, функція досягає екстремуму, коли $\alpha_0\varphi^{\alpha_2 - 1}\left(\alpha_2\xi + \mu(\alpha_2 - 1)\varphi\right) = 0$.

Перший співмножник у нуль не звертається ніколи, тому що $\alpha_0 \neq 0$ й $\varphi \neq 0$, тому для одержання екстремуму функції другий співмножник повинен бути рівним нулю $\alpha_2\xi + \mu(\alpha_2 - 1)\varphi = 0$.

Звідси:

$$\varphi_0 = -\frac{\xi\alpha_2}{\mu(\alpha_2 - 1)} = \frac{\xi\alpha_2}{\mu(1 - \alpha_2)} = \frac{\xi\alpha_2}{\mu\alpha_1}.$$

Це точка, у якій рентабельність досягає свого екстремуму.

Знак похідної визначається знаком виразу $\alpha_2\xi + \mu(\alpha_2 - 1)\varphi$. Це лінійна функція відносно φ, причому спадна, тому що $\alpha_2 < 1$; $\mu(\alpha_2 - 1) < 0$.

Звідси випливає, що при $\varphi > \varphi_0$ похідна від'ємна, при $\varphi < \varphi_0$ – додатна.

Отже, при переході через точку φ_0 похідна змінює свій знак із плюса на мінус, тобто точка φ_0 – точка максимуму, і рентабельність досягає максимуму при $\varphi = \varphi_0$.

4.4.4. Мінімізація вартості

Для визначення зв'язку між обсягом виробництва продукції та вартістю її виробництва попередньо проаналізуємо зв'язок між обсягами затрат виробничих факторів *x* та вартістю виробництва. Такий зв'язок у довготривалому періоді характеризується **функцією сукупної вартості виробництва,** яка відображає сумарну вартість усіх використаних факторів виробництва і має вигляд:

$$TC = c(x) = (w, x) = \sum_{i=1}^{m} w_i x_i ,$$

де TC – сукупна вартість виробництва, $w = (w_1, w_2, ..., w_m)$, w_i – ціна *i*-го виробничого фактора, причому ціни факторів виробництва розглядаються як незмінні, незалежно від обсягів використання ресурсів. Якщо, наприклад, $m = 2$, а TC зафіксувати на певному рівні TC_0, то в системі координат (x_i, x_j)можна зобразити пряму, всі точки якої відповідатимуть різним варіантам сполучень факторів виробництва однакової вартості TC_0. Така пряма сталих видатків має назву **ізокости,** або *лінії незмінної вартості*. Нахил ізокости дорівнює, очевидно, - w_j / w_i і визначає *норму заміщення* фактора x_i - однією додатковою одиницею фактора x_j за умов незмінної сукупної вартості. Ізокоста є аналогом лінії бюджетного обмеження.

Через те, що однакові обсяги випуску продукції можуть забезпечуватися використанням різних комбінацій обсягів виробничих факторів із різною вартістю, виникає питання вибору сполучення факторів мінімальної вартості. **Мінімізація вартості** – це процес досягнення фірмою таких обсягів використання ресурсів, коли вартість набору ресурсів, необхідних для забезпечення певного обсягу випуску продукції q_0, буде найменшою порівняно з вартістю усіх інших наборів ресурсів, що забезпечують той самий обсяг випуску.

Аналітично ця проблема мінімізації приводить до задачі умовної мінімізації:

$$c(x) \to \min,$$
$$F(x) = q_0,\ x \ge 0. \qquad (4.24)$$

Як відомо, задача (4.24) розв'язується за допомогою методу множників Лагранжа.

Розглянемо задачу (4.24) для фірми, яка використовує у виробництві два ресурси:

$$c(x) = p_1x_1 + p_2x_2 \to \min,\ \ f(x_1, x_2) = q_0,\quad x \ge 0. \qquad (4.25)$$

Функція Лагранжа для задачі (4.25):

$$L(x_1, x_2, \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda(f(x_1, x_2) - q_0)$$

приводить до системи рівнянь:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

або

$$\lambda \frac{\partial f(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = p_1, \lambda \frac{\partial f(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = p_2,\quad f(x_1, x_2) = q_0. \qquad 4.26)$$

Критична точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ функції Лагранжа визначає розв'язок задачі (4.24), тобто точку (x_1^0, x_2^0), у якій досягається мінімум витрат при фіксованому обсязі виробництва q_0. Підставивши точку $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ в перші два рівняння системи (4.26), одержимо дві тотожності. Поділивши почленно першу тотожність на другу одержимо:

$$\frac{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{4.27}$$

Якщо виробнича функція є мультиплікативною функцією виду $f = bx_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, тоді формула (4.27) набуде вигляду:

$$\frac{\alpha x_2^0}{\beta x_1^0} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Геометрично задача (4.24) може бути розв'язана таким чином: якщо сумістити на графіку ізокванту, що відповідає бажаному обсягу випуску q_0, з картою ізокост, то мінімальній вартості виробництва відповідатиме точка дотику ізокванти та однієї з ізокост.

Аналітичний розв'язок (4.27) і геометричний розв'язок задачі (4.24) визначає умову мінімізації вартості і може бути записаний у вигляді:

$$\frac{MP_i}{MP_j} = \frac{w_i}{w_j}. \tag{4.28}$$

Умова (4.28) відома під назвою **еквімаржинального принципу,** або **принципу рівності граничних величин.**

У точці (4.28) збігаються нахили ізокванти та ізокости, тобто збігаються норми заміщення факторів за вартістю та технологією. Інакше кажучи, для мінімізації вартості при заданому рівні виробництва фірмі потрібно використовувати таку комбінацію ресурсів, при якій граничні продуктивності ресурсів пропорційні до їхніх цін.

Так само, як і вище, для кожного іншого бажаного обсягу випуску можна знайти точку мінімальної вартості в системі координат (x_i, x_j). Поєднання таких точок для різних обсягів випуску утворює криву, відому під назвою **шлях** (рис. 4.6), або **крива експансії (розвитку).**

За допомогою кривої експансії можна побудувати функцію вартості виробництва:

$$TC = c(q), \tag{4.29}$$

яка встановлює зв’язок між обсягом випуску q та мінімально можливою вартістю виробництва цього обсягу.

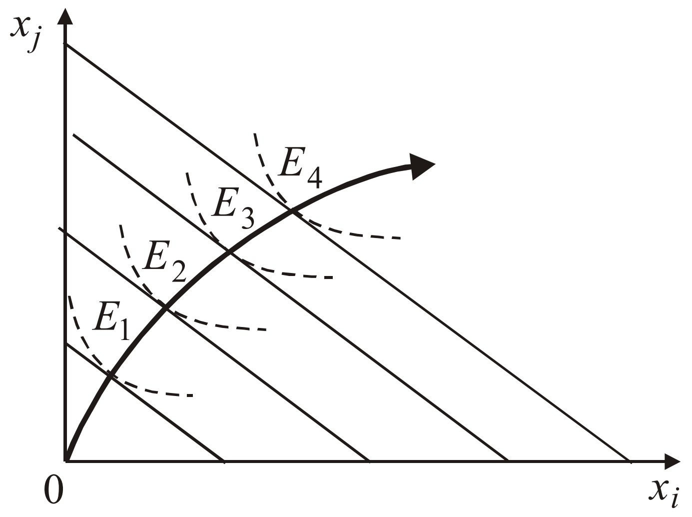


Рис. 4.6 *Вартість у короткостроковому періоді*

У короткостроковому періоді лише частина факторів є змінними (див. [2]). Тому функція вартості виробництва (4.29) для короткострокового періоду має вигляд:

$$TC = c(q) = FC + VC(q), \tag{4.30}$$

де FC – фіксована вартість, що не залежить від обсягу випуску, а $VC(q)$ – змінна вартість. На відміну від (4.29), функція вартості (4.30) відтворює зв'язок між обсягом випуску q та мінімально можливою змінною (а не сукупною) вартістю виробництва при певному фіксованому рівні FC.

Вартість виробництва аналізується також з використанням середніх і граничних показників.

Середня сукупна вартість (AC) – це вартість виробництва одиниці продукції:

$$AC = \frac{TC(q)}{q}.$$

Відповідно визначаються показники **середньої змінної вартості** (AVC) та **середньої фіксованої вартості** (AFC):

$$AVC = \frac{VC}{q}, \quad AFC = \frac{FC}{q}.$$

Гранична вартість (MC) визначається як величина зміни загальної вартості внаслідок зміни обсягу випуску на одиницю:

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta q}.$$

Для неперервної та диференційованої функції вартості (4.30) граничну вартість можна визначити як похідну:

$$MC = \frac{dc(q)}{dq} = \frac{dVC(q)}{dq}.$$

Для ілюстрації співвідношення між кривими середньої та граничної вартостей, розглянемо розроблений нами наступний приклад.

Приклад. Нехай змінна вартість є наступною функцією:

$$VC(q) = 1 + (q-1)^3 + 0{,}3q^3. \qquad (4.31)$$

Фіксована вартість $FC = 2$. Тоді функція вартості виробництва для короткострокового періоду відповідно до (4.30) має вигляд:

$$TC = 2 + 1 + (q-1)^3 + 0{,}3q^3. \qquad (4.32)$$

На рис. 4.7 (а) зображено криві сукупної, змінної та фіксованої (*FC* = 2) вартостей. Ці криві отримані на підставі формул (4.31) і (4.32).

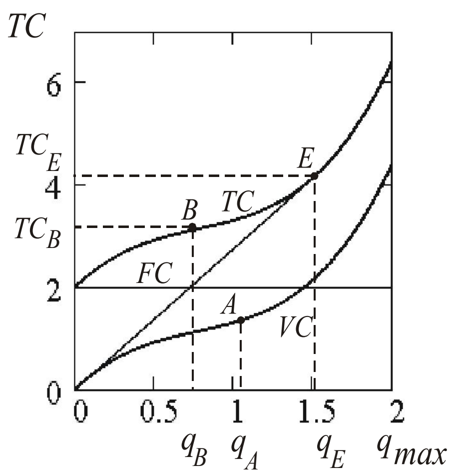


Рис. 4.7 (а)

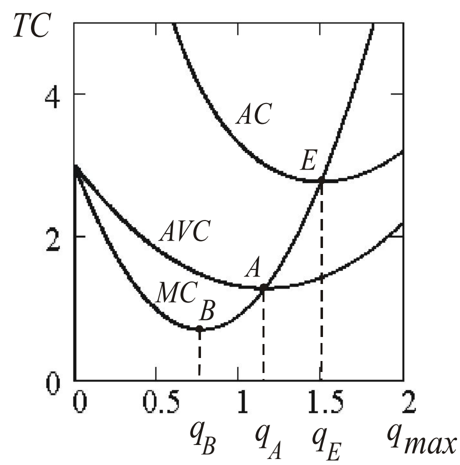


Рис. 4.7 (б)

На рис. 4.7 (б) показано мінімальне значення *MC*, яке досягається в точці *B* при $q = q_B = 0{,}769$, мінімальне значення *AVC* – в точці *A* при $q = q_A = 1{,}154$, а мінімальне значення *AC* – в точці *E* при $q = q_E = 1{,}497$.

Залежно від значень показників вартості, відповідно до збільшення обсягу випуску *q* визначаються чотири стадії виробництва. На **І стадії,** тобто при $q < q_B$, *MC, AC* та *AVC* спадають. На **ІІ стадії,** при $q_B < q < q_A$, *AC* та *AVC* спадають, а *MC* вже зростає. На **ІІІ стадії,** при $q_A < q < q_E$, *AC* ще спадає, а *AVC* вже починає зростати. На **IV стадії,** тобто при *q* в діапазоні від q_E до максимально можливого обсягу випуску в короткостроковому періоді $q_{\max}$ (в прикладі $q_{\max} = 2$), всі показники зростають. Обсяг q_E

можна вважати *ефективним у короткостроковому періоді* з огляду на мінімальний рівень вартості виробництва одиниці продукції.

На рис. 4.7 (б) привертає увагу той факт, що крива граничної вартості *MC* перетинає криві середніх вартостей *AC* та *AVC* у точках їхніх мінімумів (відповідно *E* та *A*). Оскільки ці результати були отримані для конкретної моделі, що визначена співвідношеннями (4.31) і (4.32), то, з методичної точки зору, цю обставину слід довести в загальному випадку. Розглянемо визначення точки A. Координата q_A точки A може бути визначена двома незалежними шляхами: 1) як розвязок рівняння $MC(q) = AVC(q)$; 2) як точка локального мінімуму функції $AVC(q)$, тобто з рівняння $\frac{dAVC(q)}{dq} = 0$. Треба довести, що обидва шляхи визначають ту саму точку. В загальному випадку функція $VC(q)$ може бути розкладена в ряд за степенями q:

$VC(q) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i q^i$ (зауважимо, що ряд починається з першої степені q).

Далі записуємо відповідні рівняння:

1) $MC(q) = AVC(q) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i b_i q_E^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_E^{i-1}$;

2) $\frac{dAVC(q)}{dq} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i b_i q_E^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_E^{i-1}$.

В обох випадках ми отримали одне і те саме рівняння, що і треба було довести.

Вартість у довгостроковому періоді

У довгостроковому періоді можуть змінюватися обсяги використання всіх факторів, тому в складі сукупної вартості неможливо вирізнити фіксовану і змінну вартості. Функцію (і криву) загальної вартості для цього періоду можна побудувати, якщо скористатися кривою експансії (див. рис. 4.6). Для цього потрібно визначити вартість різних наборів факторів *TC*, що відповідають точкам на кривій експансії, та поставити їм у відповідність обсяги випуску. Таким чином, отримаємо сукупність пар *(q, TC)*, тобто залежність $TC = c(q)$ між обсягами *q* та *довгостроковою вартістю* цих обсягів *LRC = TC*. **Довгострокова середня вартість** *(LRAC)* визначається як вартість виробництва одиниці продукції у довгостроковому періоді:

$$LRAC = \frac{LRC}{q}.$$

Розглянемо процес побудови кривої довгострокової середньої вартості *LRAC*. При переході від короткострокового до довгострокового періоду фірма може змінювати рівень фіксованої вартості *FC*. Якщо фірма буде розглядати декілька варіантів розвитку з відповідними різними рівнями *FC*, то для кожного варіанта можна визначити сукупну вартість виробництва та середню вартість. Відповідні криві середньої вартості показано на рис. 4.8.

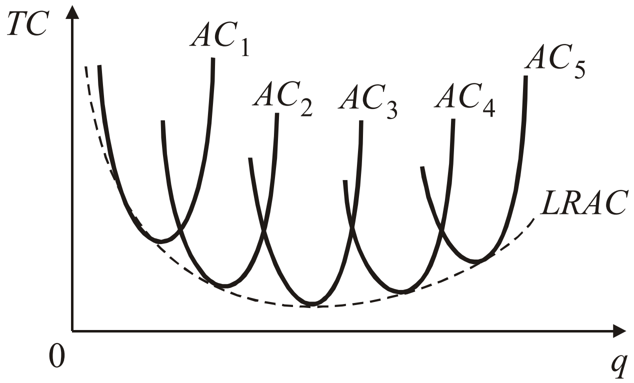


Рис. 4.8. *Довгострокова середня вартість* LRAC

Цей рисунок допомагає визначити, який з варіантів розвитку слід вибрати для досягнення того з можливих обсягів випуску *q,* при якому середня вартість *AC* буде мінімальною. Якщо знайти значну кількість варіантів розвитку з дуже малим кроком зміни *FC*, то тоді можна буде вважати, що *нижня обвідна лінія* на рис. 4.8 і буде довгостроковою кривою *LRAC,* яка дасть змогу для кожного обсягу випуску *q* вказати варіант розвитку з мінімальною середньою вартістю.

Довгострокова гранична вартість *(LRMC)* визначається аналогічно до показника граничної вартості *MC* – як вартість виробництва однієї додаткової одиниці *q:*

$$LRMC = \frac{\Delta LRC}{\Delta q}.$$

Крива *LRMC* закономірно проходить через точку мінімуму кривої *LRAC.*

Типовий вигляд кривої *LRAC* (рис. 4.9) має спадний відрізок при зростанні випуску до $q = q_A$, незмінний – при змінах випуску від q_A до q_B і висхідний – при $q > q_B$.

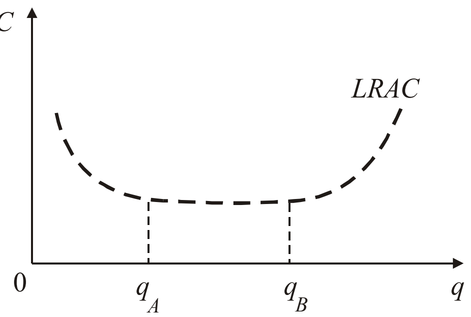


Рис. 4.9

Слід зазначити, що масштаб виробництва крім простого збільшення (або зменшення) обсягів виробництва також має певні наслідки щодо економічної ефективності виробництва. **Економія на масштабі** одержується, якщо при збільшенні випуску вартість виробництва одиниці продукції у довгостроковому періоді зменшується. Якщо ж при збільшенні випуску в довгостроковому періоді вартість виробництва одиниці продукції зростає, то виникають **витрати на масштабі.** Варто наголосити, що такі витрати та економію розглядають лише в довгостроковому періоді та за умови незмінних цін факторів. На відміну від ефектів масштабу, які розглядалися при *незмінних пропорціях* використання факторів, економія та витрати на масштабі аналізуються в умовах *змінних пропорцій* факторів для дослідження економічної ефективності використання ресурсів у вартісних показниках. Зокрема, можна стверджувати, що наявність позитивного ефекту масштабу означає й економію на масштабі, тоді як зворотне твердження в загальному випадку не є правильним.

4.4.5. Моделі поведінки фірми

Математичне моделювання виробництва має враховувати як внутрішні умови економічних процесів, так і зовнішні умови, які зумовлюються оточенням підприємства – середовищем прямої дії та середовищем непрямої дії. Це приводить до складного комплексу моделей діяльності підприємства при заданих умовах, за тих чи інших припущеннях. Значну роль тут відіграє увага до раціоналізації поведінки підприємства, а саме: об'єктивний бік оптимізації процесів виробництва, оптимальний розподіл коштів та використання різних факторів виробництва.

Найбільш поширеними є моделі рівноваги фірми, що будуються за такими припущеннями:

1) технологічні умови виробництва описуються виробничою функцією $q = F(x)$, яка має певний набір властивостей;

2) враховується можливість фірми впливати на ціну своєї продукції та на ціни факторів виробництва. При цьому виникають різні моделі, пов'язані як з умовами досконалої конкуренції, так і з різними проявами недосконалої конкуренції;

3) враховується наявність ресурсних обмежень. При цьому розрізняють *короткострокові моделі поведінки фірми,* коли діють ресурсні обмеження, та *довгострокові моделі,* коли такі обмеження практично не беруться до уваги;

4) метою діяльності фірми є забезпечення максимальних прибутків або мінімізація збитків.

При побудові конкретних моделей поведінки фірми можуть вводитися також різноманітні додаткові припущення, наприклад, пов'язані з урахуванням фактора часу (і не тільки граничних, а й середніх його величин), технологією виробництва тощо.

Виробники товарів та послуг пропонують свої товари на ринках відповідної продукції, де вони взаємодіють з іншими виробниками аналогічної продукції та зі споживачами. Умови взаємодії учасників та ціноутворення на ринках залежать від *ринкової структури,* яка визначається певним набором характеристик. Виділяють такі основні типи ринкових структур – повна конкуренція та повна монополія, олігополія та монополістична конкуренція, монопсонія та монопсонічна конкуренція. Охарактеризуємо повну конкуренцію.

Повна, або **досконала, конкуренція** – це такий тип ринкової структури, при якому:

1) частка кожного постачальника і споживача в загальному обсязі ринкової продукції є незначною, ніхто не домінує на ринку, тому ціна на продукцію даної фірми не залежіть від обсягу виробництва фірми $p(q) = p$;

2) продукція однорідна;

3) учасники можуть вільно входити на ринок та виходити з нього;

4) ні постачальники, ні споживачі не взаємодіють один з одним, (їхня поведінка не є стратегічною);

5) всі учасники цілком проінформовані для визначення своєї поведінки на ринку.

Порушення будь-якої з цих умов призводить до *ринку з неповною конкуренцією.*

Звичайно, умови 1) – 5) змальовують певну ідеальну модель. Серед існуючих ринків до умов повної конкуренції наближаються, наприклад, окремі ринки сільськогосподарської продукції.

Фірми, які діють на конкурентному ринку, – це **конкурентні фірми.** Вони виробляють однорідну або близьку за споживчими якостями продукцію, а їхні інтереси перетинаються на ринку в боротьбі за споживача та при визначенні ринкової ціни з метою максимізації прибутку.

Попит, виручка і прибуток конкурентної фірми

Фірма в результаті продажу своєї продукції на ринку отримує певну *виручку.* Розглянемо показники виручки, які використовуються в економічному аналізі.

Сукупна виручка (дохід) – це сума грошей, яку отримає фірма після продажу своєї продукції на ринку:

$$R = R(q) = Pq. \tag{4.33}$$

Ще раз наголосимо, що ціна в цьому випадку є сталою, а отже, $R(q)$ є лінійною функцією від обсягу q.

Середня виручка – виручка від реалізації одиниці продукції:

$$AR = R(q)/q = P. \tag{4.34}$$

Гранична виручка – це зміна загальної виручки внаслідок продажу додаткової одиниці продукції:

$$MR = \Delta R(q)/\Delta q\,, \qquad (4.35)$$

або:

$$MR = dR(q)/dq = P. \qquad (4.36)$$

Рівноважна ціна та обсяг продукції на повністю конкурентному ринку, що перебуває у стані рівноваги, встановилася внаслідок взаємодії тисяч конкуруючих учасників як з боку попиту, так і з боку пропозиції. Особливістю такого ринку є те, що жодна окрема фірма не може відхилитися від рівноважної ціни. Це дуже добре видно, коли йдеться про спробу підвищити ціну. Адже на ринку присутні багато продавців абсолютно ідентичної продукції, яка є однаково доступною покупцям, і вони не будуть платити більше за те, що можна купити дешевше. Далі переконуємося, що й знизити ціну, порівняно з рівноважною, на конкурентному ринку теж неможливо, оскільки виробництво при нижчій ціні реалізації буде збитковим для виробника. Окремий виробник не може вплинути на рівноважну ринкову ціну і змінити обсяг своєї пропозиції, оскільки його частка є дуже малою в галузевому обсязі пропозиції.

Отже, конкурентна фірма будь-який обсяг свого випуску може продати лише за ціною ринкової рівноваги P_E. Інакше кажучи, ціна попиту на продукцію окремої конкурентної фірми є сталою для різних обсягів q. Це означає, що мають місце рівності:

$$MR = AR = P_E\,. \qquad (4.37)$$

Отже, попит на продукцію конкурентної фірми є абсолютно еластичним, а відповідна крива попиту є горизонтальною лінією, що відповідає ціні P_E. Саме з горизонтальною кривою попиту на свою продукцію (яка має назву *специфічної кривої попиту)* стикається кожна фірма на повністю конкурентному ринку. Саме через це фірма на такому ринку називається **ціноодержувачем,** адже вона зовсім не впливає на ринкову ціну, а одержує її як встановлену ринком.

Прибуток π будь-якої фірми утворюється як різниця між доходом від продажу продукції та її вартістю для виробника:

$$\pi = R - TC\,. \qquad (4.38)$$

Надалі прибуток будемо розглядати в значенні економічного прибутку.

Максимізація прибутку фірми

Задача максимізації прибутку може бути розв'язана в аналітичному та графічному вигляді. Розглянемо наступний приклад. Нехай вартість виробництва продукції задана функцією:

$$TC(q) = 1 + (q-1)^3 + 0{,}3q\,. \qquad (4.39)$$

Дохід є функція:

$$R(q) = pq = 1{,}4q\,. \qquad (4.40)$$

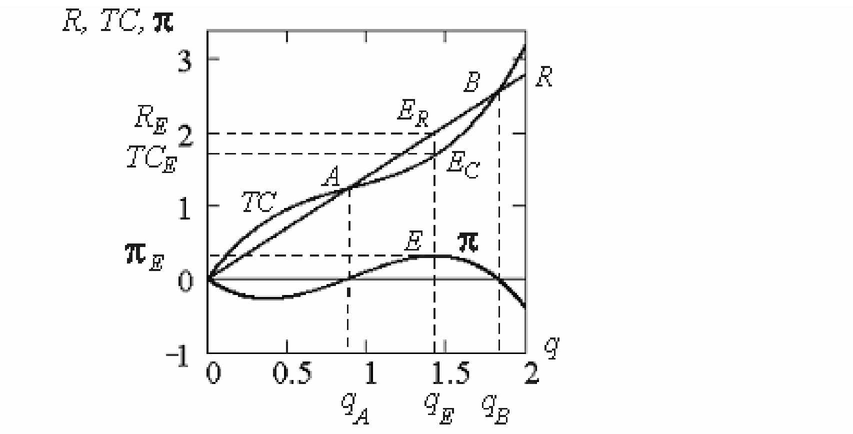


Рис. 4.10. *Прибуток фірми*

На рис. 4.10 зображені розраховані за (4.38) – (4.40) лінії доходу *R*, вартість виробництва *TC* і прибутку π. Розрахунки приводять до наступних значень: $q_A = 0{,}877$, $q_E = 1{,}426$, $q_B = 1{,}821$, $R_E = 1{,}96$, $TC_E = 1{,}652$, $\pi_E = 0{,}308$. При малих обсягах випуску (до q_A) фірма матиме збитки, а при обсягах випуску в діапазоні від q_A до q_B – прибутки. Максимальний прибуток досягається при $q = q_E$, а при обсягах випуску, які перевищують q_B, фірма знову матиме збитки.

Аналітичний пошук максимального прибутку полягає, очевидно, в максимізації функції $\pi(q) = R(q) - TC(q)$, тобто:

$$M\pi = \frac{d\pi}{dq} = \frac{dR}{dq} - \frac{dTC}{dq} = MR - MC = 0 \text{ при } q = q_E, \qquad (4.41)$$

де $M\pi$ **– граничний прибуток.** Якщо виконуються і відповідні достатні умови екстремуму, то за обсягу випуску q_E матимемо максимальний прибуток π_E. Отже, умова максимізації прибутку має вигляд: *MR* = *MC*. Ця умова називається **правилом граничного прибутку.**

Графічний розв'язок задачі максимізації прибутку з використанням граничних величин показано на рис. 4.11. З рівності (4.41) знаходимо: $MC(q_E) \equiv MC_E = MR = P_E$. Сукупна виручка $R = P_E \cdot q_E = MC_E \cdot q_E$ графічно визначається площею відповідного прямокутника. При обсязі q_E середня вартість дорівнюватиме AC_B. Отже, сукупна вартість графічно визначається як $TC = TC(q_E) = AC_B \cdot q_E$. Тоді прибуток визначиться як різниця площ відповідних прямокутників і чисельно дорівнює площі прямокутника $AC_B P_E EB$. Ця площа дорівнює $q_E \cdot 1.4 - TC(q_E) = 0{,}308$, що збігається з безпосереднім обчисленням максимального прибутку.

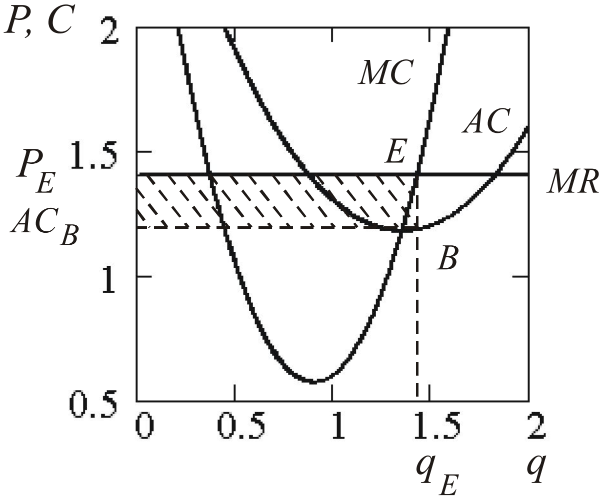


Рис. 4.11

Рис. 4.11 відповідає випадку, коли фірма має додатковий економічний прибуток $\left(P_E > AC_B\right)$. Якщо $P_E = AC_B$ економічний прибуток дорівнює нулеві, тобто фірма може забезпечити собі лише нормальний прибуток, а у випадку $P_E < AC_B$ задача максимізації прибутку фактично перетворюється на задачу мінімізації збитків через високий рівень середньої вартості.

Умова незбитковості фірми досягається, якщо:

$$P = \min AC. \tag{4.42}$$

Ця умова виконується у точці мінімуму кривої ***AC***, тобто в **точці не збитковості,** й означає можливість отримувати лише нормальний прибуток.

У короткостроковому періоді фірма може залишатися в галузі навіть за наявності певних збитків, оскільки у випадку миттєвого припинення діяльності вона не втрачає вартість фіксованих факторів *FC,* а припиняє витрачати кошти лише на придбання змінних факторів (*VC*). Тому фірма може залишатися в галузі за наявності збитків, які не перевищують *FC,* аж доти, доки вона не зможе змінити обсягу *FC*:

$$Втрати = TC - R = FC + VC(q) - Pq \le FC;$$

$$VC(q) \le Pq \text{ або } P \ge AVC.$$

Умова закриття фірми в короткостроковому періоді означає, що виручка не може компенсувати навіть фіксовану вартість *FC,* тобто фірмі варто вийти з галузі за цін $P < \min AVC$. Точка *B* дотику кривої *AVC* до лінії $P_0 = MR_0$ на рис. 4.12, для якої виконується умова $P = \min AVC$, має назву **точки закриття.**

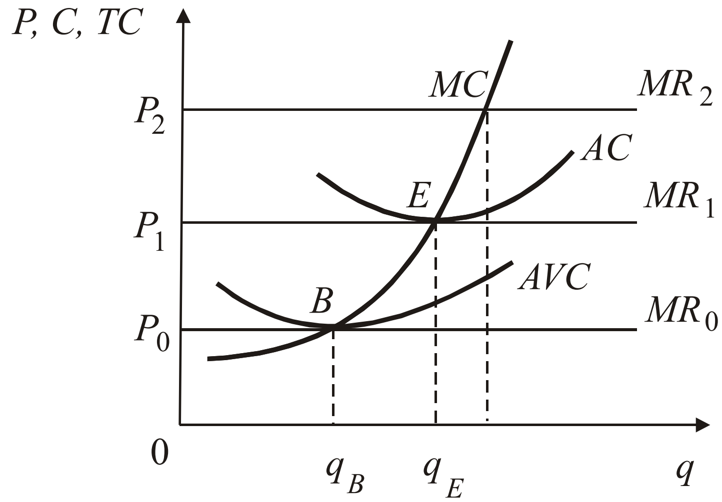


Рис. 4.12

4.5. Оптимальна поведінка фірми на фінансовому ринку

У цьому підрозділі досліджується модель оптимальної поведінки фірми на фінансовому ринку в умовах повної інформації, що дозволяє уточнити й модифікувати структуру критерію ефективності реалізованих фірмою інвестиційних проектів (див [9]). Поряд з традиційним визначенням ставки дисконту, визначається й правило оцінки фінансової доцільності інвестиційного проекту.

Дисконтування й напрями інвестування

Розглянемо комерційну структуру – фірму, що вкладає кошти у виробничі або фінансові інвестиційні проекти. Для ухвалення рішення про участь у тому або іншому проекті фірма повинна оцінити його ефективність. Відповідні розрахунки звичайно проводяться на базі пов'язаних із проектом грошових потоках, що зазвичай охоплюють кілька років. Ми розглядаємо *детерміновану* ситуацію й припускаємо ці потоки точно відомими.

Урахування нерівноцінності різночасних доходів/видатків звичайно проводиться шляхом дисконтування, для чого фірма використовує спеціальний норматив – *ставку дисконту* (в деяких джерелах фігурує термін *норма дисконту,* у західній літературі – discount rate). Критерій ефективності проекту – інтегральний ефект (чистий дисконтований дохід, ЧДД, NPV) при цьому має вигляд:

$$ЧДД = \sum_t \alpha_t f_t\,, \tag{4.43}$$

де f_t – чистий дохід (грошові надходження мінус видатки) по проекту на інтервалі часу t (кроці, році); α_t – коефіцієнт дисконтування для інтервалу часу *t.*

Критеріальний характер показника $ЧДД$ проявляється в тому, що:

1) якщо $ЧДД$ проекту від'ємний, проект розглядається як неефективний і не рекомендується для реалізації, а якщо ні, то проект оцінюється як ефективний і рекомендується для реалізації;

2) з декількох альтернативних проектів (або варіантів одного проекту) більш ефективним і рекомендованим до реалізації вважається той, у якого $ЧДД$ більше.

Звичайно ставка дисконту E вважається незмінною в часі, і тоді (якщо всі кроки мають однакову тривалість, а період реалізації проекту починається з кроку 0) коефіцієнти дисконтування визначаються за формулою: $\alpha_t = 1\Big/(1+E)^t$. При використанні таких коефіцієнтів дисконтування показник $ЧДД$ має наступні властивості:

1) знак $ЧДД$ (і тим самим висновок про ефективність або неефективність проекту) не залежить від того, у якому році починається реалізація проекту;

2) при більш пізньому початку проекту його $ЧДД$ зменшується. Іншими словами, більш пізніший початок ефективного проекту економічно нераціональний.

У загальному випадку ставка дисконту по кроках змінюється й пов'язана з коефіцієнтами дисконтування співвідношеннями:

$$\alpha_t = 1\Bigg/\prod_{s=1}^{t}(1+E_s), \quad E_t = \alpha_{t-1}\big/\alpha_t - 1. \tag{4.44}$$

У детермінованій ситуації, яку ми далі розглядаємо, під ставкою дисконту для фірми звичайно розуміється *максимальна прибутковість альтернативних і доступних для цієї фірми інвестицій.* Тим самим ця ставка розглядається як деяка характеристика, що відображає взаємини фірми та її економічного оточення. Однак таке визначення недостатньо конструктивне: з нього не видно, які саме альтернативні інвестиції повинні братися до уваги. Ця нечіткість створює труднощі при практичних оцінках ставки дисконту.

Наприклад, альтернативними й доступними найчастіше є вкладення коштів на депозит або в довгострокові державні цінні папери. Тому зазвичай ставка дисконту приймається рівній ставці депозитного відсотка або прибутковості державних облігацій. Але яку саме ставку або прибутковість треба приймати, якщо ці показники згодом змінюються, якщо прибутковість річних депозитів менша, ніж прибутковість дворічних, і т.ін.?

Однак деякі інвестиційні проекти, наявні в "портфелі" фірми, дають більш високу прибутковість, ніж депозити. Тому часто запитують, а чому б при оцінці даного проекту як ставку дисконту не прийняти найбільшу прибутковість інших, альтернативних проектів. Розгляд цієї проблеми показав некоректність такої поведінки. Приведемо лише один із прикладів, що підтверджує це.

Приклад 1. Є три напрями вкладень: депозит, що дає прибутковість 10% річних, проект А, що вимагає вкладень 100 (умов. гр. од.) й дає щорічний дохід 30, і альтернативний проект Б, що вимагає вкладень 250 й дає щорічний дохід 51. При ставці дисконту 10% *ЧДД* проекту *А* складе 30/0.1 – 100 = 200, *ЧДД* проекту Б – 51/0.1 – 250 = 260. Тому проект Б кращий, ніж проект А.

Нехай, однак, при оцінці цього проекту фірма прийняла ставку дисконту рівної прибутковості проекту *А*, тобто 30%. Тоді *ЧДД* проекту Б буде від'ємним: 51/0.3 – 250= -80. Здавалося б, від проекту Б треба відмовитися. Це підтверджує й аналогічні розрахунки по проекту А. Дійсно, прийнявши ставку дисконту 20% рівної прибутковості проекту Б, знайдемо, що *ЧДД* проекту А позитивний і становить 30/0.2 – 100 = 50. Тим часом відмова від проекту Б для фірми невигідна. Щоб у цьому переконатися, припустимо, що в момент ухвалення рішення фірма має вільні кошти в обсязі 300. Оцінимо наслідки кожного з її можливих розв'язків.

1. Якщо фірма реалізує проект А, вона вкладе в проект 100, а залишок 200 доведеться покласти на депозит. У результаті вона буде одержувати річний дохід 30 + 200*0.1 = 50;
2. Якщо фірма реалізує проект Б, вона вкладе в проект 250, залишок 50 покладе на депозит. У результаті вона буде одержувати річний дохід 51 + 50*0.1 = 56.

Таким чином, реалізуючи проект Б, фірма буде одержувати більші доходи, ніж при відмові від цього проекту.

З прикладу видно, що прибутковість вкладень в альтернативний проект Б не можна відображати в ставці дисконту тому, що цей проект неподільний і не тиражований – вкладення в нього можна здійснити тільки у фіксованому обсязі й у фіксований момент часу. З іншого боку, намагаючись розібратися в прикладі, ми змушені були розглянути «вузьке» завдання порівняння двох альтернатив як елемент більш «широкого» завдання раціонального управління вільними коштами фірми.

У цьому зв'язку зазначене вище "традиційне" визначення ставки дисконту зажадало уточнення. Ця ставка може трактуватися трохи інакше – як *максимальна прибутковість альтернативних і доступних для цієї фірми напрямів інвестування.* При цьому під "напрямами інвестування" треба розуміти інвестиційні проекти, у які можна вкладати будь-який обсяг коштів у будь-який момент часу.

Під таке визначення дійсно не підпадає конкретний проект, який можна здійснити тільки один раз і тільки в даному році. Однак під нього не підпадають і «звичайні» вкладення коштів на депозити або в цінні папери. Так, проект «вкласти кошти в Ощадбанк України» дає одну прибутковість сьогодні й зовсім іншу – через рік. Зазначені труднощі нескладно обійти. Якщо, наприклад, ставка дисконту визначається прибутковістю вкладень на депозит Ощадбанку, а ця прибутковість у різні роки різна, то ми повинні вважати, що й ставки дисконту будуть різними в різні роки. Однак прийнявши такий підхід, ми повинні будемо ще раз уточнити визначення вихідних понять. А саме, тепер ставку дисконту для даного року (або іншого часового інтервалу) слід визначити як максимальну прибутковість альтернативних і доступних для фірми в цьому році напрямів інвестування, а під напрямами інвестування слід розуміти інвестиційні проекти, які можуть бути поділені й тиражовані, і у які можна вкладати будь-який обсяг коштів у даному році.

Однак і тут потрібно конкретизувати, що розуміти під прибутковістю подільних і тиражовних проектів, вкладення в які розтягнуті в часі, а доходи в різні роки різні.

Приклад 2. Інвестор вкладає кошти в придбання жилої або офісної площі: частину на стадії будівництва будинку, а решту – при облаштуванні вже побудованого приміщення. Після цього інвестор здає площі в оренду, причому ставки орендної плати згодом змінюються. Тут незрозуміло, як визначити прибутковість такого проекту й до якого моменту часу (до початку будівництва або до закінчення обробки) її віднести.

Звернемо увагу й на ще одну обставину. Для забезпечення реалізовності проектів нерідко використовуються позики. Звичайно, пов'язані з ними грошові надходження й платежі включаються в грошовий потік проекту. Однак позики можливі й без проекту, і така можливість повинна якось відображатися в ставці дисконту, що традиційними підходами до її встановлення ігнорується.

Очевидно, причина зазначених труднощів у тому, що сама ставка дисконту в чистому вигляді в навколишньому середовищі не є присутньою (тому так важко дати які-небудь конкретні рекомендації про те, як її звідти «витягти»), проявляючись із тими або іншими відхиленнями в спостережуваних фінансово-економічних показниках (процентних ставках, ф'ючерсних котируваннях, показниках прибутковості тих або інших проектів і т.ін.).

Спробуємо розібратися в зазначених труднощах і зрозуміти, з якими саме характеристиками навколишнього економічного середовища пов'язана ставка дисконту і як саме вона з ними зв'язана. З цією метою ми використаємо підхід, викладений вище в прикладі 1, і розглянемо завдання оцінки реальних інвестиційних проектів як частину більш загального завдання оптимізації управління активами фірми.

Опис моделі

Нехай у розрахунковому періоді, що починається з кроку 0 й закінчується на початку кроку T, на ринку обертається деяка кількість *мобільних активів* (визначення «мобільний» далі іноді буде опускатися) – акцій, облігацій, депозитів, іноземної й вітчизняної валюти й т.ін., а також високоліквідних реальних товарів, кожному виду яких привласнений певний номер. Депозити, що відкриваються в різний час або на різні терміни, ми розглядаємо як різні активи. Активом з номером 0 будемо вважати *готівку* (кошти в грн.). Усі інші мобільні активи будемо іноді називати «не грошовими». Активи можна продавати, купувати й одержувати від них дохід (чисті грошові надходження).

Кожний актив n на кроці t ми характеризуємо його *«прибутковістю»* d_{nt} і *«курсами»* купівлі b_{nt} й продажу c_{nt}. Введені поняття й показники вимагають більш докладного роз'яснення:

1. Ціни продажу й купівлі готівки ми вважаємо рівними 1.

2. Курси купівлі й продажу активів можуть різнитися (наприклад, у зв'язку з податками або втратами, що виникають при покупці/продажу акцій).

3. Деякі активи на деяких кроках не можна продавати або купувати. Відповідно, курси продажу при цьому вважаються нульовими, а курси купівлі – нескінченно великими.

4. Під прибутковістю активу ми розуміємо *чистий* дохід (дохід мінус податки), принесений одиницею активу на даному кроці (тому дохід від одиниці активу n, придбаного на кроці t, буде d_{nt+1}. Зазначимо, що прийняті позначення фактично означають – $d_{nt+1} = d_{n,t+1}$).

5. Під «покупкою» депозиту ми розуміємо вкладення коштів на нього. Кількість депозитів вимірюємо сумою вкладених на них грн., так що курс покупки депозиту (на тому кроці, де такий депозит «існує») буде рівний 1.

6. Дохід по депозиту до його закриття – це виплачувані відсотки по ньому, у момент закриття – вкладена сума з відсотками за останній крок, після чого дохід буде нульовим.

7. Прибутковість фінансових інструментів може залежати від термінів їх обігу. Наприклад, дисконтна облігація номіналом 100 грн. з погашенням через рік може коштувати на ринку 80 грн., а така ж облігація з погашенням через 2 роки – 60 грн. Тоді річна прибутковість першої облігації складе $100/80 - 1 = 0{,}25 = 25\%$, а другої $(100/60)^{1/2} - 1 = 0{,}291 = 29{,}1\%$.

8. Під «продажем» депозиту ми розуміємо його дострокове закриття. Оскільки нараховані відсотки враховуються в складі доходу по депозиту, а при його достроковому закритті вкладникові повертається тільки вкладена сума, іноді з невеликими відсотками, то курс «продажу» рівний або трохи більше 1.

9. Тезаврація ("просте зберігання") готівки відображається як її продаж або покупка за курсом 1.

10. Прибутковість тезаврації d_{0t}, загалом кажучи, від'ємна, тому що зберігання готівки (включаючи й гривні на розрахунковому рахунку) також вимагає витрат. Однак для коштів, з якими фірма вступає в розрахунковий період, ми приймаємо $d_{0t} = 0$.

Вважаємо, що кількість активів, що купуються або продаються фірмою на кроці *t*, не обмежується й не впливає на їхні курси й прибутковісті. Це значить, що такі операції на кожному кроці будуть *подільними* й *тиражованими* інвестиційними проектами, що дозволяє трактувати їх як напрями інвестування. У той же час, на кожному кроці деякі такі напрями можуть «не існувати» (точніше, їм будуть відповідати нескінченні значення курсів покупки й нульові ставки прибутковості). Наприклад, сьогодні не можна вкласти гроші на депозит по ставці, яка пропонувалася торік або буде пропонуватися наступного року.

Звернемо тепер увагу, що крім фінансових операцій з активами фірма може вести іншу (*«сторонню»*) комерційну діяльність, наприклад, брати участь у реальних інвестиційних проектах. Зрозуміло, що з цією діяльністю пов'язані притоки й відтоки готівки, які ми задамо екзогено, припускаючи, що розрахунки з постачальниками й покупцями проводяться в гривнях, а не в іноземній валюті. Однак за рахунок інвестиційних видатків фірма одержує не тільки готівку (наприклад, у формі прибутку), але й деякі реальні активи іншого роду (будинки, устаткування й т.ін.). Такі активи назвемо *зв'язаними.* Вони суттєво відрізняються від мобільних (готівка), оскільки:

1) носять «комплексний» характер (дійсно, «фізично», наприклад, завод складається з «простих» активів (будинків, споруджень, верстатів і т.ін.); однак ці «прості» активи, узяті окремо, здатні дати суттєво менший дохід, ніж коли вони функціонують у єдиному комплексі);

2) неподільні (скажемо «половина заводу» (але не його акцій!) взагалі не може існувати ні як фізичний об'єкт, ні як об'єкт комерційних операцій);

3) пов'язані з реалізацією конкретних проектів, внаслідок чого операції з ними обмежені; якщо акцію можна продати або купити в будь-який час, то створені по інвестиційному проекту об'єкти можна продати лише тоді, коли проект це передбачає; для визначеності ми приймемо, що наприкінці періоду зв'язані активи не продаються;

4) відрізняються характером принесених чистих доходів: зв'язок цих доходів з балансовою або ринковою вартістю підприємства досить опосередкований; більше того, якщо дивіденди за акціями в будь-якому році невід’ємні, то експлуатація промислового об'єкта в деякі періоди може давати від’ємний чистий дохід.

В операціях покупки й продажу зв'язані активи не беруть участь (і тим самим ніякого номера i їм не привласнюється). Наявність таких активів і доходи від них ураховуються в моделі за допомогою двох параметрів, що екзогено задаються по кроках: f_t – потік готівки від сторонньої діяльності на кроці t; α_t – ринкова вартість зв'язаних на початок кроку t активів. Природно, що деякі з величин f_t можуть виявитися від’ємними й досить великими, тоді для фінансування відповідних видатків наявних коштів може виявитися недостатньо. У подібних ситуаціях фірми звичайно беруть *кредит* (позику) на той або інший термін з тим або іншим графіком погашення, і з цим пов'язаний свій специфічний грошовий потік.

Здавалося б, нашу модель необхідно доповнити операціями одержання й погашення кредиту. Однак має сенс глянути на проблему ширше, враховуючи, що з бухгалтерської точки зору кредит є зобов'язанням (пасивом), а при відсутності «вільних» активів фірма звичайно випускає боргові зобов'язання в якій-небудь припустимій формі (кредит, облігація, вексель і ін.). Більше того, ті активи, які може придбати фірма в нашій моделі, насправді є чиїмись зобов'язаннями. Це змушує розширити викладену модель в іншому напрямі.

Будемо вважати, що на кожному кроці є деякий набір зобов'язань (включаючи й кредитні), які може випустити фірма при нестачі готівки. Зобов'язання, випущені в різні моменти часу або на різних умовах, будемо вважати зобов'язаннями різного виду. Показники, що відносяться до зобов'язань, домовимося позначати верхніми індексами.

Обмежимося далі такими зобов'язаннями, які дають однократні грошові надходження, а потім вимагають тільки видатків. Такі зобов'язання будемо вимірювати в гривнях початкових надходжень (тобто «одним зобов'язанням» або «однієї штукою зобов'язань» будемо вважати зобов'язання, що дає 1 грн. грошових надходжень). На відміну від активів зобов'язання не продаються так, що їхня кількість згодом не зменшується. Інша справа, що після погашення зобов'язання платежі по ньому стають нульовими. Домовимося вважати, що всі платежі по зобов'язанню пропорційні його розміру. Це трохи ідеалізує реальну ситуацію: наприклад, зазвичай ставка кредиту залежить від його обсягу .

Однак при такому допущенні зобов'язання стають подільними й тиражованими проектами, грошові потоки яких улаштовані «навпаки»:

вони починаються з припливу готівки, а закінчуються відтоками (при бажанні, можна вважати їх інвестиційними проектами з погляду кредитора).

Розглянемо тепер одиницю зобов'язання i (1 грн.) на кроці t. Основною з його характеристик є заборгованість l^{it} Ця величина відображає непогашений борг за кредитом або номінальну вартість облігації, виплачувану при її погашенні. У момент випуску зобов'язання ця величина дорівнює грошовим надходженням по зобов'язанню, тобто одиниці, що до цього моменту й після терміну погашення вона дорівнює нулю. Відповідно, різниця $l^{it-1} - l^{it}$ відіб'є чисті доходи від зобов'язання (надходження коштів у момент випуску й платежі для погашення – на наступних кроках). Нарешті, з даним зобов'язанням пов'язана й виплата відсотків (купонного доходу). Якщо позначити ставку відсотка, що сплачується на кроці t (на заборгованість попереднього *кроку*), через r^{it}, то платіж за зобов'язанням тут складе $r^{it} l^{it-1}$.

Зауважимо, що якщо прибутковість якихось мобільних активів вища від кредитної ставки, фірмі стають вигідними "арбітражні" операції: взяти великий кредит і витратити його на придбання відповідних активів з метою продажу їх наприкінці кроку за ціною, що перевищує видатки за погашення кредиту. Не випадково, що банки обмежують обсяги запозичень. Будемо вважати, що на кожному кроці сума заборгованості за усіма зобов'язаннями не повинна перевершувати взятої з деяким коефіцієнтом h (звичайно $h = 0.7$) суми ціни продажу залишків активів з попереднього кроку (включаючи й зв'язані) і доходу від цих активів.

Звичайно відсоток за кредитами перевищує відсоток за депозитами. У нашій моделі ситуація може бути складнішою. Якщо кредитний відсоток менший від відсотка за депозитами на 1 крок, фірмі стає вигідно брати кредит і вкладати його на депозит. Однак розмір кредиту обмежений і нескінченно великого доходу від цього одержати не можна (тому банки можуть знизити кредитний відсоток, якщо в них надлишкові кошти й немає більш доходних способів їх використання, хоча частіше роблять так з іноземною валютою). З іншого боку, якщо в перспективі процентні ставки знижуються, то ставка відсотка за «одно кроковими» кредитами може також знижуватися, залишаючись більше ставки по однокрокових депозитах, але менше середньокрокової ставки за багатокроковими депозитами.

Фінансову поведінку фірми на кожному кроці опишемо так. Вступивши в даний крок з деяким набором активів, фірма потім:

– продає частину наявних активів;

– одержує дохід від активів, що були на попередньому кроці;

– змінює кількість зв'язаних активів і готівки за рахунок сторонньої діяльності;

– випускає зобов'язання;

– повністю або частково погашає раніше випущені зобов'язання;

– частину готівки, що залишилась, витрачає на покупку інших активів.

Отриманий після цього набір активів залишається незмінним до вступу в наступний крок.

Необхідно знайти фінансову політику, яка максимізує готівку фірми до кінця періоду. Шуканими параметрами цієї політики будуть наступні невід'ємні змінні: v_{nt}, – кількість активів виду n у фірми наприкінці кроку t (величина v_{n0} при цьому відображає відому початкову кількість цих активів) – з цією кількістю активів фірма вступає в наступний крок; w^i – кількість зобов'язань виду i, випущених і погашених фірмою в розрахунковому періоді, x_{nt} – число активів n, які фірма продає на початку кроку t $(x_{0t} = 0)$; y_{nt} – кількість активів n, які фірма купує на початку кроку t $(y_{0t} = 0)$.

Ці змінні пов'язані наступними співвідношеннями:

а) кількість негрошових активів на початку кроку змінюється відповідно до обсягів їх продажів і покупок:

$$v_{nt} = v_{nt-1} - x_{nt} + y_{nt}; \tag{4.45}$$

б) кількість готівки на кроці змінюється відповідно до грошових надходжень від активів, продажів, зобов'язань і сторонньої діяльності за винятком видатків на покупку активів і платежів за зобов'язаннями:

$$v_{0t} = v_{0t-1} \sum_n (d_{nt} v_{nt-1} + c_{nt} x_{nt} - b_{nt} y_{nt}) -$$

$$- \sum_i w^i (l^{it-1} - l^{it} + r^{it} l^{it-1}) + f_t; \tag{4.46}$$

в) загальна заборгованість за зобов'язаннями не перевершує взятої з коефіцієнтом h ціни продажу наявних активів (включаючи зв'язані активи, доходи від активів, що були на попередньому кроці, і від продажу частини цих активів) на початок кроку:

$$\sum_i w^i l^{it} \le h \left[\sum_n (c_{nt} + d_{nt}) v_{nt-1} + a_1) \right], \quad t < T, \tag{4.47}$$

умова $t < T$ відображає той факт, що на останньому кроці всі зобов'язання погашаються;

г) необхідно максимізувати готівку на кроці T за умови погашення заборгованості за усіма випущеними зобов'язаннями:

$$v_{0\tau} - \sum_{n} w^i l^{i\tau} \to \max, \tag{4.48}$$

Звернемо увагу, що розв'язок цього завдання не зміниться, якщо дозволити операції «вільного знищення» мобільних активів. При цьому знаки рівності в (4.45) – (4.46) заміняться знаками «<».

Розглянемо спочатку окремий випадок, коли в початковий момент (на кроці 0) фірма має тільки готівку v_{00}. Тоді початковий капітал при оптимальній фінансовій політиці зросте в $v_{0\tau}/v_{00}$ разів. Таким же повинен бути й коефіцієнт приведення готівки кроку 0 до кроку T, і йому відповідає ставка дисконту:

$$E = \sqrt[T]{v_{0\tau}/v_{00} - 1}. \tag{4.49}$$

Ця ставка в цілому залежить від тривалості розрахункового періоду T (чим швидше прагне фірма «перетворити гроші в гроші», тем менше буде прибутковість її операцій). Слід також розглянути поведінку v_{0T} npu великих T для незмінного в часі складу активів, що обертаються на ринку, кожний з яких може давати як додатні, так і від'ємні чисті доходи (без урахування можливості одержання кредиту). Вона виявляється наступною. Нехай $f_i(\lambda)$ це *ЧДД* при ставці дисконту λ від одиниці вкладень в актив i, причому $f_i(0) > 0 > f_i(\infty)$, $f(\lambda)$ – найбільше з $f_i(\lambda)$, λ – найменший додатний корінь рівняння $f(\lambda) = 0$ і $h+1$ – кратність цього кореня. Тоді зі зростанням T величина $v_{0\tau}$ зростає як $(1+\mu)^T / T^h$, так що ставка дисконту (4.49) прагне до μ.

Побудована модель дозволяє розрахувати коефіцієнти α_T для різної тривалості розрахункового періоду T. Вирішуючи завдання для різних T, можна знайти залежність α_T від T і вона може не бути експонентною. Тому ставка (4.49) буде *середньою* для розрахункового періоду. У той же час, ставку для конкретного кроку *t* можна знайти за формулою: $E_t = \alpha_t / \alpha_{t+1} - 1$. Динаміка E_t залежить від кон'юнктури ринку й прибутковості нових активів, що з'являються на ньому.

Звернемо увагу, що при цьому E_t уже не буде максимальною прибутковістю якого-небудь активу – зв'язок ставок дисконту з доходами від активів буде більш складним. Наведемо приклади.

Приклад 3. Припустимо, що на ринку, крім готівки, є тільки депозити: річні (ставка 10%) і дворічні (ставка 32%). Відсотки виплачуються при закритті депозиту. Інвестор має 1 грн. і максимізує свій капітал через 2 роки.

Очевидно, що йому треба вкласти кошти на дворічний депозит, так що 1 грн. сьогодні для нього еквівалентна 1,32 грн. через 2 роки. Але чому еквівалентна 1 гривня через рік? Припустимо, що через рік в інвестора звідкись з'являється додаткова гривня. Тоді кращим способом її використання буде вкладення на річний депозит. Таким чином, 1 грн. першого року буде еквівалентна 1,1 гривні другого року. Звідси одержуємо, що 1 грн. сьогодні еквівалентна 1,32 грн. через 2 роки, які, у свою чергу, еквівалентні 1.32/1.1 = 1.2 грн. через рік. Відповідно ставка дисконту для другого року рівна 0.1 (10%), а для першого – 0.2 (20%). При цьому отримана цифра (20%) не відображає прибутковості ніякого з депозитів, узятих окремо.

У наступному прикладі розглянемо більш складну ситуацію.

Приклад 4. Припустимо, що на ринку крім грошей є тільки активи у вигляді річних і дворічних депозитів. Випуск зобов'язань (використання кредитів) не передбачається. Пролонгація депозитів не дозволяється, а при передчасному їхньому закритті відсотки не виплачуються. Депозитні ставки (мінливі по роках) вказані в табл. 1.

Таблиця 1

Ставка	**Роки**			
	0	**1**	**2**	**3,4,...**
Річних депозитів, %	20	18	15	12
Дворічних депозитів, %	48	42	34	27

Таблиця 2

Ставки	**Роки**							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Коефіцієнту дисконтування α_t,	0.833	0.675	0.586	0.504	0.450	0.39	0.354	0.312
Дисконту *E,, %*	20.0	23.3	15.1	16.4	12.0	13.4	12.0	13.4

Розрахунки за моделями при різних T дозволили знайти наступні значення коефіцієнтів приведення відповідних їм ставок дисконту (у цьому випадку значення α_t однакові для будь-якої тривалості розрахункового періоду $T \geq t)$ (табл. 2).

Оптимальна політика при цьому наступна. Для парних T треба всі кошти вкладати у дворічні депозити, а в «проміжні» роки нічого не робити. Для $T = 3$ кошти треба вкласти спочатку в річний депозит, а потім у дворічний. Для непарних $T > 5$ треба два рази вкладати кошти у дворічні депозити, потім – у річний і після цього – знову у дворічні.

Помітимо, що при більших T ставка дисконту періодично коливається так, що «граничної» ставки не існує. Імовірно, так буде завжди, якщо розглядати кінцеве число повторюваних у часі типів активів. У реальності ситуація інша, оскільки фінансові операції проводяться щодня й відповідні «ціни» (ставки) безупинно змінюються.

У загальному ж випадку розв'язок завдання (4.45) – (4.48) буде залежати *від початкової структури інвестиційного портфеля* фірми. Це значить, що ставка дисконту залежить не тільки від об'єктивних, загальноринкових, але й від суб'єктивних факторів (у цьому випадку – від структури капіталу фірми). Іноді (наприклад, при більших витратах по проекту) система (4.45) – (4.48) може бути нерозв'язна. Навпаки, при її можливості розв'язання одержуваних на кожному кроці доходів буде досить для фінансування всіх видатків за проектом й фінансовими операціями. Це значить, що проект буде *фінансово реалізований* тоді й тільки тоді, коли система (4.45) – (4.48) розв'язна. З цією метою також рекомендується перевірка невід’ємності накопичених компаундированих чистих доходів (без обліку депозитів) $\sum_{\tau=1}^{t} f_\tau (1+d)^{t-\tau} \geq 0$, де d – депозитна ставка. Це припускає нагромадження чистих доходів на «одно кроковому» депозиті для фінансування майбутніх видатків. Звичайно, якщо це вдається (тобто на депозиті завжди виявляється невід’ємна сума), то проект фінансово реалізований. Однак зворотне невірно: так, іноді фінансова реалізованість забезпечується спільним використанням декількох фінансових інструментів, включаючи й багатокрокові депозити, і структура критерію виявляється іншою.

Двоїста модель і ставки дисконту

Важливі властивості оптимальної політики управління активами випливають із розгляду двоїстої моделі. Її невідомі – позначимо їх p_{nt}, p_{0t}, і q_t – невід’ємні й відображають зміну критерію (4.48) при зміні правих частин обмежень (4.45) – (4.47) на малу одиницю; p_{nt} – оцінка («цінність») одиниці активу *n* на кроці t, а q_t – оцінка права на одержання 1 грн. боргових зобов'язань на цьому кроці (якщо заборгованість нульова або менше максимально припустимої, то ця оцінка дорівнює нулю). Якщо за стандартними правилами лінійного програмування побудувати двоїсту модель до моделі (4.45) – (4.48), то вона буде мати такий вигляд:

$$\sum_t (f_\tau p_{0\tau} + h\alpha_1 q_1) +$$

$$+\sum_t [p_{01} + d_{n1}p_{01} + h(c_{n1} + d_{n1})q_1]v_{n0} \to \min, \tag{4.50}$$

$$p_{nt} \geq p_{nt+1} + d_{nt+1}p_{0t+1} + h(c_{nt+1} + d_{nt+1})q_{nt+1}, \; 1 \leq t \leq T, \tag{4.51}$$

$$\sum_t \left\{ p_{0t}\left[(1+r^{it})l^{it-1} - l^{it} \right] + q_1 l^{i\tau} \right\} + l^{i\tau} \geq 0, \tag{4.52}$$

$$c_{nt}p_{0t} \leq p_{nt} \leq v_{nt}p_{0t}, n > 0, 1 \leq t \leq T, \tag{4.53}$$

$$P_{n\tau} = 0, \; n > 0, \; p_{0\tau} = 1.$$

При цьому в силу умов доповнюючої нежорсткості лінійного програмування повинні виконуватися наступні рівності:

1) на останньому кроці оцінка кожного негрошового активу дорівнює нулю, оцінка 1 грн. готівки – 1 грн.;

2) оцінка активів *n* включає (стосовні до наступного кроку) оцінки: цих же активів, доходу від них і права на заборгованість, яке дають ці активи й дохід від них: $p_{nt}v_{nt} = [p_{nt+1} + d_{nt+1}p_{0t+1} + h(c_{nt+1} + d_{nt+1})q_{t+1}]v_{nt}$;

3) оцінка активу не менше оцінки виторгу від його продажу й не більше оцінки витрат на його покупку; знак рівності має місце тоді, коли на даному кроці політика передбачає відповідно продаж або покупку активу;

4) оцінка надходжень готівки за зобов'язаннями не більше суми оцінок платежів за цим зобов'язанням й оцінок прав на заборгованість, використаних при випуску зобов'язання й платежах за ним. Знак рівності має місце, якщо відповідні зобов'язання випускаються. Наприклад, якщо зобов'язання *i* випускається на кроці *s* (тобто $l^{is} = 1$), тоді, як видно з (4.52):

$$p_{0s} = q_s + \sum_{t>s} \left[p_{0t}\left(l^{it-1} - l^{it} + r^{it}l^{it-1} \right) + q_t l^{it} \right].$$

Приклад 5. Нехай на кроці *t* готівка депонується на 1 крок при депозитній ставці *g*. Ціна «покупки» такого депозиту рівна 1, а ціна його «продажу» дорівнює оцінці готівки, тобто p_{0t}. З іншого боку, для цього депозиту в умові (4.51) повинна бути рівність, так що $p_{0t} = (1+g)(p_{0t+1} + hg_{t+1})$. Звідси випливає, що темп падіння оцінок готівки (за даних умов!) повинен бути не нижчим від депозитного відсотка.

Приклад 6. Для кредиту зі ставкою r терміном на 1 крок, отриманого на кроці t, формула (4.52) набуде вигляду: $p_{0t} = q_t p_{0t+1}(1+r)$. Тому темп падіння оцінок готівки тут буде вище ставки кредитного відсотка $p_{0t}/p_{0t+1} > r$, що не узгоджується з традиційно прийнятою при встановленні ставки дисконту, орієнтації на депозитні ставки.

Приклад 7. Припустимо, що на деякому кроці t фірма купує активи n і користується ними до кроку s, на якому продає їх. Тоді з (4.52) і (4.53) легко виводиться наступний зв'язок між оптимальним моментом продажу активів (s) і оцінками активів і готівки:

$$b_{nt} p_{0t} = p_{nt} = \max_s \left\{ \sum_{\tau = t+1}^{s} \left[d_{n\tau} p_{0\tau} + h(c_{n\tau} + d_{n\tau}) q_\tau \right] + c_{ns} p_{0s} \right\}.$$

Бачимо, що оцінки готівки, а стало бути й ставки дисконту, визначаються доходностями її вкладень у мобільні активи на доцільні терміни, однак відповідний зв'язок не настільки примітивний, як це випливає із зазначених вище простих визначень.

Локальний критерій інтегрального ефекту

Допустимо, що фірма вирішить брати участь у новому інвестиційному проекті. Тоді чисті доходи від «сторонньої» діяльності й вартості зв'язаних активів зміняться відповідно на Δf_t й Δa_t. Якщо зміни малі, то, за змістом двоїстих оцінок і в силу (4.50), за рахунок реалізації проекту величина критерію оптимальності збільшиться на $\sum_t \left(p_{0t} \Delta f_t + h q_t \Delta a_t \right)$. Нехай $\alpha_t = p_{0t}/p_{01}$, $\beta_t = h q_t / p_{0t}$,

$$\Delta N = \sum_t \alpha_t \left(\Delta f_t + \beta_t \Delta C_t \right). \qquad (4.54)$$

Тоді $\sum_t \left(p_{0t} \Delta f_t + h q_t \Delta a_t \right) = p_{01} \Delta N$. Це значить, що з погляду обраного критерію реалізація проекту еквівалентна одержанню прибутку ΔN на початку періоду. Тому проект повинен бути визнаний ефективним, якщо й тільки якщо $\Delta N \geq 0$ (значення v_{0T} «з проектом» повинне бути не менше, ніж «без проекту»), а кращим з декількох варіантів проекту буде той, для якого ΔN більше. Ці міркування дозволяють розглядати рівність (4.54) як критерій локальної оптимальності проекту – своєрідний «замінник» ЧДД. При цьому величини α_t природно трактувати як коефіцієнти дисконтування (до початку кроку 1). Їм, у силу (4.44), відповідають і погоджені з інтересами фірми значення ставок дисконту, рівні темпам падіння оцінок готівки:

$$E_t = (\alpha_t / \alpha_{t+1}) - 1 = (p_{0t} / p_{0t+1}) - 1. \qquad (4.55)$$

Оскільки ставки дисконту для різних кроків можуть різнитися, затримка реалізації проекту може зробити його більш ефективним і навіть перетворити неефективний проект в ефективний (як, втім, і навпаки). При цьому $E_t \le r_t - 1 + hq_t / p_{0t+1}$ в силу умови (4.52). Це значить, що ставки дисконту обмежуються зверху за рахунок самої можливості одержання кредитів. Зокрема, ставка дисконту буде не більше кредитної ставки, якщо на даному кроці кредит не залучається, але може перевищити кредитну ставку, якщо фірма потребує кредиту.

Якщо в ході реалізації проекту фірма «не впирається» в обмеження за обсягом кредитування, то всі $q_t = 0$ й критерій (4.54) точно збігається з (4.43), хоча й виведений з інших міркувань. Цей висновок, однак, справедливий, тільки якщо цей проект є *малим* і не сильно впливає на оцінки активів (втім, вимога малості проектів є об'єктивно необхідною для будь-яких локальних розрахунків ефективності й не зв'язана конкретно з розглянутою моделлю). З цих позицій корисно розглянути один із парадоксів, пов'язаних з визначенням ставки дисконту.

Приклад 8. Розглядаються два реальні альтернативні інвестиційні проекти, що вимагають однакових інвестицій 100 і після цього дають постійні річні доходи відповідно 15 і 20. При цьому прибутковість депозитів і інших фінансових інструментів не перевершує 10%. Тоді для оцінки першого проекту виберемо найбільш вигідну альтернативу, а саме – другий проект. Тоді ставка дисконту повинна скласти 20%. Аналогічно, при оцінці другого проекту як альтернативи береться перший і ставка дисконту приймається 15%. Чи коректні ці міркування? Виявляється, що ні.

Дійсно, щоб оцінити проект, треба додати до правих частин (4.46) грошові потоки цього проекту Δf_t. Якщо проект малий, критерій зміниться на величину $\sum_t p_{0t} \Delta f_t$, а самі двоїсті оцінки, й відповідно ставки дисконту (4.55), практично не зміняться. Це пов'язане з тим, що ставки дисконту визначаються прибутковістю тих активів, у які можна вкладати будь-які кошти – вище ми назвали такі операції напрямами інвестування. Розглянуті ж проекти напрямами інвестування не є – їх можна здійснити тільки один раз у певному масштабі, у певний час і до того ж тільки порізно (тому що вони альтернативні). Тому прибутковість цих проектів на ставку дисконту не впливає взагалі.

Для «великих» проектів зміна критерію може відрізнятися від (4.54), тому що такі проекти змінюють оцінки активів і ставки дисконту. Тому «великі» проекти взагалі не можна оцінювати на основі локальних розрахунків незалежно від того, які ставки дисконту ми використовуємо. Їх слід оцінювати з урахуванням усієї діяльності фірми при оптимальній її поведінці, оптимізуючи фінансову політику фірми в ситуаціях «із проектом» і «без проекту» і порівнюючи одержувані значення критерію.

У більш реальній ситуації, коли фірма відчуває потребу в позикових коштах, певну роль починає відігравати другий член у критерії (4.54). Суть справи в тому, що запровадження в дію додаткових основних коштів розширює можливості фірми по залученню позикового капіталу так, що за інших рівних умов варіанти з більшим обсягом уведення стають кращими. Інакше кажучи, критерій (4.54) орієнтує на такі варіанти реалізації проекту, коли нові фонди вводяться в експлуатацію до того моменту, коли у фірми виникає потреба в залученні додаткових коштів. У таких випадках ставка дисконту зростає й, як ми бачили, може навіть перевищувати кредитний відсоток, не говорячи вже про депозитний. У практиці оцінки бізнесу, якщо фірма потребує кредиту, ця обставина враховується шляхом включення в ставку дисконту так званої премії за ризик. Наш розгляд показує, що збільшення «звичайної» ставки дисконту викликається об'єктивною необхідністю навіть у детермінованій (безризиковій) ситуації. З іншого боку, підвищену потребу фірми в позикових коштах більш коректно враховувати, уводячи в розрахунки ефективності додаткову оцінку її ліквідного майна за допомогою «оцінок кредитної привабливості» зв'язаних активів β_t. Підкреслимо, що ці оцінки відображають не «минулі витрати» і не упущений дохід від продажу майна, а право, що дається цим майном на випуск боргових зобов'язань.

У цьому зв'язку має сенс звернути увагу на одну особливість традиційних методів оцінки майна «доходним методом» (існує також «метод видатків»). Тут вартість майна оцінюється або доходом від його продажу, або дисконтованою сумою чистих доходів від його використання. Та обставина, що майно може служити, наприклад, заставою при одержанні кредиту й тим самим полегшувати його одержання, даний метод не враховує. Вважається, що даний «елемент вартості» майна повинен бути врахований і в оціннювальній діяльності.

Наведемо приклад застосування побудованих моделей.

Приклад 9. Розглядається 10-літній розрахунковий період, у який фірма вступає, маючи лише готівкою 100 (грошові суми записани в умовних одиницях) і не маючи зв'язаних активів. Обсяги зв'язаних активів і чисті доходи по оцінюваному проекту наведені в перших графах таблиці:

t	a_t	f_t	d_{1t}	d_{2t}	r_t	РД	ДД	К	p_t	q_t	E_t	β_t
1	0	–125				0.0	55.0	80.0	3.971	0.122	0.259	0.0245
2	120	–28	0.20	0.00	0.22	14.4	0.0	140.0	3.155	0.140	0.235	0.0354
3	140	16	0.21	0.48	0.18	0.0	140.7	191.1	2.556	0.065	0.200	0.0203
4	120	20	0.16	0.43	0.17	0.0	5.0	208.5	2.129	0.034	0.179	0.0126
5	100	99	0.14	0.40	0.16	0.0	54.0	0.0	1.806	0	0.120	0
6	80	ПО	0.12	0.32	0.15	0.0	116.6	0.0	1.613	0	0.134	0
7	60	95	0.12	0.27	0.14	0.0	163.6	0.0	1.422	0	0.120	0
8	20	0	0.12	0.27	0.14	0.0	148.1	0.0	1.270	0	0.134	0
9	0	0	0.12	0.27	0.14	207.8	0.0	0.0	1.120	0	0.120	0
10	0	0	0.12	0.27	0.14				1.000			

Щорічно можна вкладати готівку або в річні депозити (РД), або у дворічні депозити (ДД), а також брати однокрокові кредити (К) – у наступних графах таблиці наведено відповідні ставки (кожна ставка відноситься до року здійснення відповідних виплат). Обсяги кредиту обмежуються в цьому випадку 80% від вартості продажу наявних активів (h = 0.8).

Далі в таблиці наведено оптимальні розв'язки прямої і двоїстої моделей: вкладення в депозити, обсяги кредиту, ставки дисконту (E_t) і оцінки кредитної привабливості (β_t).

Розрахунки показують, що до кінця періоду в цьому випадку фірма буде мати готівку 420,8. Цікаво відзначити, що в перші роки ставки дисконту перевищують депозитні й кредитні відсотки, а в останні роки – не стабілізуються, як це й було в прикладі 4.

З даних, представлених у табл. 3, видно, що оцінки кредитної привабливості невеликі. З'ясуємо, однак, як вони вплинули на оцінку ефективності проекту. Для цього оцінимо проект двома способами.

1. Побудуємо оптимальну фінансову політику фірми в умовах, коли вона відмовляється від реалізації проекту. Виявляється, що величини E_t й β_t при цьому не зміняться, а значення цільової функції (обсяг готівки наприкінці періоду) зменшиться до 406,8. Таким чином, проект повинен бути оцінений як ефективний – за рахунок його реалізації величина критерію збільшується на 14,0. Інтегральний ефект проекту при цьому буде 14,0/3,971 = 3,5 – той же результат дає й формула (4.54);

2. Розрахуємо інтегральний ефект проекту за формулою (4.43) або, що те ж, за формулою (4.54) без урахування впливу зв'язаних фондів, але використовуючи зазначені в таблиці значення ставок дисконту. Такий розрахунок дає від'ємне значення інтегрального ефекту (-2.5), і проект варто було б оцінити як неефективний.

Бачимо, що ігнорування зазначеного ефекту може призвести до неправильних інвестиційних розв'язків.

Зрозуміло, не можна стверджувати, що реальні інвестори, ухвалюючи інвестиційні рішення, ураховують нестабільність ставки дисконту в часі й здатність майна полегшувати одержання кредиту й до того ж роблять це за допомогою критерію типу (4.54). Однак цей критерій, що враховує внесок зв'язаних активів у критерій оптимальності, нестабільність ставок дисконту в часі та їх відмінність у різних інвесторів пояснює, чому:

– різні інвестори, оцінюючи той самий проект за однією і тією ж інформацією, дають йому різну оцінку (одні вирішують взяти в ньому участь, інші відмовляються);

– відмовившись від проекту, інвестор без усякої додаткової інформації про нього через якийсь час змінює своє рішення (хоча, здавалося б, ефективність проекту повинна зменшитися за рахунок затримки);

– якщо в одному з підрозділів великої фірми реалізується високоефективний проект, фірма іноді може скоротити або тимчасово припинити його фінансування (хоча, здавалося б, це суттєво знизить ефективність проекту);

– рішення про реалізацію великих проектів часто ухвалюються після розгляду бухгалтерського балансу фірми.

Вплив інфляції

Дотепер про інфляцію нічого не говорилося. Однак це не означає, що вона не враховувалася взагалі. Навпаки, оперуючи з цінами активів і їх обмінними курсами, ми мали на увазі їхню зміну в часі, тобто наявність інфляції. Тому, строго говорячи, розв'язок прямої і двоїстої задач, а виходить, і знайдені ставки дисконту, інфляцію враховують. Розглянемо це докладніше.

Для цього зауважимо, що інфляцію підрозділяють на *загальну* й *структурну.* Загальна інфляція відображає середнє зростання цін у країні (зміна купівельної здатності гривні), а структурна – зміна співвідношень між цінами різних товарів і послуг, тобто відносне їхнє подорожчання або здешевлення. Загальна інфляція характеризується ланцюговими й базисними індексами. Ланцюговий індекс загальної інфляції (j_t) відображає зростання цін на кроці t порівняно з попереднім кроком, базисний (J_t) – зростання порівняно з кроком 0. Природно, що при цьому $j_1 = J_1$. У моделі, яка описана вище, структурна інфляція врахована явно: співвідношення між цінами різних активів, тобто їхні обмінні курси задані мінливими в часі. Загальна ж інфляція враховується в моделі через абсолютні, «грошові» показники (доходи від активів, грошові потоки від сторонньої діяльності й ринкова вартість активів), які також змінюються в часі. З'ясуємо, як вона впливає на ставку дисконту.

Необхідність відповіді на це питання зумовлюється наявним порядком розробки реальних інвестиційних проектів. Справа в тому, що зазвичай такі розрахунки спочатку виконуються в незмінних цінах базисного моменту часу (базисних цінах), за який звичайно приймається момент розрахунків або початок року, у якому проводяться розрахунки. Зміна ж цін порівняно з базисними враховується пізніше. Перевагою розрахунків у незмінних цінах є їх наочність: якщо говориться, наприклад, що видатки на кроці 9 становлять 15 млн грн., то ця цифра відноситься до базисного моменту часу й учасникам проекту вона зрозуміла. Точно так само твердження, що ЧДД проекту становить 147 млн. грн., учасник проекту зрозуміє так, що реалізація проекту для нього настільки ж вигідна, як і одержання 147 млн. грн. «сьогодні» (точніше – у базисний момент часу).

З іншого боку, щоб урахувати в розрахунках ефективності зміни цін у країні, необхідно визначати всі грошові потоки проекту в цінах відповідних років (прогнозних). Однак, як ми бачили, при цьому втрачається наочність – показники різних років виявляються вираженими в різних цінах і їх наступне агрегування надто схоже на підсумовування акрів з гектарами або фунтів з кілограмами. Тому чинні методичні документи передбачають наступне перерахування грошових потоків з прогнозних цін у прогнозні ж, але *дефльовані*, що утворюються з прогнозних діленням на базисний індекс інфляції. Дефльовані ціни, у загальному випадку, не збігаються з базисними, але порівнянні з ними, оскільки 1 дефльована гривня має ту ж «купівельну спроможність», що й 1 триня у базисний момент часу. У статистиці часто зіставляють які-небудь доходи або видатки за різні роки. Якщо показники, що зіставляються, виражені в цінах відповідних років, то спостережувану динаміку характеризують терміном *«номінальна»*, якщо ж вони виражені в цінах, дефльованих до того самого моменту часу, то говорять про *«реальну»* динаміку (наприклад, про реальне зростання середньої заробітної плати). Методичні рекомендації, по суті, вимагають аналізу реальної, а не номінальної динаміки грошових потоків.

Оцінюючи ефективність проекту за реальним (дефльованим) грошовим потоком, необхідно використовувати інші, *реальні* ставки дисконту. Викладена вище модель дозволяє їх знайти.

Дійсно, 1 реальна гривня на кроці *t* за визначенням дорівнює J_t номінальним гривням, так що її оцінка повинна бути в J_t разів вище – $J_t p_{0t}$. Але тоді реальна ставка дисконту, тобто темп падіння цих оцінок, складе $E_{tp} = J_{t-1} p_{0t-1} / J_t p_{0t} - 1 = p_{0t-1} / j_t p_{0t} - 1$. Тому номінальна ($E_t$) і реальна ($E_{tp}$) ставки дисконту пов'язані співвідношенням:

$$1+E_{tp}=\left(1+E_t\right)/j_t. \qquad (4.56)$$

Спробуємо тепер перейти в (4.45) – (4.48) до реальних вимірників обсягів готівки. Це приведе нас до нової моделі. У ній, на відміну від «старої», невідомі відображають «реальну» кількість наявних або обмінюваних активів і реальні обсяги кредиту – ці невідомі ми позначаємо тими ж буквами, але прописними. Зрозуміло, реальні й номінальні кількості негрошових активів будуть збігатися, а номінальні обсяги готівки, яка надходить/витрачається (включаючи кредит) і наявної готівки будуть відрізнятися від реальних множенням на індекс інфляції відповідного кроку. У результаті ми маємо співвідношення:

$$v_{nt}=V_{nt}, x_{nt}=X_{nt}, \; y_{nt}=Y_{nt} \text{ при } n>0,$$

$$v_{0t}=J_t V_{0t}, l^{it}=J_t L^{it}, f_t=J_t F_t, \; a_t=J_t A_t.$$

У цих позначеннях система (4.45) – (4.48) має вигляд:

$$V_{nt}=V_{nt-1}-X_{nt}+Y_{nt}, n>0,$$

$$J_t V_{0t}=J_{t-1}V_{0t-1}+\sum_{n>0}\left(d_{nt}V_{nt-1}+c_{nt}X_{nt}-b_{nt}Y_{nt}\right)+$$

$$+d_{0t}J_{t-1}V_{0t-1}+\sum_i w^i\left(l^{it-1}-l^{it}+r^{it}l^{it-1}\right)J_t F_t,$$

$$\sum_i w^i l^{it}\le h\left[J_{t-1}V_{0t-1}+\sum_{n>0}\left(c_{nt}-d_{nt}\right)V_{nt-1}+J_t A_t\right], t<T,$$

$$J_T V_{0T}-\sum_i J_T w^i L^{iT}\to\max.$$

Введемо тепер у розгляд наступні величини, які будемо називати «реальними» ставками відсотка за зобов'язаннями, курси покупки й продажу активів і їх прибутковості, відповідно:

$$R_t=\frac{1+r}{j_t}-1; \; B_{nt}=\frac{b_{nt}}{J_t}; C_{nt}=\frac{c_{nt}}{J_t}; D_{nt}=\frac{d_{nt}}{J_t}, \; \left(n>0\right);$$

$$D_{0t}=\frac{d_{0t}}{j_t}-\left(1-\frac{1}{j_t}\right).$$

Зазначена назва виправдана:

1) величини B_{nt} й C_{nt} відображають реальні ціни активів n;

2) відношення R_t представляє реальну ставку відсотка за зобов'язаннями, яка розраховується за формулою Фішера;

3) відношення d_{nt}/J_t також відображає реальний дохід від одиниці негрошового активу на відповідному кроці;

4) величина D_{0t} являє собою різницю між реальним доходом від готівки, що був на кроці *t*, еквівалентної 1 реальній гривні, і втратою купівельної спроможності цієї готівки за той же крок. Тому D_{0t} також правомірно трактувати як «реальну» прибутковість готівки, що враховує як видатки на її зберігання, так і втрати від інфляції.

Використання «реальних» значень зазначених показників має ту перевагу, що вони більш стабільні і їх набагато легше прогнозувати.

Здавалося б, для депозитів це невірно (чому прибутковість депозиту повинна зменшитися, якщо інфляція була тільки до його відкриття?). Однак протиріччя немає: депозит не є готівкою й кількість депозитів, як і раніше, вимірюється кількістю вкладених на них *номінальних* гривень. До того ж, перехід до інших вимірників депозитів не змінить одержуваних далі висновків.

Доведено в роботі [9], що у введених позначеннях отриману систему можна записати у вигляді, дуже близькому до (4.45) – (4.48):

$$V_{nt} = V_{nt-1} - X_{nt} + Y_{nt}, n > 0,$$

$$V_{0t} = V_{0t-1} + \sum_{n} \left(D_{nt} V_{nt-1} + C_{nt} X_{nt} - B_{nt} Y_{nt} \right) -$$

$$- \sum_{i} w^{i} \left(L^{it-1} - L^{it} + R^{it} L^{it-1} \right) + F_{t},$$

$$\sum_{i} w^{i} L^{it} \le h \left[\frac{V_{0t} - 1}{J_{t}} + \sum_{n>0} \left(C_{nt} - D_{nt} \right) V_{nt-1} + A_{t} \right], \ t < T, \tag{4.57}$$

$$V_{0T} - \sum_{i} w^{i} L^{iT} \to \max. \tag{4.58}$$

Відзначимо, що критерієм оптимальності в такій моделі є максимізація реального, а не номінального обсягу готівки наприкінці періоду, що, до речі, більш наочно й зрозуміло інвесторам.

У той же час, точного збігу моделей немає: обмеження (4.47) і (4.57) різняться. Тому, якщо чисто формально замінити в системі (4.45) – (4.48) усі обмінні курси прибутковості й ставки кредитних платежів «реальними», розв'язок такої системи може дати інший оптимальний план і відповідно інші ставки дисконту. Іншими словами, одне тільки урахування структурної інфляції не дозволяє правильно визначити реальні ставки дисконту – на них впливають і темпи загальної інфляції.

Відзначимо також, що відмінність (4.47) і (4.57) виявиться істотною, тільки якщо на даному кроці фірмі необхідний великий кредит, хоча на попередньому вона мала вільну (не вкладену в інші активи) готівку. Така ситуація можлива, якщо на даному кроці обмінні курси «найбільш доходних» негрошових активів змінилися так, що стало більш вигідно купити їх за готівку (навіть з урахуванням втрат на інфляцію), ніж обміняти на інші активи (наприклад, зріс відсоток по гривневих депозитах, але при цьому знизилися ціни, за якими фірма може продати наявні в неї акції й іноземну валюту). Вважається, що подібна ситуація малоймовірна, так що значної розбіжності між розрахунками в номінальних і реальних цінах швидше за все не буде.

При розрахунках у реальних цінах зміниться й двоїста модель. Тепер вона набуде наступного вигляду (тепер її змінні відображають «реальну» або дефльовану цінність відповідних об'єктів і, як і вище, позначаються прописними буквами):

$$\sum_t (F_t P_{0t} + hA_t Q_t) + \left(P_{01} + h\,Q_1 / j_1\right)V_{00} +$$

$$\sum_{n>0} \left[P_{n1} + D_{n1}P_{01} + h(C_{n1} + D_{n1})Q_1\right]V_{n0} \to \min, \qquad (4.59)$$

$$P_{nt} \geq P_{nt+1} + D_{nt+1}P_{0t+1} + \begin{cases} h\left(C_{nt+1} + D_{nt+1}\right)Q_{t+1}, \ n > 0, \\ hQ_{t+1}/j_{t+1}, \ n = 0, \end{cases} \qquad (4.60)$$

$$\sum_t \left\lfloor P_{0t}\left(L^{it-1} - L^{it} + R^{it}L^{it-1}\right) + Q_t L^{it}\right\rfloor + L^{iT} \geq 0, \qquad (4.61)$$

$$C_{nt}P_{0t} < P_{nt} \leq B_{nt}P_{0t}, \quad n > 0, \qquad (4.62)$$

$$P_{nT} = 0, \quad n > 0, \quad P_{0T} = 1.$$

Обмеження (4.60) – (4.62) цієї моделі (очевидно, що вони мають місце для $1 \leq t < T$) з урахуванням умов доповнюючої нежорсткості трактуються як і раніше, крім другого зі співвідношень (4.60), яке тепер виглядає трохи інакше: оцінка готівки, якщо вона зберігається на даному кроці, включає (щодо наступного кроку) оцінку такої ж у реальному вираженні готівки, оцінку чистого доходу від неї й скоректовану з урахуванням інфляції оцінку права на одержання додаткового кредиту, яке вона дає:

$$P_{0t}V_{0t} = \left(P_{0t+1} + D_{0t}P_{0t+1} + h\,Q_{t+1}/j_{t+1}\right)V_{0t}.$$

Аналіз проведений в [9] запропонованої моделі показав, що:

1) локальна оцінка інвестиційних проектів за допомогою критерію ЧДД виправдана тільки стосовно до малих, локальних проектів;

2) ставка дисконту, яку повинна використовувати фірма при оцінці проектів, визначається темпом падіння оцінок коштів у моделі оптимальної фінансової поведінки фірми;

3) ця ставка з часом змінюється так, що ефективність інвестиційного проекту змінюється, якщо починати його раніше або пізніше;

4) значення й динаміка ставки дисконту для фірми залежать не тільки від загального стану справ на фінансовому ринку (складу, курсів і доходностей різних активів), але й від фінансового становища цієї фірми (у тому числі від складу її активів, кредитної заборгованості й набору інвестиційних проектів, у яких вона вже бере участь) і її можливостей по залученню позикових коштів;

5) для оцінки тих самих проектів різні фірми повинні використовувати різні ставки дисконту, а операції продажу-покупки активу виявляються ефективними одночасно для фірми-продавця й фірми-покупця;

6) в умовах обмеженості можливостей залучення позикових коштів ця обмеженість повинна враховуватися й у структурі локального критерію оптимальності. У нашій моделі це досягається включенням у грошові потоки платежів за право одержання позик, що забезпечується наявністю функціонуючих за проектом основних коштів. При цьому ставка дисконту, загалом кажучи, збільшується й може навіть перевищувати кредитний відсоток;

7) оцінка фінансової реалізовності проекту повинна проводитися «на тлі» загальної діяльності фірми. Традиційні спрощені критерії типу незаперечності накопичених компаундованих чистих доходів можуть виявляти фінансову нереалізовность проекту там, де її немає;

8) для оцінки ефективності інвестиційних проектів за грошовим потоком, вираженим в реальних (дефльованих) цінах, необхідно використовувати реальні (скоректовані на інфляцію) ставки дисконту. Однак на ці ставки впливає не тільки структурна, але й загальна інфляція, так що однієї тільки інформації про реальні курси різних активів і їх реальної прибутковості для визначення зазначених ставок недостатньо.

З побудованої моделі випливає, що в загальному випадку ставка дисконту, яка може бути визначена як темп падіння оцінок грошей в оптимальному плані, є змінною в часі й залежить не тільки від загальної ситуації на ринку, але й від фінансового становища фірми. Виявляється, що критерій ефективності реалізованих фірмою інвестиційних проектів, який відповідає інтересам фірми відрізняється від критерію чистого дисконтованого доходу (ЧДД, NPV). Крім дисконтованої суми грошових потоків проекту, критерій повинен ураховувати й ринкову вартість створюваних за проектом активів, що полегшує залучення позикових коштів.

Питання для самоконтролю

1. Що таке економічна область?
2. Що таке граничний продукт?
3. Дайте визначення закону спадної доходності.
4. Дайте визначення задачі вибору фірмою оптимального обсягу виробництва.

5. Дайте визначення динамічному завданню однoресурсної фірми.

6. Що таке середня фондовіддача?

7. Що таке середня продуктивність праці?

8. Що таке граничні продуктивності?

9. Дайте визначення термінів: граничні витрати; граничний прибуток.

10. Які стадії виробництва ви знаєте?

11. Дайте визначення основній задачі багаторесурсної фірми.

12. Як виконується мінімізація вартості?

13. Що таке середня сукупна вартість?

14. Що таке середня змінна вартість?

15. Що таке середня фіксована вартість?

16. Що таке довгострокова гранична вартість?

17. Дайте визначення ставці дисконту.

18. Дайте визначення мобільному активу.

19. Що таке прибутковість активу?

20. Що таке дохід за депозитом до його закриття?

Задачі для самостійної роботи

У задачах 3 – 6 i - порядковий номер студента у групі.

Задача 1

Обсяг видобування щебеню y (т/год) залежить від кількості праці x (людино-год): $y = 6x^{3/4}$. Ціна щебеню – 60 грн./т, заробітна плата робітника – 40 грн./год. Крім заробітної плати, інші витрати не враховуються. Знайдемо оптимальну кількість праці (кількість робітників).

Задача 2

Випуск однопродуктової фірми задається виробничою функцією Кобба—Дугласа:

$$X = F(K, L) = 3K^{2/3}L^{1/3}.$$

Визначити максимальний випуск, якщо на оренду фондів і оплату праці виділено 150 грош. од., вартість оренди одиниці фондів w_k = 5 грош. од., ставка зарплати w_L = 10 грош. од./люд.

Якою буде гранична норма заміни одного зайнятого фондами в оптимальній точці?

Відповідь: $K^* = 20$, $L^* = 5$, $\dfrac{dK}{dL} = 2$.

Задача 3

Для підприємства відомі виробнича функція $f(x,y)=x^a y^b$ та ринкові ціни продукції $p_0=2$ і факторів виробництва – відповідно p_1, p_2 умов. грош. од. Знайти комбінацію ресурсів (x_0,y_0) за якої підприємство одержить максимальний прибуток; обчислити цей прибуток. Вихідні данні:

$p_0=2.5*1.05^{i-1}$, $p_1=1{,}2*1.05^{i-1}$, $a=0.1*1.05^{i-1}$, $b=1-a-0.1$.

Задача 4

Функція обсягу випуску продукції підприємства має вигляд $q=f(x,y)=a_0xy^2$, а функція витрат на ресурси x і y лінійна $C(x,y)=a_1x+a_2y$. Задача полягає у визначенні такого розподілу ресурсів за якого буде забезпечений обсяг випуску продукції підприємства q, а витрати будуть мінімальні. Вихідні данні:

$q=68*0.97^{i-1}$, $a_0=5.2*1.1^{i-1}$, $a_1=3.1*1.1^{i-1}$, $a_2=2.2*1.1^{i-1}$.

Задача 5

Підприємство випускає два види товарів з обсягами x і y. Ціни на ці товари становлять відповідно p_x, p_y умов. грош. од., а функція витрат $C(x,y)=x^2+\frac{1}{2}gxy+y^2$, де g. Скласти виробничу програму за якої підприємство отримає максимальний прибуток; обчислити цей прибуток, якщо:

$p_x=9*1.05^{i-1}$, $p_y=11*1.05^{i-1}$, $g=2*1.05^{i-1}$.

Задача 6

Виробнича функція підприємства є $Q=Q(x,y)=p_0x^a y^b$, де x - вартість фондів, y - витрати людської праці. У розрахунку на рік, на відновлення одиниці фондів треба витратити p_1 умов. грош. од., а середня річна заробітна плата становить p_2 умов. грош. од. Знайти значення величин x і y, які забезпечать мінімальні витрати виробництва за планового обсягу продукції Q, якщо: $Q=10*1.05^i$, $p_0=2*1.05^i$, $p_1=3*1.05^i$, $p_2=4*1.05^i$, $a=0.1*1.05^i$, $b=1-a$.

Задача 7

Дані про виробничий процес підприємства за 15 кварталів наведено в таблиці.

№ кварталу	Y	K	L
1	14,16	30,1	24,56
2	15,7	31	23,7
3	A_1	B_1	C_1
4	15,65	33,2	24,1
5	13,13	31,2	24
6	14,22	34,8	23,67
7	16,73	35,4	24,9
8	A_2	B_2	C_2
9	16,88	34,8	26,24
10	15,67	33,3	25,37
11	15,99	36,1	25,66
12	A_3	B_3	C_3
13	15,77	30,6	22,1
14	15,28	32,1	20,57
15	17,04	37,6	24,61

$A_1 = 14{,}5 + (-1)^N \cdot N/20$, $B_1 = 31 + (-1)^{N+1} \cdot N/20$, $C_1 = 23 + (-1)^N \cdot \dfrac{30-N}{20}$;

$A_2 = 17 + (-1)^N \cdot N/20$, $B_2 = 33 + (-1)^{N+1} \cdot N/20$, $C_2 = 32 + (-1)^N \cdot \dfrac{30-N}{20}$;

$A_3 = 14 + (-1)^N \cdot N/20$, $B_3 = 35 + (-1)^{N+1} \cdot N/20$, $C_3 = 24 + (-1)^N \cdot \dfrac{30-N}{20}$.

Тут N - порядковий номер студента у групі.

Виконати:

1) статистичний аналіз вихідних даних;
2) побудувати лінійну й степеневу форми виробничих функцій для заданого виробничого процесу;
3) здійснити економічний аналіз виробничої функції.

Зауваження. При побудові лінійної форми регресійної залежності використовувати варіант функції Excel «ЛИНЕЙН» з вільним членом, рівним 0. Для побудови степеневої регресійної залежності необхідно вихідну формулу прологарифмувати, що приведе до представлення нової залежності в лінійній формі, для якої знову слід використовувати функцію «ЛИНЕЙН».

РОЗДІЛ 5. МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ РОЗВИТКУ ОСНОВНИХ ВИРОБНИЧИХ ФОНДІВ ТА ФІНАНСІВ МАЛОГО ПІДПРИЄМСТВА

Однією з основних проблем сучасного етапу української економіки є створення умов розвитку підприємств малого бізнесу. Ефективність малих підприємств (МП) визначається розвитком науково-технічного прогресу та зростанням фондоозброєності. У зв'язку з цим виникають складні завдання моделювання інтенсивного розвитку МП і управління їхнім розвитком. Велике значення у цьому випадку набуває підвищення ефективності використання основних фондів і виробничих потужностей. Визначальний вплив на величину виробничої потужності має використовуване у виробництві обладнання, його кількісний і якісний склад. Заміна застарілого обладнання на нове, що має більшу продуктивність й/або трудомісткість, приводить до нарощування виробничої потужності. Наприклад, одним із найважливіших завдань є моделювання та оптимізація термінів функціонування виробничих потужностей економічних систем.

Основний зміст цього підрозділу докладно викладений у монографії [10].

5.1. Модель динаміки малого підприємства

Функціонування малого підприємства

Вважатимемо, що мале підприємство працює відповідно до схеми, яка представлена на рис. 5.1.

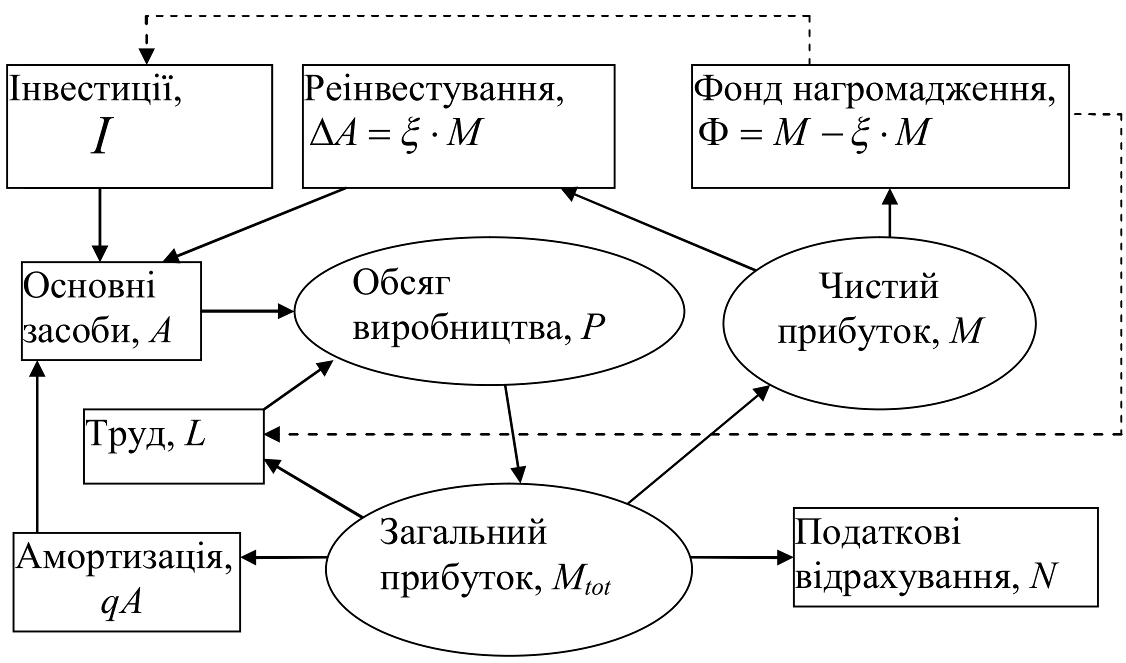


Рис. 5.1. *Принципова схема економічної діяльності МП*

З наведеної схеми видно, що ми приймаємо наступні припущення щодо діяльності малого підприємства (МП). Обсяг виробництва P повністю визначається двома факторами: основними виробничими фондами A й працею L. Загальний прибуток M_{tot} визначається обсягом виробництва за винятком витрат, і після виплати податків утвориться чистий прибуток M. Чистий прибуток поділяється на дві частини: частка ξ чистого прибутку витрачається

на розвиток виробництва (акселерація); частина прибутку, що залишилася, утворює фонд нагромадження. Фонд нагромадження є кінцевим економічним сенсом діяльності підприємства. Він може витрачатися на погашення інвестиційних кредитів (I), на преміювання співробітників (L) і т.ін. Принципова схема, прийнята в даному пункті, буде вихідною при побудові економіко-математичної моделі МП.

Метод дослідження й вибір моделі базується на системному підході до аналізу динаміки розвитку малого підприємства. Мале підприємство, що функціонує в умовах становлення ринкових відносин, є самостійним економічним агентом ринкової економіки, діяльність якого з позицій економіко-математичного моделювання може бути формалізована з використанням деякого мінімального набору параметрів, що описують роботу самого підприємства, а також його взаємодію з ринковим середовищем. При цьому необхідно мати на увазі, що мале підприємство - це найбільш динамічна й безінерційна система, здатна відносно більш високими темпами нарощувати власний капітал, ніж велике підприємство. Темп розвитку МП безпосередньо залежить від його внутрішніх ресурсів, тобто від капіталу, що формується в результаті здійснюваної їм виробничо-господарської діяльності. Чим більший обсяг цього капіталу, тим більше можливостей у малого підприємства для збільшення свого ресурсного потенціалу та придбання необхідних інгредієнтів виробництва.

Таким чином, прибуток МП є внутрішнім джерелом, що формує фонди його розвитку й визначає силу дії позитивного зворотного зв'язку. У цьому контексті фонди розвитку можуть розглядатися як внутрішній інвестиційний фактор розвитку малого підприємства.

Чималу роль у формуванні ресурсного потенціалу МП виконує зовнішній кредитно-інвестиційний фактор. Його дія проявляється через установлені потоки фінансових коштів з різних джерел: 1) державних інвестицій; 2) інвестицій різних фондів підтримки малого підприємництва; 3) кредитних ресурсів, що надаються банківською системою; 4) кредитних ресурсів, що надаються іншими юридичними й фізичними особами (кредитні організації, іноземні інвестори, лихварі тощо).

Отже, зовнішній кредитно-інвестиційний фактор впливає на розвиток системи, доповнюючи дію розглянутого позитивного зворотного зв'язку економічного об'єкта, і визначає темпи динаміки його розвитку. При цьому важливими виявляються як величина здійснюваної кредитно-інвестиційної підтримки та її регулярність (динаміка інвестицій у часі), так і інші умови її надання (плата за інвестиційний ресурс у вигляді ставки відсотка за кредит, терміни повернення кредиту й т.ін.). У зв'язку з цим виникає завдання дослідження впливу кредитно-інвестиційного фактора на динаміку розвитку малого підприємства.

Модель економічної динаміки малого підприємства

Тепер можемо перейти безпосередньо до формулювання моделі економічної динаміки МП, яка працює відповідно до українського законодавства, повний прибуток МП можна визначити за формулою:

$$M_{tot}(t) = (1-\tau_1)(1-c_s)P(t) - (1+\tau_2)L(t) - qA(t), \qquad (5.1)$$

де τ_1 - податок на додану вартість;

τ_2 - нарахування на заробітну плату;

c_s - питома собівартість сировини і матеріалів.

Формулу (5.1) будемо записувати у вигляді:

$$M_{tot}(t) = (1-c)P(t) - qA(t), \qquad (5.2)$$

де

$$c = c_s + \tau_1 - c_s\tau_1 + \tau_2 \frac{L(t)}{P(t)}. \qquad (5.3)$$

У тому випадку, коли вираз в правій частині формули (5.3) можна вважати незалежним від t, застосування формули (5.2) є більш зручним порівняно з формулою (5.1).

Систему рівнянь, що відповідає принциповій схемі економічної діяльності МП (рис. 5.1), тепер можна подати у вигляді:

$$P(t) = F\big(A(t), L(t), Q(t)\big), \qquad (5.4)$$

$$F = \begin{cases} f \cdot A - однофакторна\ модель, \\ b \cdot A^{\alpha} L^{\beta} - двофакторна\ модель, \end{cases} \qquad (5.5)$$

$$M_{tot}(t) = (1-c)P(t) - qA(t), \qquad (5.6)$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t), \qquad (5.7)$$

$$N(t) = \tau \cdot (1-\tau_3\xi)M(t), \qquad (5.8)$$

$$dA/dt = \xi M(t) + I(t), \tag{5.9}$$

$$t \in [0, T],\ \xi \in [0,1],\ \tau_3 \in [0,1],$$

де τ - податок на прибуток.

У випадку, якщо реінвестовані гроші не обкладаються податком повністю, то $\tau_3 = 1$; якщо реінвестовані суми обкладаються податком так само, як і інша частина чистого прибутку, тоді $\tau_3 = 0$. Якщо звернутися до зарубіжного досвіду податкового регулювання інноваційно-інвестиційної діяльності, то можна виділити усього дві групи методів надання податкових пільг. У першому випадку податковий тягар знижується за рахунок установлення певного порядку віднесення витрат на собівартість продукції (класифікація витрат і прискорена амортизація), при цьому змінюється фактичний розмір прибутку до оподаткування. У другому випадку обсяг прибутку як такий залишається незмінним і пільги забезпечуються за рахунок відрахувань із оподатковуваної бази, при цьому не важливо пропорційні вони фактично зробленим витратам (на НІОКР, капітальним вкладенням і тощо), або стосуються розподілу прибутку у відповідні фонди. Таким чином, узагальнюючи досвід надання податкових пільг суб'єктам інноваційної діяльності, ми бачимо, що фактично у законодавчих актах різних країн складне для визначення на підставі формальних ознак поняття «інноваційна діяльність» витісняється досить легко контрольованим на підставі бухгалтерського обліку поняттям «інноваційна-інвестиційна» діяльність. Тобто формальною підставою для надання пільг є документи, що підтверджують наявність у компанії видатків пов'язаних зі здійсненням діяльності, спрямованої на створення нових виробничих потужностей, проведення НІОКР. Безсумнівними перевагами сформованої практики є: простота, мінімізація бюрократичних процедур, прозорість і однаковість пропонованих вимог як з погляду господарюючих суб'єктів, так і з боку органів державного регулювання.

У тому випадку, коли обсяг основних фондів, що використовуються у малому бізнесі, є відносно невеликим, роль амортизаційних відрахувань у розвитку малого підприємства можна вважати малозначимою і тоді це джерело фінансування в моделі можна не враховувати. Тоді у формулі (5.6) маємо - $q = 0$. При дослідженні якісних закономірностей економічного розвитку МП, також можна вважати, що $q = 0$. У наступних розділах розрахунки будуть виконуватися як для випадку $q = 0$, так і для $q > 0$. Надалі у цьому розділі будемо вважати - $q = 0$.

Права частина рівняння (5.4) буде вибиратися залежно від характеру завдання або у вигляді однофакторної моделі, або у вигляді двофакторної. Ці випадки представлені в співвідношенні (5.5).

Підставляючи (5.6) і (5.8) у співвідношення (5.7), одержуємо:

$$M(t) = P(t) \cdot (1-c) - \tau \cdot (1-\tau_3 \xi) M(t), \tag{5.10}$$

$$M(t) = (1-c) P(t) / [1 + \tau \cdot (1-\tau_3 \xi)]. \tag{5.11}$$

Після підстановки (5.11) в (5.9), система співвідношень (5.4) - (5.9) зводиться до диференціального рівняння:

$$dA / dt = \hat{a} P(t) + I(t), \tag{5.12}$$

де $\hat{a} = (1-c)\xi / [1 + \tau \cdot (1-\tau_3 \xi)]$.

Для однофакторної моделі рівняння (5.12) набуває вигляду:

$$dA / dt = aA(t) + I(t), \tag{5.13}$$

де $a = f \cdot \hat{a}$.

Підсумовуючи, необхідно зробити одне важливе зауваження. Справа в тому, що система диференціальних рівнянь (5.4)-(5.9) має фактично застосовуватися не до окремого МП, а до якоїсь (досить великої) вибірки МП. Застосування системи рівнянь (5.4)-(5.9) до вибірки МП означає заміну кожного з цих рівнянь відповідним статистично усередненим аналогом. Наприклад, у випадку однофакторної моделі, рівняння (5.4) необхідно трактувати в такий спосіб:

$$\overline{P(t)} = \overline{f(t) \cdot A(t)}, \tag{5.14}$$

де риска означає статистичне усереднення за вибіркою. Якщо показник фондовіддачі f й обсяг основних виробничих фондів A можна вважати статистично незалежними, то (5.14) можна записати у вигляді:

$$\overline{P(t)} = \overline{f(t)} \cdot \overline{A(t)}. \tag{5.15}$$

Аналогічно повинні бути проаналізовані й інші рівняння моделі (5.4) - (5.9). При цьому система рівнянь може ускладнюватись. У наступних розділах вважатиметься, що статистичне усереднення в системі (5.4) - (5.9) вже виконано, причому буде використовуватися найпростіший безкореляційний варіант (5.15).

5.2. Ефективність розвитку основних виробничих фондів АПК

Постановка завдання переходу до ефективного розвитку підприємства на основі формування інноваційної стратегії вимагає вдосконалювання методології управління виробничими процесами, які відповідають сучасним умовам. Незважаючи на велику кількість наукових досліджень, спрямованих на розробку методологічних підходів, методів, засобів, методик і технологій управління виробничими процесами, в економічній науці й теорії управління дотепер не вироблені результативні, застосовні на практиці методики управління виробничою діяльністю динамічних господарських систем.

Труднощі при вирішенні позначеної проблеми зумовлюються багатьма факторами. Серед них багатофакторність завдань управління інноваційними процесами, високий ступінь ризику й невизначеності, принципова несумірність соціальних, екологічних, виробничих, ринкових, політичних факторів, що визначають ефективність прийнятих управлінських рішень. Крім того, необхідно враховувати ієрархічну побудову господарських систем, ієрархію розв'язуваних проблем, що також повинно знайти своє відбиття в концептуальних та інформаційних моделях. Широким є й спектр завдань управління виробничими процесами, що включає як стратегічне планування, так і завдання оперативного управління в режимі реального часу. Визначальним тут є своєчасне й надійне інформаційне забезпечення процесу управління виробничою (інноваційною) діяльністю реальних господарських систем, що передбачає розробку принципово нових методологічних підходів і відповідних методів, засобів, методик, технологій.

У цьому зв'язку актуальним є завдання розробки теоретико-методологічних і методичних основ управління процесами в господарській системі на основі сучасних інформаційних технологій. Дане завдання може бути вирішеним шляхом послідовної реалізації запропонованого підходу до ефективного управління виробничим процесом у господарській системі, суть якого - сполучення загальносистемного якісного підходу й новітніх математичних методів, що дозволить конструювати моделі динамічного розвитку виробничих процесів і розробити відповідні методики, що реалізуються за допомогою адекватних технологій.

В умовах ринкової економіки актуальним є питання про впровадження сучасної технології й нової техніки. Заміна застарілого обладнання новим приводить до підвищення ефективності виробництва, зокрема, до збільшення показника фондовіддачі обладнання. Для комплексної оцінки економічної ефективності від упровадження нового обладнання необхідно залучати методи економіко-математичного моделювання.

У цьому підрозділі ми ставимо завдання застосувати методи економіко-математичного моделювання до дослідження рентабельності й динаміки чистого прибутку підприємства АПК. Нашою метою є чисельне дослідження динаміки чистого прибутку підприємства залежно від частки прибутку, що виділяється на реінвестування; розрахунок рентабельності підприємства АПК.

Для даного завдання залежність між основними змінними моделі підприємства АПК представляється системою рівнянь (5.4) – (5.9), яка у випадку, що розглядається, має вигляд:

$$P(t) = f(t) \cdot A(t), \tag{5.16}$$

$$A(0) = A_0$$

$$M_{tot}(t) = (1-c) \cdot P(t), \tag{5.17}$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t), \tag{5.18}$$

$$N(t) = \tau \cdot (1-\xi) M(t), \tag{5.19}$$

$$\frac{dA}{dt} = \xi \cdot M(t). \tag{5.20}$$

Найчастіше ми будемо розглядати випадок - $\tau_3 = 1$, тобто всі реінвестовані кошти звільняються від оподаткування. Економічна ефективність підприємства АПК визначається двома основними показниками - чистим прибутком $M(t)$ і рентабельністю R за обсягом виробленої продукції:

$$R = \frac{M(t)}{P(t)} \cdot 100. \tag{5.21}$$

Рентабельність R вимірюється у відсотках. На початку розрахуємо чистий прибуток $M(t)$. З (5.16) - (5.20) знаходимо:

$$M(t) = a_0 \cdot A(t), \tag{5.22}$$

де

$$a_0 = \frac{(1-c) \cdot f}{1 + \tau \cdot (1-\xi)}. \tag{5.23}$$

Якщо визначити параметр a співвідношенням:

$$a \equiv \xi \cdot a_0 = \frac{(1-c)\cdot f \cdot \xi}{1+\tau \cdot (1-\xi)}, \tag{5.24}$$

тоді з (5.20) і (5.22) одержуємо (параметр t у функціях указувати не будемо):

$$\frac{dA}{dt} = a \cdot A,$$

Розв'язок цього рівняння очевидний:

$$A = A_0 e^{a \cdot t}. \tag{5.25}$$

Зауважимо, що в подальшому значення параметрів a_0 і a завжди будуть визначатися за (5.23) і (5.24), відповідно. Надалі будемо вважати $A_0 = 1$, тобто грошові суми записувати в одиницях A_0. З рівнянь (5.22) і (5.25), знаходимо:

$$M = M_0 e^{a \cdot t}, \tag{5.26}$$

де $M_0 = a_0 A_0$.

З визначення рентабельності R (5.21), з урахуванням (5.16) і (5.22), знаходимо:

$$R = \frac{(1-c)}{1+\tau \cdot (1-\xi)}. \tag{5.27}$$

Аналіз статистичних даних для малих підприємств сільського господарства Дніпропетровської області приводить до висновку, що реалістичні значення фондовіддачі (розраховуючи на один місяць) для окремих підприємств перебувають в області значень 0,08 – 0,18. При виконанні розрахунків будемо припускати, що фондовіддача підприємства дорівнює - $f = 0{,}12$. Вважаємо також, що підприємство є прибутковим, тобто питома собівартість c його продукції перебуває в області значень: $0{,}4 < c < 0{,}8$. Значення ставки оподатковування на прибуток визначається законодавцем і дорівнює: $\tau = 0{,}25$.

На рис. 5.2 показано результати розрахунку зведеного чистого прибутку $M_1 = \frac{M}{M_0}$ за рівнянням (5.26) для t від 0 до 48 (4 роки). Розрахунки виконані при $c = 0{,}8$.

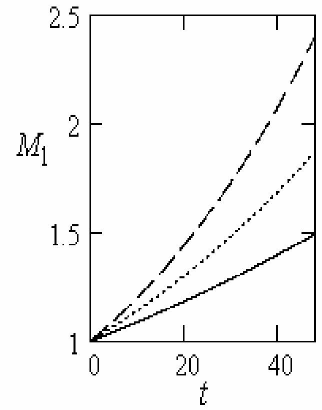


Рис. 5.2. *Динаміка* M_1*:* $\xi = 0{,}8$ *- пунктирна лінія;* $\xi = 0{,}6$ *- точкова;* $\xi = 0{,}4$ *- суцільна*

За результатами розрахунків можуть бути зроблені такі висновки. Зростання зведеного прибутку M_1 істотно залежить від частки прибутку, що виділяється на реінвестування. Причому зі збільшенням параметра реінвестування ξ, темпи зростання зведеного прибутку M_1 значно збільшуються. Це означає, що витрати коштів на збільшення основних виробничих фондів підприємства АПК є економічно виправданими.

На рис. 5.3 показано результати розрахунку рентабельності R за формулою (5.27) при різних собівартостях c. Розрахунки виконані за $f = 0{,}12$. З результатів, показаних на рис. 5.3, очевидно, що при більших питомих собівартостях рентабельність підприємства АПК буде низькою. Для $c = 0{,}8$ зростання рентабельності при зростанні ξ є незначним. При $c = 0{,}4$, по-перше, рентабельність є відносно високою й, по-друге, рентабельність R помітно зростає при зростанні ξ.

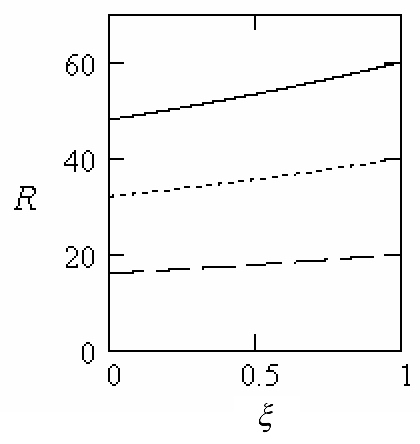


Рис. 5.3. *Рентабельність* R *як функція* ξ *при різних собівартостях* c*:* $c = 0{,}8$ *- пунктирна лінія;* $c = 0{,}6$ *- крапкова;* $c = 0{,}4$ *- суцільна*

Повернемося до аналізу загального випадку співвідношення (5.19) для $0 \le \tau \le 1$. З рис. 5.4 і 5.5 видно, що для $\xi = 0{,}4$ залежність чистого прибутку й рентабельності від τ є несуттєвою, тоді як для $\xi = 0{,}6$ й $\xi = 0{,}8$ ця залежність виявляється суттєвою.

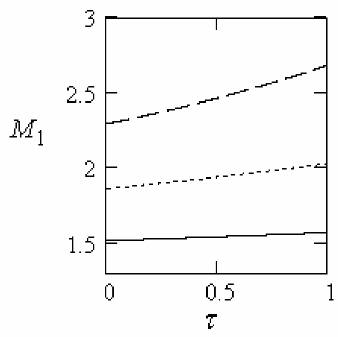


Рис. 5.4. *Динаміка* M_1 *за* $t = 36$*:*
$\xi = 0{,}8$ *- пунктирна лінія;*
$\xi = 0{,}6$ *- точкова;*
$\xi = 0{,}4$ *- суцільна*

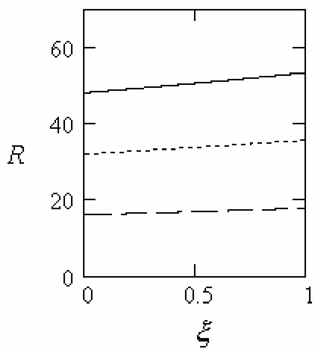


Рис. 5.5. *Рентабельність* R *як функція* ξ *при різних собівартостях* c*:*
$c = 0{,}8$ *- пунктирна лінія;*
$c = 0{,}6$ *- крапкова;*
$c = 0{,}4$ *- суцільна*

5.3. Моделювання управління фінансами підприємств

Особливістю сучасного етапу розвитку економіки України є високий рівень зношування основних засобів виробництва. У 1995 р. у середньому по Україні зношування основних засобів дорівнювало 37,1%, в 1999 р. - 42,3%, в 2004 р. - 49,3%. У промисловості цей показник у 2004 р. становив 58,3%, тобто основні засоби зношені більш ніж наполовину. Функціонування підприємств вимагає суттєвих кредитно-інвестиційних вкладень у сферу виробництва. З іншого боку, наявність ризиків у бізнесі знижує інвестиційну привабливість підприємств. Ця обставина вимагає створення схем і механізмів, що забезпечують стабільність роботи підприємства в умовах швидкої мінливості кон'юнктури ринку.

Слід зазначити суттєву роль держави у забезпеченні законодавчо-правових умов поліпшення інвестиційного клімату, спрямованих на стимулювання використання в максимальній мірі інвестиційного потенціалу всіх інвесторів поза залежністю від їх майнового, правового, інституціонального й організаційного статусу. На сучасному етапі розвитку інвестиційного процесу не виключається пряма ресурсна державна підтримка окремих інвестиційних проектів і програм. Більше того, пряма державна підтримка інфраструктурних і соціально значимих галузей економіки збереже своє значення і в перспективі. Але пряме державне регулювання інвестиційного процесу за допомогою бюджетного фінансування ініціативних інвестиційних проектів і програм буде поступово слабшати в міру зростання й масштабності інвестиційного процесу в цілому.

З метою практичної реалізації інвестиційного проекту необхідно визначити основні критерії його інвестиційної привабливості. Для оцінки економічної привабливості підприємства необхідно використовувати методики, засновані на економіко-математичному моделюванні динаміки розвитку підприємства.

У цьому підрозділі ми ставимо завдання виконати чисельне дослідження динаміки розвитку фонду нагромадження підприємства залежно від частки ξ чистого прибутку, що реінвестується на розвиток підприємства. Поставлені задачі: 1) знайти значення ξ, для різних горизонтів планування *T*, за яких фонд нагромадження досягає максимального значення; 2) виконати розрахунки для визначення впливу фондовіддачі на отримані результати.

Темп розвитку підприємства безпосередньо залежить від його внутрішніх ресурсів, тобто від капіталу, що формується в результаті здійснюваної підприємством виробничо-господарської діяльності. Чим більший обсяг цього капіталу, тим більше можливостей у підприємства для збільшення свого ресурсного потенціалу для придбання необхідних ресурсів виробництва. Цей капітал далі називатимемо "фонд нагромадження".

Будемо розглядати наступну модель динаміки підприємства. Вважаємо, що підприємство розвивається лише за рахунок внутрішніх джерел (прибутку). Основні виробничі фонди – єдиний фактор, що визначає випуск продукції. Виробнича діяльність моделюється однофакторною виробничою функцією, а темпи розвитку підприємства визначаються динамікою розвитку основних виробничих фондів. Темп розвитку підприємства безпосередньо залежить від його внутрішніх ресурсів, тобто від капіталу, сформованого в результаті здійснюваної підприємством виробничо-господарської діяльності. Таким чином, прибуток підприємства є внутрішнім джерелом, що формує фонди розвитку підприємства й визначає силу дії позитивного зворотного зв'язку. У цьому контексті фонди розвитку розглядаються як внутрішній інвестиційний фактор розвитку підприємства.

При сформульованих припущеннях залежність між основними змінними моделі підприємства подається системою рівнянь (5.16)-(5.20).

Найбільш істотним обмеженням моделі (5.16)-(5.20) є монопродуктовість підприємства. Якщо в рівнянні (5.16) вважати, що $A(t)$ - це сумарна вартість основних виробничих фондів, а $f(t)$ це ефективна фондовіддача, то модель (5.16)-(5.20) може бути застосована також і для великих підприємств. У даному підрозділі використовуємо однофакторну модель.

Динаміка основних виробничих фондів визначається рівнянням (5.25):

$$A = A_0 e^{a \cdot t}, \tag{5.28}$$

де $A_0 = 1$.

Частина прибутку $(1-\xi)$ йде на створення фонду нагромадження $F(t)$ за поточний місяць (далі аргумент t у функціях не вказано):

$$F = (1-\xi)M. \tag{5.29}$$

Комбінуючи (5.20), (5.28), (5.29), одержимо фонд нагромадження за перший рік ($T = 12$):

$$\Phi_{12} = \int_0^{12} F dt = (1-\xi)\int_0^{12} M dt = \frac{1-\xi}{\xi}\int_0^{12} \frac{dA}{dt} dt = \frac{1-\xi}{\xi}\left(e^{12a} - 1\right). \tag{5.30}$$

Фонд нагромадження потрібно обчислювати для періоду T (горизонту планування), що цікавить підприємство. Оскільки нас цікавить майбутній дохід, то необхідно враховувати коефіцієнт дисконту. Тоді загальний дохід за T місяців (T уважаємо кратним 12) обчислюється аналогічно (5.30) і дорівнює:

$$\Phi_T = \frac{1-\xi}{\xi} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{T}{12}} \frac{1}{(1+d)^k}\left[\exp(12 \cdot k \cdot a) - \exp(12 \cdot (k-1) \cdot a)\right], \tag{5.31}$$

де d - ставка дисконту; $d = 0{,}1$.

Наведені вище формули є справедливі для будь-яких підприємств, для яких виконані обмеження моделі (5.16) – (5.20). Аналіз статистичних даних для малих підприємств Дніпропетровської області приводить до висновку, що для статистично усередненого підприємства питома собівартість продукції c становить: $c = 0{,}405$; значення ставки оподатковування на прибуток - $\tau = 0{,}25$. Розрахунки будемо виконувати для двох значень фондовіддачі: $f = 0{,}1$ і $f = 0{,}14$.

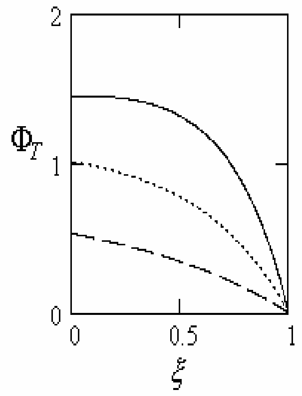


Рис. 5.6. *Фонд нагромадження як функція* ξ *для* $f = 0{,}1$ *при різних T:*
$T = 12$ *- пунктирна лінія;* $T = 24$ *- точкова;* $T = 36$ *- суцільна*

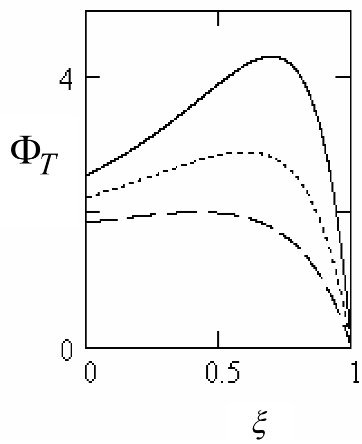


Рис. 5.7. *Фонд нагромадження як функція* ξ *для* $f = 0{,}1$ *при різних T:*
$T = 48$ *- пунктирна лінія;* $T = 60$ *- точкова;* $T = 72$ *- суцільна*

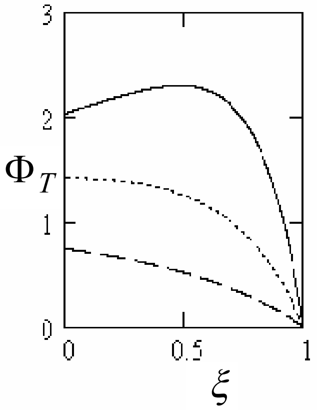


Рис. 5.8. *Те ж, що і на рис. 3.5, але для* $f = 0{,}14$

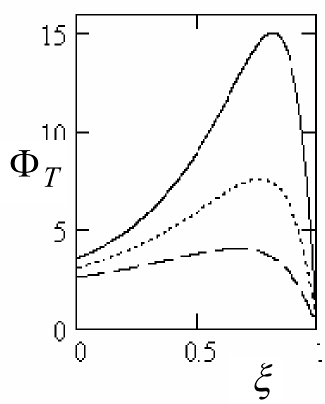


Рис. 5.9. *Те ж, що і на рис. 3.4, але для* $f = 0{,}14$

На рисунках 5.6 – 5.9 показано результати розрахунку фонду нагромадження за формулою (5.31) для різних горизонтів планування T від 12 (один рік) до 72 (6 років). За результатами розрахунків можуть бути зроблені такі висновки.

Якщо підприємство цікавить одержання прибутку в короткостроковій перспективі (12-24 місяця), то максимальний фінансовий результат, тобто фонд нагромадження, що може бути використаний для виплат дивідендів, буде отриманий при $\xi = 0$. Це означає, що в цьому випадку на розвиток підприємства прибуток витрачати не слід. Всі кошти повинні бути спрямовані до фонду нагромадження. Причому цей результат справедливий для обох розглянутих значень фондовіддачі. Якщо ж підприємство цікавить одержання доходів у середньостроковій перспективі (3-5 років) і, тим більше у довгостроковій (більше 5 років), то з рисунків 3.6 – 3.8 бачимо, що для кожного горизонту планування T є своє значення ξ, при якому досягається максимальний фінансовий результат. У таблиці 5.1 наведено результати розрахунків значень, ξ при яких досягаються максимальні значення Φ_T, а також самі ці максимальні Φ_T для горизонтів планування, що відповідають рисункам 5.6-5.9. У першому стовпці таблиці 5.1 зазначені річні значення фондовіддачі f, що відповідають місячним значенням $f = 0{,}1$ і $f = 0{,}14$.

Таблиця 5.1

Максимальні значення Φ_T для різних горизонтів планування

f	T	ξ	Φ_T	T	ξ	Φ_T
1,2	12	0	0,53	48	0,42	2,0
	24	0	1,01	60	0,598	2,89
	36	0,05	1,45	72	0,698	4,31
1,68	12	0	0,742	48	0,671	4,05
	24	0	1,42	60	0,764	7,61
	36	0,48	2,298	72	0,817	15,03

Горизонт планування, що вимірюється у роках, позначимо g ($g = T/12$). Значення ξ, при якому досягається максимальне значення Φ_T, на рис. 5.8 позначене ξ_g. Розрахунок ξ_g в інтервалі $3 \le g \le 11$ показаний на рис. 5.10.

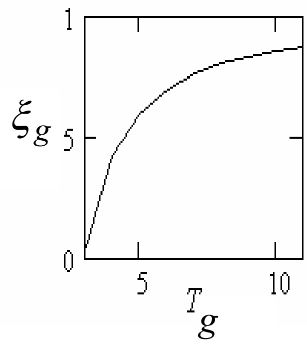


Рис. 5.10. *Залежність* ξ_g *від горизонту планування* g

У результаті проведеного дослідження можуть бути зроблені такі висновки: для одержання максимального економічного ефекту зі збільшенням горизонту планування повинна збільшуватися частка прибутку, що спрямовується на розвиток основних виробничих фондів підприємства.

5.4. Динаміка резервного фонду підприємств малого бізнесу

Підприємства малого та середнього бізнесу - важливий фактор збалансованого розвитку національних економік розвинених країн. Розвиток підприємств малого й середнього бізнесу потребує застосування різних форм фінансування цих підприємств: самофінансування, державних інвестицій, банківського кредитування й приватних (зовнішніх) інвестицій.

Підприємства малого й середнього бізнесу, що функціонують в умовах становлення ринкових відносин, є самостійними економічними агентами ринкової економіки, діяльність яких з позицій економіко-математичного моделювання може бути формалізована з використанням деякого мінімального набору параметрів, що описують роботу самих підприємств, а також їхню взаємодію з ринковим середовищем. Прийняття рішення про виділення інвестиційних ресурсів під проекти розвитку малих підприємств здійснюється на основі відомих методик по обґрунтуванню кредитно-інвестиційних вкладень. Однак не менш важливим є концептуальний аналіз основних тенденцій і закономірностей розвитку малих і середніх підприємств, що використовують кредитно-інвестиційний ресурс.

Будемо розглядати модель малого (середнього) підприємства (МСП) (5.16)-(5.20). Уважаємо, що підприємство розвивається за рахунок внутрішніх джерел (прибутку). Основні виробничі фонди – єдиний фактор, що визначає випуск продукції. Виробнича діяльність описується однофакторною виробничою функцією, а темпи розвитку підприємства визначаються динамікою розвитку основних виробничих фондів. Темп розвитку МСП безпосередньо залежить від його внутрішніх ресурсів, тобто від капіталу, що формується в результаті здійснюваної ним виробничо-господарської діяльності.

Розглянемо наступне завдання. Підприємство виконує деякий проект протягом часу T (T - горизонт планування). Необхідно вибрати таку стратегію розвитку підприємства, щоб у результаті цього проекту підприємство одержало максимально можливий прибуток.

Підприємство створює резервний фонд Φ у вигляді рахунку в банку. Динаміка фонду Φ визначається таким рівнянням:

$$\frac{d\Phi}{dt} = k\Phi + (1-\xi)M\,, \tag{5.32}$$

де k - ставка банківського відсотка по вкладах.

Перед підприємством постає таке завдання. Яким чином вибрати параметр ξ, тобто як розподілити прибуток між коштами на розвиток підприємства (рівняння (5.20)) і резервним фондом (рівняння (5.32)), щоб резервний фонд на кінець періоду T був максимальним. Для розв'язку цього завдання необхідно інтегрувати рівняння (5.32) у межах $0 < t < T$ за початкової умови $\Phi(0) = 0$. Резервний фонд при $t = T$ будемо позначати Φ_T. Завдання полягає в максимізації величини Φ_T.

Враховуючи (5.26), рівняння (5.32) запишемо у вигляді:

$$\frac{d\Phi}{dt} = k\Phi + (1-\xi)a_0 \cdot e^{a\cdot t}. \tag{5.33}$$

Рівняння (5.33), за початкових умов $\Phi(0) = 0$, має розв'язок:

$$\Phi_T = \frac{(1-\xi)a_0}{k-a}\left(e^{kT} - e^{aT}\right). \tag{5.34}$$

Зі статистичних даних для підприємств промисловості Дніпропетровської області видно, що усереднена місячна фондовіддача f малих підприємств змінюється в межах 0,098 – 0,176. Можна зробити висновок, що реалістичні значення фондовіддачі (розраховуючи на один місяць) для окремих підприємств перебувають в області значень 0,05-0,2. При виконанні розрахунків будемо припускати, що фондовіддача для розглянутого МСП дорівнює 0,14.

Вважаємо також, що МСП є прибутковим, тобто питома собівартість c його продукції перебуває в області значень: $0{,}4 < c < 0{,}8$. Значення ставки оподатковування на прибуток визначається законодавцем і дорівнює: $\tau = 0{,}25$.

На рис. 5.11 – 5.12 подано результати розрахунку резервного фонду за формулою (5.34) для різних горизонтів планування T від 12 (один рік) до 72 (6 років). Розрахунки виконано за $c = 0{,}6$ й $f = 0{,}14$. За результатами розрахунків можуть бути зроблені такі висновки. Якщо підприємство зацікавлене в одержанні прибутку в короткостроковій і середньостроковій перспективі (12 – 36 місяця), то максимальний фінансовий результат, тобто резервний фонд, що може бути використаний для виплати дивідендів, буде отриманий при $\xi = 0$ (див. рис. 5.11). Це означає, що в цьому випадку на розвиток підприємства прибуток витрачати не слід. Всі кошти повинні бути спрямовані в резервний фонд.

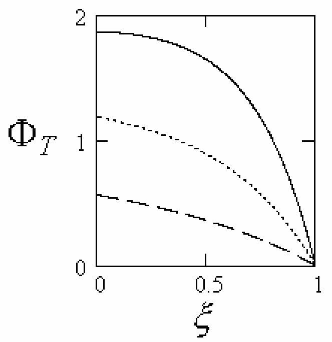


Рис. 5.11. *Резервний фонд як функція ξ за різних горизонтів планування T: $T = 12$ - пунктирна лінія; $T = 24$ - точкова; $T = 36$ - суцільна*

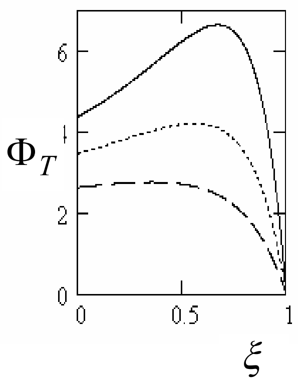


Рис. 5.12. *Резервний фонд як функція ξ при різних горизонтах планування T: $T = 48$ - пунктирна лінія; $T = 60$ - точкова; $T = 72$ - суцільна*

Якщо ж підприємство зацікавлене в одержанні доходів у довгостроковій перспективі (48 – 72 місяця), то з рис. 3.11 ми бачимо, що для кожного горизонту планування T є своє значення ξ, за якого досягається максимальний фінансовий результат. Це означає, що в цьому випадку підприємство повинно витрачати частину прибутку (ξ) на розвиток основних виробничих фондів.

У зв'язку з розрахунками на рис. 5.11 і 5.12 виникає таке важливе питання. Як зміниться динаміка розвитку резервного фонду, якщо операційні витрати підприємства зростуть, наприклад, на 10%. На рис. 5.13 подано результати розрахунку резервного фонду для тих самих значень параметрів, що й на рис. 5.12. Єдина відмінність полягає в тому, що питома собівартість c узята рівною 0,7. Порівняння з рис. 5.12 приводить до висновку, що підвищення операційних витрат істотно знижує зацікавленість підприємства в нарощуванні основних виробничих фондів.

З результатів, представлених на рис. 5.12, випливає, що для кожного з трьох горизонтів планування ($T = 48,\ 60,\ 72$) існує певне (своє для кожного горизонту планування) значення параметра ξ, за якого резервний фонд Φ_T досягає максимуму. Це означає, що, відповідно до рівняння (5.20), підприємству вигідно вкладати частину прибутку на розвиток виробництва.

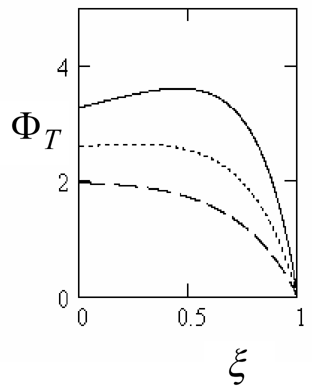


Рис. 5.13. *Те ж, що й на рис. 3.9, але за* $c = 0{,}7$

Результати на рис. 5.13 приводять до висновку, що при більш високих витратах ($c = 0{,}7$) розвиток підприємства виправданий лише для горизонту планування $T = 72$. Для $T = 48$ й $T = 60$ максимального значення резервний фонд Φ_T досягає за $\xi = 0$, що відповідно до рівняння (5.20) означає відсутність розвитку виробництва. Для порівняння вкажемо значення резервного фонду Φ_T в максимумі для горизонту планування $T = 72$ на рис. 5.12 і рис. 5.13.

При $c = 0{,}6$ (рис. 5.10) максимальне значення Φ_T досягається за $\xi = 0{,}6701$ й дорівнює: $(\Phi_T)_{\max} = 6{,}627$. При $c = 0{,}7$ (рис. 3.11) максимальне значення Φ_T досягається за $\xi = 0{,}4566$ й дорівнює: $(\Phi_T)_{\max} = 3{,}604$. Це означає, що підприємство повинно зменшувати операційні витрати. Цього можна домогтися впровадженням низьковитратних, зокрема, енергозберігаючих технологій. Розрахунки показують, що застосування технологій, які зменшують собівартість продукції, дає змогу підвищувати заробітну плату без зниження чистого прибутку підприємства.

5.5. Двофакторна модель розвитку малого підприємства

5.5.1. Модель малого підприємства з виробничою функцією типу Кобба-Дугласа

Для складання обґрунтованої програми фінансової діяльності підприємства необхідно використовувати методи економіко-математичного моделювання, що дозволяють зробити достовірний прогноз розвитку підприємства. Існує великий клас методів, заснованих на застосуванні мультиплікативних виробничих функцій, що є узагальненням класичної виробничої функції Кобба-Дугласа.

У підрозділах 5.1–5.3 було наведено результати робіт з розробки й застосування методів економіко-математичного аналізу до діяльності малих і середніх підприємств. У зазначених роботах вважалося, що основні виробничі фонди – єдиний фактор, що визначає випуск продукції, а, отже, виробнича діяльність підприємства описується однофакторною виробничою функцією. У даному підрозділі ставиться завдання узагальнити модель МП на випадок двофакторної виробничої функції типу Кобба-Дугласа й застосувати методи економіко-математичного моделювання до чисельного дослідження динаміки МП.

Метою даного підрозділу є розробка економіко-математичної моделі малого підприємства із двофакторною мультиплікативною виробничою функцією, що дозволяє розраховувати динаміку розвитку МП залежно від витрат на: 1) розвиток основних виробничих фондів; 2) оплату праці. Ставилося завдання - виконати чисельний аналіз залежності динаміки розвитку МП від основних параметрів виробництва.

Для вирішення поставленого завдання виконаємо узагальнення моделі малого підприємства, що розглядалася в підрозділах 5.1-5.3. Вважаємо, що виробнича діяльність підприємства описується мультиплікативною виробничою функцією, яка містить два фактори – вартість основних виробничих фондів і жива праця. Зазначена виробнича функція є узагальненням класичної виробничої функції Кобба-Дугласа.

Модель малого підприємства у даному випадку подана такою системою рівнянь:

$$P(t) = b \cdot [A(t)]^{\alpha} [L(t)]^{\beta}, \tag{5.35}$$

$$A(0) = A_0,\ L(0) = L_0,$$

$$M_{tot}(t) = (1-c) \cdot P(t) - L, \tag{5.36}$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t), \tag{5.37}$$

$$N(t) = \tau(1-\xi) \cdot M(t), \tag{5.38}$$

$$\frac{dA}{dt} = \xi \cdot M(t). \tag{5.39}$$

Вважаємо, що час t виміряються в місяцях. Множник $(1+\tau_2)$, що міститься в рівнянні (2.41), вважаємо включеним у визначення L. Питому собівартість випуску продукції c у рівнянні (5.36) розраховуємо відповідно до формули (2.43), де τ_2 треба покласти рівним нулю.

Проаналізуємо рівняння (5.38) отриманої системи. Для класичної моделі Кобба-Дугласа $\alpha + \beta = 1$, тоді з (5.38) одержуємо:

$$P = bA^{\alpha} L^{1-\alpha}. \tag{5.40}$$

Розглянемо два можливих випадки розвитку підприємства, виробнича функція якого має вигляд (5.40).

Перший: підприємство до основних фондів A_0 додатково закуповує таке саме обладнання на суму ΔA. Якщо ми позначимо через ΔL додаткову робочу силу, необхідну для обслуговування додаткових виробничих фондів ΔA, то через однорідність обладнання має місце очевидне співвідношення:

$$\frac{\Delta A}{\Delta L} = \frac{A_0}{L_0} \equiv k_f, \tag{5.41}$$

де k_f - фондоозброєність.

З (5.41) випливає, що:

$$L \equiv L_0 + \Delta L = k_f^{-1}(A_0 + \Delta A) = k_f^{-1} A. \tag{5.42}$$

Підставляючи (5.42) в (5.40), одержуємо:

$$P = f_1 \cdot A, \tag{5.43}$$

де $f_1 = bk_f^{\alpha-1}$. Помітимо, що згідно з (5.43) параметр f_1 фактично є фондовіддачею.

Другий випадок - підприємство, закуповує нове обладнання, що якісно відрізняється від обладнання, яке вже є у наявності. У цьому випадку замість співвідношення (5.41) одержуємо:

$$\frac{\Delta L}{\Delta A} = g(A). \tag{5.44}$$

Беручи до уваги (5.44), замість (5.42) знаходимо:

$$L = g_1(A).$$

Нехай $g_1(A)$ може бути апроксимована деякою степеневою функцією:

$$g_1(A) = d \cdot A^{\gamma},$$

(5.40) набуде вигляду:

$$P = f_2 A^{\delta}, \tag{5.45}$$

де $f_{21} = bd^{1-\alpha}$, $\delta = \alpha + \gamma - \gamma\alpha$.

Повернемося до дослідження моделі (5.35) – (5.39) з виробничою функцією загального вигляду (5.35). Будемо вважати, що праця L й основні фонди A пов'язані співвідношенням (5.42), тобто розвиток підприємства відбувається таким чином, що фондоозброєність підприємства залишається постійною. У цьому випадку система (5.35) - (5.39) набуде вигляду:

$$P = f \cdot A^{\sigma}, \tag{5.46}$$

$$A(0) = A_0, \quad L(0) = L_0,$$

$$M_{tot} = (1-c) \cdot P - k_f^{-1} A,$$

$$M = M_{tot} - N,$$

$$N = \tau(1-\xi) \cdot M,$$

$$\frac{dA}{dt} = \xi \cdot M, \tag{5.47}$$

де $f = bk_f^{-\beta}$, $\sigma = \alpha + \beta$.

З (5.46) – (5.47) знаходимо:

$$\frac{dA}{dt} = a \cdot A^{\sigma} - b_1 A, \tag{5.48}$$

де $\quad a = \dfrac{(1-c)f \cdot \xi}{1+\tau(1-\xi)}, \quad b_1 = \dfrac{k_f^{-1} \cdot \xi}{1+\tau(1-\xi)}.$

Рівняння (5.48) може бути розв’язане аналітично. Для моделі Кобба-Дугласа $\sigma = 1$ й рівняння (5.48) має очевидний розв’язок:

$$A_{\sigma=1}(t) = A_0 \exp\{(a-b_1)t\}.$$

У загальному випадку (при довільних σ) розв’язок рівняння (5.48) має вигляд:

$$A(t) = \left[\left(A_0^{1-\sigma} - \frac{a}{b_1}\right)\exp\{b_1(\sigma-1)t\} + \frac{a}{b_1}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}. \tag{5.49}$$

Неважко переконатися, що:

$$\lim_{\sigma\to 1}\left[\left(A_0^{1-\sigma} - \frac{a}{b_1}\right)\exp\{b_1(\sigma-1)t\} + \frac{a}{b_1}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = A_0 \exp\{(a-b_1)t\},$$

тобто на межі $\sigma \to 1$ розв’язок $A(t)$ переходить в $A_{\sigma=1}(t)$.

Надалі будемо досліджувати загальний випадок отриманого розв’язку (5.49), а рівність $\sigma = 1$ будемо розуміти як граничний перехід $\sigma \to 1$. Права частина формули (5.49) містить велику кількість параметрів: A_0, c, f, ξ, k_f, σ. У зв'язку з цим аналіз формули виявляється досить складним, і ми будемо його виконувати із залученням графічних методів. Оскільки параметр A_0 визначає масштаб виробництва, то для первісного виключення масштабного фактора будемо розраховувати й досліджувати нормовану на A_0 функцію:

$$A_1(t) = \frac{A(t)}{A_0}. \tag{5.50}$$

У початковий момент часу $t = 0$ нормування (5.50) приводить до бажаного результату: $A_1(0) = 1$. Однак оскільки у розв’язок (5.49) A_0 входить нелінійним способом, то повного виключення масштабного фактора простим діленням $A(t)$ на A_0 ми не одержимо. Тому насамперед необхідно дослідити залежність $A_1(t)$ від A_0.

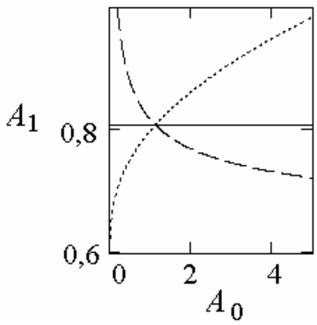


Рис. 5.14. *Залежність A_1 від A_0: $\sigma = 1$ - суцільна лінія; $\sigma = 1{,}3$ - точкова; $\sigma = 0{,}7$ - пунктирна*

На рис. 5.14 показано результати розрахунку A_1 для $t = 18$ (нагадаємо, що час t ми вмовилися вимірювати в місяцях) при таких значеннях параметрів:

$$c = 0{,}4;\ \xi = 0{,}5;\ f = 0{,}1;\ k_f = 15;\ \sigma = 1{,}3;\ \tau = 0{,}25. \qquad (5.51)$$

З рис. 5.14 помітно, що в момент часу $t = 18$ значення $A_1(18)$ буде істотно залежати від початкового масштабу виробництва A_0: при $\sigma > 1$ функція A_1 зростаюча; при $\sigma < 1$ - спадна; при $\sigma = 1$ функція A_1 не залежить від A_0. Розрахунки показують, що всі три лінії на рис. 5.14 перетинаються в одній точці - $A_{0p} = 1{,}1068$. Помітимо, що, у розглянутій моделі, “природною” одиницею вимірювання для A_0 (а значить і для $A(t)$), як це видно з (5.49), є величина $\left(\frac{a}{b_1}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}$, яка для параметрів (5.51) дорівнює 1,4208. Однак ми не будемо переходити до цієї одиниці вимірювання, а залишимо прийняту на рис. 5.14 одиницю вимірювання.

З рис. 5.14 помітна істотна залежність динаміки нормованих основних виробничих фондів від параметра σ. У зв'язку з цим на рис. 4.15 продовжене дослідження A_1 (при $t = 18$) від σ. Розрахунки виконані для трьох початкових значень основних виробничих фондів ($A_{0p} = 1{,}1068$).

З рис. 5.15 помітна важлива роль величини початкових виробничих фондів: якщо $A_0 > A_{0p}$, то зі зростанням σ A_1 також зросте; при $A_0 < A_{0p}$ збільшення σ приводить до зниження A_1; при $A_0 = A_{0p}$ величина A_1 не залежить від σ.

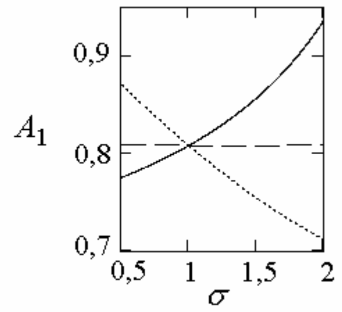


Рис. 5.15. *Залежність* A_1 *від* σ *:* $A_0 = A_{0p} + 0{,}4$ *- суцільна лінія;* $A_0 = A_{0p} - 0{,}4$ *- точкова;* $A_0 = A_{0p}$ *- пунктирна*

З формули (5.49) можна зробити висновок, що темпи зростання $A(t)$ за t обертаються на нуль за умови:

$$v \equiv A_0^{1-\sigma} - \frac{a}{b_1} = 0, \tag{5.52}$$

оскільки в цьому випадку $A(t)$ виявляється незалежною від t. При $A_0 = 1$ з умови (5.52) випливає, що собівартість c_0, яка відповідає нульовим темпам розвитку, є:

$$c_0 = 1 - \frac{A_0^{1-\sigma}}{f \cdot k_f} = \frac{1}{3}.$$

Рис. 5.16 ілюструє часову динаміку нормованих фондів A_1. З рис. 5.16 видно, що (для розглянутих значень параметрів) значення собівартості $c = c_0 = \dfrac{1}{3}$ є критичним; при $c > c_0$ виробництво буде збитковим.

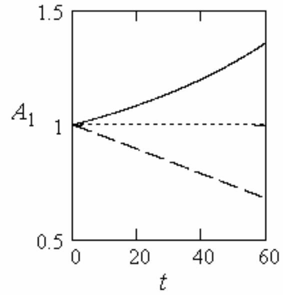


Рис. 5.16. *Динаміка* A_1 *в часі: суцільна лінія -* $c = 0{,}25$*;* *точкова -* $c = 1/3$*; пунктирна -* $c = 0.45$

З рис. 5.16 випливає, що для ефективної економічної діяльності підприємство повинно прагнути до максимального зниження матеріальних витрат. У розглянутому нами прикладі позитивна динаміка основних виробничих фондів може бути досягнута тільки за умови, що питома собівартість матеріальних витрат c (без урахування оплати праці) менша $\frac{1}{3}$.

Дослідження запропонованої моделі варто продовжити. Потрібне більш детальне вивчення питань: взаємозв'язку фондоозброєності й собівартості продукції; балансу між темпами зростання основних виробничих фондів і фондом нагромадження підприємства й ін.

5.5.2. Моделювання оптимізації оплати праці на підприємстві

Однією з актуальних проблем у плануванні виробничої діяльності підприємства є визначення оптимальної оплати праці співробітників. Підвищення оплати праці є одним із найбільш ефективних способів збільшення продуктивності праці. Оскільки зростання фонду заробітної плати природно призводить до зменшення чистого прибутку підприємства, то виникає проблема пошуку оптимального співвідношення між оплатою праці найманих робітників і прибутком власників підприємства. При цьому необхідно мати на увазі таку обставину. Питома вага вартості живої праці в кінцевій вартості виробленого продукту для підприємств України становить 7-12% тоді, як для європейських країн цей показник становить 20-30%. У цьому випадку можна сказати, що магістральний напрям розвитку національної економіки полягає в одночасному підвищенні доходів підприємств (а отже, в зростанні продуктивності праці) і істотному збільшенні оплати праці. Таким чином, потрібно вирішувати два взаємозалежні завдання. Перше завдання - визначення оптимального плану виробництва й оптимальної заробітної плати при фіксованих виробничих потужностях. Друге - планування розвитку виробничих потужностей, що приводить до необхідності збільшення штату співробітників підприємства, а також - залучення більш кваліфікованих кадрів. Вихідні дані для методики по розробці оптимального рівня оплати праці формуються на основі виробничих програм підприємства. Мета виробничої програми - розрахунок оптимального плану виробництва. Завдання оптимального плану - забезпечити найбільш ефективне завантаження наявних у виробництві потужностей. Тому завдання визначення оптимального рівня оплати праці повинно вирішуватися з урахуванням наявних виробничих потужностей підприємства. У підрозділі поставлене завдання модельного визначення оптимального рівня оплати на основі двофакторної моделі Кобба-Дугласа. Дана модель дозволяє виконати взаємозалежний аналіз вартості основних виробничих фондів підприємства й фонду заробітної плати.

Система рівнянь (5.16)-(5.20) у цьому випадку може бути представлена у наступній формі:

$$P = b \cdot A^{1-\alpha} \cdot L^{\alpha}, \tag{5.53}$$

$$M_{tot} = (1-c) \cdot P - L, \tag{5.54}$$

$$M = M_{tot} - N, \tag{5.55}$$

$$N = \tau \cdot M. \tag{5.56}$$

Завдання оптимізації заробітної плати полягає у визначенні значення L, при якому чистий прибуток підприємства досягає максимального значення. З рівнянь (5.55), (5.56) випливає:

$$M = \frac{1}{1+\tau} M_{tot}. \tag{5.57}$$

Співвідношення (5.57) означає, що завдання знаходження максимуму чистого прибутку M збігається із завданням знаходження максимуму загального прибутку M_{tot}, тому ми будемо шукати максимум M_{tot} як функцію змінної L. Насамперед відзначимо, що вартість основних виробничих фондів A визначає масштаб виробництва. Для виключення масштабу розділимо рівняння (5.54) на A, тоді, з обліком (5.53), одержимо:

$$q = (1-c)b \cdot g^{\alpha} - g, \tag{5.58}$$

де $q = \dfrac{M_{tot}}{A}$ - зведений прибуток, $g = \dfrac{L}{A}$ - зведена вартість робочої сили.

На рис. 5.17 показана розрахована за формулою (5.58) залежність зведеного прибутку q від зведеної вартості робочої сили g при $c = 0{,}5$ й $\alpha = 0{,}5$. З рис. 5.17 видно, що, по-перше, зведений прибуток істотно залежить від показника технічного рівня виробництва b й, крім того, при будь-якому значенні b функція q досягає максимуму при деякому значенні g. Розрахунки при інших значеннях питомої собівартості c й параметра α приводять до аналогічного результату.

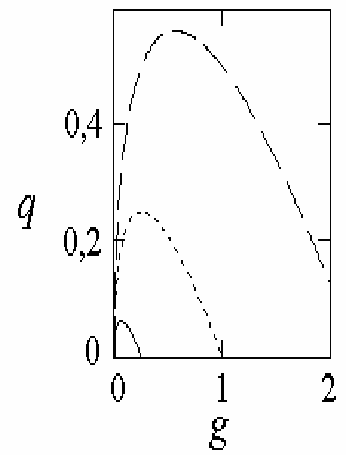


Рис. 5.17. *Залежність зведеного прибутку* q *від зведеної вартості робочої сили* g *: суцільна лінія -* $b=1$*; точкова -* $b=2$*; пунктирна -* $b=3$

Відзначимо, що максимум на кривій $q(g)$ завжди поодинокий. Оскільки значення параметра α перебуває в інтервалі $(0;1)$, то з формули (5.58) випливає, що функція $q(g)$ є позитивною в інтервалі $(0;g_0)$, де:

$$g_0=\left[(1-c)b\right]^{(1-\alpha)^{-1}}.$$

Точка максимуму функції $q(g)$ визначаються з умови:

$$\frac{\partial q}{\partial g}=0. \qquad (5.59)$$

Позначивши значення зведеної вартості робочої сили g, при якому зведений прибуток q досягає максимального значення, через g_m, з (5.59) і (5.58) знайдемо:

$$g_m=\left[(1-c)b\cdot\alpha\right]^{(1-\alpha)^{-1}}.$$

З рис. 5.18 і 5.19 видно, що зі зростанням питомої собівартості значення зведеної вартості робочої сили, при якому зведений прибуток досягає максимального значення, зменшується. Це означає, що зі зростанням питомої собівартості штат підприємства буде відносно меншим. У ряді випадків це призведе до необхідності скорочення персоналу підприємства. Якщо ж проведені заходи щодо зниження питомої собівартості (наприклад, збільшена кількість робочих змін), то це дозволить збільшити фонд заробітної плати підприємства при одночасному збільшенні максимального чистого прибутку.

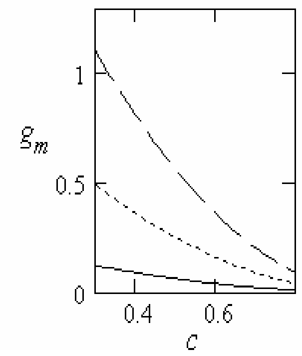


Рис. 5.18. *Залежність* g_m *від питомої собівартості c для* $\alpha = 0{,}5$*:*
суцільна лінія - $b = 1$*;*
точкова лінія - $b = 2$*;*
пунктирна - $b = 3$

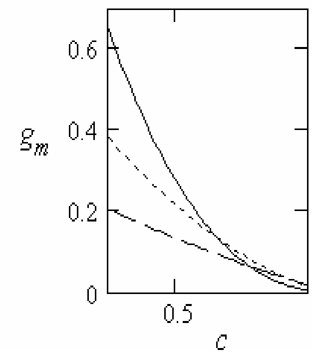


Рис. 5.19. *Залежність* g_m *від питомої собівартості c для* $b = 2$*:*
суцільна лінія - $\alpha = 0{,}6$*;*
точкова лінія - $\alpha = 0{,}4$*;*
пунктирна - $\alpha = 0{,}2$

Підставляючи в праву частину (5.58) значення зведеної вартості робочої сили g_m, при якому зведений прибуток досягає максимального значення $q_{\max}$, знаходимо:

$$q_{\max} = (1-c)b \cdot g_m{}^{\alpha} - g_m.$$

Цікаво відзначити, що при $\alpha = 0{,}5$ має місце рівність $q_{\max} = g_m$. Це означає, що за $\alpha = 0{,}5$ зростання фонду заробітної плати в даній моделі приводить до пропорційного зростання максимального прибутку підприємства.

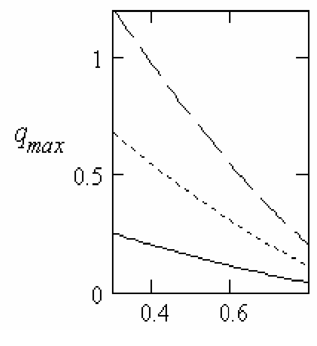


Рис. 5.20. *Залежність* $q_{\max}$ *від питомої собівартості c для* $\alpha = 0{,}3$*:*
суцільна лінія - $b = 1$ *;*
точкова лінія - $b = 2$*;*
пунктирна - $b = 3$

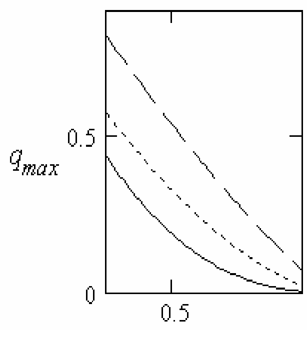


Рис. 5.21. *Залежність* $q_{\max}$ *від c для* $b = 2$*:*
суцільна лінія - $\alpha = 0{,}6$*;*
точкова лінія - $\alpha = 0{,}4$*;*
пунктирна - $\alpha = 0{,}2$

З рис. 5.20 і 5.21 помітна істотна роль питомої собівартості для максимального значення прибутку підприємства: підприємство повинно прагнути до максимального зменшення собівартості.

5.6. Модель динаміки розвитку двопродуктового малого підприємства

Малий і середній бізнес вносять істотний вклад у національну економіку розвинених країн. В економічно розвинених країнах на частку малого й середнього бізнесу припадає не менш 50% ВВП.

Дослідження динаміки малих і середніх підприємств зазвичай обмежується лише якісними методами аналізу, тоді як характер завдань, що виникають, вимагає застосування кількісних методів, і, зокрема, методів економіко-математичного моделювання, адаптованих до специфіки досліджуваного економічного об'єкта – малого підприємства.

У підрозділі побудовано економіко-математичну модель малого (середнього) підприємства, що випускає два види продукції. На основі побудованої моделі виконане дослідження динаміки розвитку підприємства залежно від частки прибутку, що виділяється на реінвестування.

Розглянемо наступну модель малого підприємства. МП розвивається за рахунок внутрішніх джерел (прибутку). Основні виробничі фонди - єдиний фактор, що визначає випуск продукції. Мале підприємство функціонує при незмінній технології, що означає сталість його фондовіддачі. З урахуванням зроблених передумов виробнича діяльність описується однофакторною виробничою функцією, а темпи розвитку підприємства визначаються динамікою розвитку основних виробничих фондів.

Основні виробничі фонди A малого (середнього) підприємства, що випускає два види продукції, можна поділити на три частини:

$$A = A_0 + A_1 + A_2, \qquad (5.60)$$

де A_0 - основні фонди, що використовуються для виготовлення обох видів продукції (на початкових стадіях виробництва);

A_1, A_2 - основні фонди, які використовуються винятково для виробництва продукції першого й другого виду, відповідно.

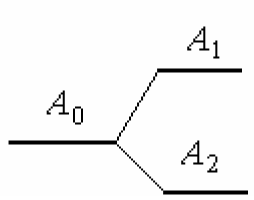


Рис. 5.22. *Співвідношення основних виробничих фондів уздовж технологічного ланцюжка*

Для моделі, що розглядається, залежність між основними змінними малого підприємства подається такою системою рівнянь:

$$P(t) = \sum_{i=0}^{2} P_i(t), \tag{5.61}$$

$$P_i(t) = f_i \cdot A_i(t), \tag{5.62}$$

$$M_{tot}(t) = \sum_{i=0}^{2} (1 - c_i) P_i(t), \tag{5.63}$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t), \tag{5.64}$$

$$N(t) = \tau \cdot (1 - \xi_0 - \xi_1 - \xi_2) M(t), \tag{5.65}$$

$$\frac{dA_i}{dt} = \xi_i \cdot M(t), \ (i = 0,1,2\ ), \tag{5.66}$$

де $P_i(t)$ - випуск i-го виду продукції в момент t у вартісному виразі;

f_i - показник фондовіддачі для i-го виду фондів (за один місяць);

c_i – питома собівартість випуску продукції (зумовлена i-тим виробничим фондом);

$M_{tot}(t)$ - загальний прибуток малого підприємства;

$M(t)$ - чистий прибуток малого підприємства за винятком податкових відрахувань;

ξ_i - частка чистого прибутку, що відраховується на реінвестування для i-го виробничого фонду $(0 \le \xi_i \le 1)$.

З рис. 3.25 зрозуміло, що для продукції уздовж технологічного ланцюжка має місце співвідношення (аргумент t у функціях указувати не будемо):

$$\tilde{p}_0 A_0 = \tilde{p}_1 A_1 + \tilde{p}_2 A_2, \tag{5.67}$$

де $\tilde{p}_i$ - питома продуктивність i-го виробничого фонду. Співвідношення (5.67) запишемо у вигляді:

$$A_0 = p_1 A_1 + p_2 A_2, \tag{5.68}$$

де $p_i = \tilde{p}_i / \tilde{p}_0$ - зведені значення питомих продуктивностей. Диференціюючи рівняння (5.68), з урахуванням (5.66), по t знаходимо:

$$\frac{dA_0}{dt} = (p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2) \cdot M . \tag{5.69}$$

З рівнянь (5.69) і (5.66) (для $i=0$) маємо:

$$\xi_0 = p_1\xi_1 + p_2\xi_2. \qquad (5.70)$$

З виразу (5.65) випливає, що повинна виконуватися нерівність:

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \le 1. \qquad (5.71)$$

Будемо вважати, що темпи розвитку виробничих фондів A_1 і A_2 погоджені між собою. Це означає, що погоджені параметри реінвестицій ξ_1 і ξ_2;тобто вважаємо, що:

$$\xi_2 = k\cdot\xi_1. \qquad (5.72)$$

З рівнянь(5.70), (5.71) і (5.72) випливає обмеження на ξ_1:

$$\xi_1 \le \frac{1}{1+p_1+(1+p_2)k}. \qquad (5.73)$$

З системи (5.61) - (5.66), з урахуванням (5.68), знаходимо:

$$M = a_1A_1 + a_2A_2, \qquad (5.74)$$

де

$$a_i = \frac{(1-c_0)p_if_0 + (1-c_i)f_i}{1+\tau\cdot(1-\xi_0-\xi_1-\xi_2)}.$$

З (5.66) зрозуміло, що $\frac{A_1}{\xi_1} = \frac{A_2}{\xi_2} + K$, де K - константа. У початковий момент часу (при $t=0$) одержуємо: $K = \frac{A_{10}}{\xi_1} - \frac{A_{20}}{\xi_2}$, де $A_{i0} = A_i(0)$. Комбінуючи останні два співвідношення, що містять K, знаходимо:

$$A_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\left(A_1 - A_{10}\right) + A_{20}. \qquad (5.75)$$

З (5.74) і (5.75) дістанемо:

$$M = b_1A_1 + b, \qquad (5.76)$$

де $b_1 = a_1 + a_2k$, $b = a_2(A_{20} - kA_{10})$.

З урахуванням (5.76), знаходимо розв'язок рівняння (5.66) для A_1:

$$A_1 = \left(A_{10} + \frac{b}{b_1}\right) \cdot \exp\{\xi_1 b_1 t\} - \frac{b}{b_1}. \tag{5.77}$$

Основним економічним завданням підприємства є одержання чистого прибутку, що акумулюється у вигляді фонду нагромадження F:

$$F = \int_0^T (1 - \xi_0 - \xi_1 - \xi_2) M \cdot dt = \frac{1 - \xi_0 - \xi_1 - \xi_2}{\xi_1} \int_0^T \frac{dA_1}{dt} \cdot dt =$$

$$= \frac{1 - [1 + p_1 + k(1 + p_2)]\xi_1}{\xi_1} \left(1 + \frac{a_2(q - k)}{b_1}\right) (\exp\{\xi_1 b_1 T\} - 1) \cdot A_{10}, \tag{5.78}$$

де T - горизонт планування; $q = \dfrac{A_{20}}{A_{10}}$. Зазначимо, що відповідно до (5.78) фонд нагромадження F пропорційний початковому значенню основних виробничих фондів A_1, тобто величині A_{10}. Фактично, величини A_{10} й A_{20} визначають масштаб виробництва. Для виключення масштабу будемо використовувати як одиницю виміру для F величину A_{10}, тобто будемо вважати $A_{10} = 1$.

Перш за все, необхідно з'ясувати значення параметрів p_1 і p_2 у формулі (5.68). У силу незмінності технології, що було застережено вище, продуктивності $\widetilde{p}_i$ у формулі (5.67) є сталими. Тому ми можемо записати рівняння (5.68) для початкового моменту часу $t = 0$, і, розділивши ліву й праву частину отриманої рівності на початкове значення основних виробничих фондів A_0, тобто на $A_0(0) \equiv A_{00}$, знайдемо:

$$1 = p_1 v_1 + p_2 v_2, \quad \text{де} \quad v_i = \frac{A_{i0}}{A_{00}}. \tag{5.79}$$

Нагадаємо, що $A_{i0} = A_i(0)$. Для здійснення чисельних розрахунків за формулою (5.78), як приклад, розглянемо виробництво для якого на початку інвестиційного проекту ($t = 0$) вартості всіх трьох виробничих фондів (див. рис. 3.25) рівні:

$$A_{00} = A_{10} = A_{20}. \tag{5.80}$$

Тоді з (5.79) і з означення q випливає, що $q = 1$ й $v_1 = v_2 = 1$. З (5.79) тепер знаходимо зведені значення продуктивностей p_1 і p_2: $p_1 = 0{,}5$; $p_2 = 0{,}5$. Інвестиційна стратегія підприємства визначається параметром k відповідно до рівняння (5.72). Вважаємо, що підприємство зацікавлене у більш швидкому розвитку основних виробничих фондів A_1. У цьому зв'язку коштів на розвиток основних виробничих фондів A_1 виділяється на 20% більше, ніж на A_2. Це означає, що в рівнянні (5.72) коефіцієнт k повинен бути обраний рівним 0,8. Значення інших параметрів в (5.78) були обрані на основі статистичних даних для малих підприємств Дніпропетровської області (див. [65, 68]): питома собівартість випуску продукції c_0, що зумовлена виробничим фондом A_0, обрана рівною $c_0 = 0{,}5$; аналогічно для фондів A_1 і A_2, відповідно - $c_1 = 0{,}45$; $c_2 = 0{,}55$; показник фондовіддачі для фонду A_0 (за один місяць) вибраних $f_0 = 0{,}12$; показники фондовіддачі для фондів A_1 і A_2 задані в одиницях f_0 - $f_1 = 1{,}2 f_0$; $f_2 = 1{,}3 f_0$. Зазначимо, що з (5.73), за вибраних значень параметрів, випливає: $\xi_1 \le (\xi_1)_{\max} \equiv 0{,}3704$.

Перш ніж виконувати розрахунки по формулах (5.77), (5.78), необхідно проаналізувати співвідношення (5.73). На рис. 5.23 показано верхні межі параметра ξ_2 ($(\xi_2)_{\max}$) як функції ξ_1 для двох наборів параметрів p_1 і p_2.

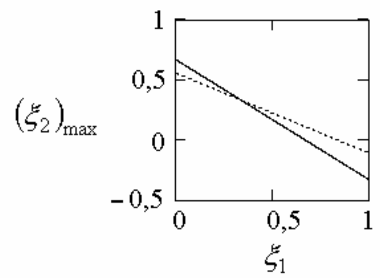
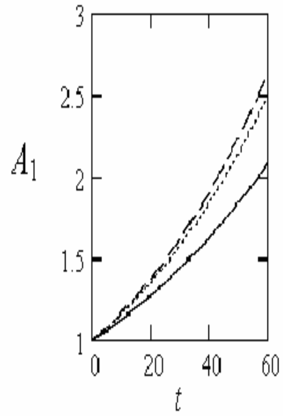


Рис. 5.23. *Розрахункові значення* $(\xi_2)_{\max}$*: суцільна лінія -* $p_1 = 0{,}5$*,* $p_2 = 0{,}5$*; точкова -* $p_1 = 0{,}2$*;* $p_2 = 0{,}8$

Значення $p_1 = 0{,}5$ й $p_2 = 0{,}5$ відповідають «симетричному виробництву», тобто продуктивності для обох видів продукції, у цьому випадку збігаються.

На рис. 5.24 і 5.25 представлено результати розрахунку динаміки вартості основних виробничих фондів для першого виду продукції $A_1(t)$ при $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}5$. Для параметра ξ_1 були вибрані значення характерні для малих підприємств. Для параметра ξ_2 вибиралися відповідні максимальні значення.



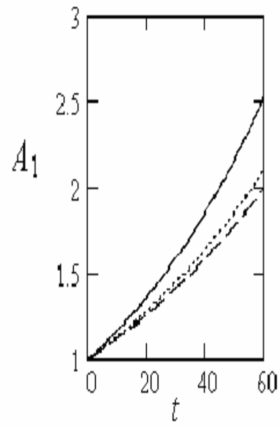


Рис. 5.24. *Динаміка фонду* $A_1(t)$*: суцільна лінія -* $\xi_1 = 0{,}15$*,* $\xi_2 = 0{,}517$*; точкова -* $\xi_1 = 0{,}5$*,* $\xi_2 = 0{,}167$*; штрих-пунктирна -* $\xi_1 = 0{,}6$*,* $\xi_2 = 0{,}067$

Рис. 5.25. *Те ж, що на рис. 3.27, але значення* ξ_1 *й* ξ_2 *змінюються місцями*

Відзначимо, що вибір параметрів ξ_1 і ξ_2 є суб'єктивним і визначається підприємством на основі поточних потреб. Результати представлені на рис. 3.27 і 3.28 показують, що підприємство може забезпечити високі темпи розвитку основних виробничих фондів A_1 навіть без залучення зовнішніх кредитів. Аналогічні результати можуть бути отримані й для основних виробничих фондів A_2.

На рис. 5.26 показано результати розрахунку фонду нагромадження F як функції горизонту планування T за формулою (5.78). З розрахунків, поданих на рис. 5.26, випливає, що темпи зростання фонду нагромадження істотно залежать від частки прибутку ξ, що реінвестується на розвиток виробництва. Для $\xi_1 = 0{,}15$ темпи зростання фонду нагромадження виявляються досить високими. Для горизонту планування $T = 60$ місяців фонд нагромадження складе - $F = 3{,}1496 A_{10}$, тобто більш ніж у три рази перевищить початкове значення вартості основних виробничих фондів A_1. З огляду на те, що згідно з (5.80) повна початкова вартість виробничих фондів $A(0) = 3A_{10}$, отримуємо, що при горизонті планування $T = 60$ місяців і $\xi_1 = 0{,}15$ фонд нагромадження F перевищить початкову сумарну вартість основних виробничих фондів. Повна вартість виробничих фондів при $T = 60$, як видно з таблиці, складе $5{,}1439\, A_{10}$.

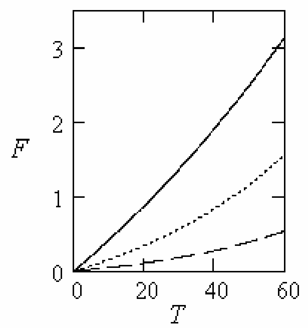


Рис. 5.26. *Розрахункові значення фонду нагромадження* F *при* $T \in [0; 60]$*: суцільна лінія -* $\xi_1 = 0{,}15$*; точкова -* $\xi_1 = 0{,}3$*; пунктирна -* $\xi_1 = 0{,}35$

У таблиці 5.2 подано результати розрахунку фонду нагромадження F, і основних виробничих фондів A_1, A_2, A_0, A для горизонту планування $T = 60$; розрахунки виконані за формулами (5.78), (5.77), (5.75), (5.68), (5.60).

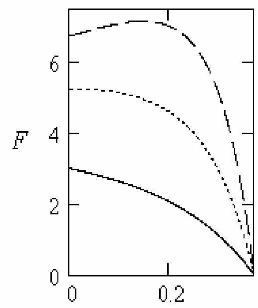
Таблиця 5.2

Значення величин F, A_1, A_2, A_0, A *в одиницях* A_{10}

ξ_1	ξ	F	A_1	A_2	A_0	A	$F + A$
0,15	0,405	3,1496	1,794	1,6352	1,7146	5,1439	8,2935
0,3	0,81	1,5679	3,4756	2,9805	3,2281	9,6842	11,2521
0,35	0,945	0,5412	4,4441	3,7553	4,0997	12,299	12,8402

У другому стовпці таблиці показана сумарна частка прибутку, що виділяється на реінвестування для всіх виробничих фондів. З розрахунків, поданих у таблиці, можна зробити висновок про економічні результати, що будуть отримані через 5 років після початку інвестиційного проекту. Якщо основним завданням підприємства для горизонту планування $T = 60$ є одержання чистого прибутку, то видатки на реінвестування повинні бути мінімальні. У тому випадку, коли ставитися завдання розвитку виробництва, то частка прибутку, що йде на реінвестування, повинна бути максимальною (в межах можливостей підприємства). В останньому стовпці таблиці показаний сукупний економічний ефект $E = F + A$. При цьому видно, що E зростає при збільшенні ξ, тобто витрати коштів на реінвестування виявляються економічно виправданими.

На рис. 5.27 подано результати розрахунку фонду нагромадження F залежно від частки ξ_1 прибутку, що реінвестується на розвиток фондів A_1 (нагадаємо, що ξ_2 при цьому визначено співвідношенням (5.72)). Розрахунки виконані для інтервалу $0 \le \xi_1 \le (\xi_1)_{\max}$.



ξ_1

Рис. 5.27. *Залежність фонду нагромадження F від ξ_1 ($\xi_1 \in [0; 0{,}37]$): суцільна лінія - $T = 4$ роки; точкова - $T = 7$ років; пунктирна - $T = 9$ років*

З рис. 5.27 видно, що при $T < 84$ місяців (7 років) максимальне значення F досягається при $\xi_1 = 0$. Це означає, що коли підприємство ставить єдине завдання – одержання максимального прибутку, то при горизонтах планування (або часу існування проекту) менше, ніж 7 років витрачати прибуток на реінвестування не має сенсу. Реінвестування виявляється у цьому випадку економічно виправданим лише при горизонтах планування $T > 7$ років, оскільки при $T > 7$ на кривій $F(\xi)$ з'являється максимум в інтервалі $0 < \xi_1 < (\xi_1)_{\max}$. Зокрема, для $T = 9$ років максимальне значення F досягається при $\xi = 0{,}1675$.

Співвідношення (5.72) приводить до висновку, що при $k \neq 1$ темпи зростання фондів A_1 і A_2 будуть різними. Для більш детального дослідження цього питання на рис. 5.28 показані результати розрахунку величини $g = \dfrac{A_2(60)}{A_1(60)}$ для $T = 5$ років.

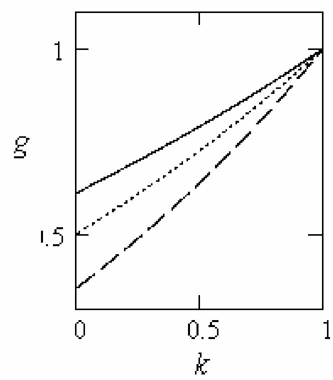


Рис. 5.28. *Залежність g від k: суцільна лінія - $\xi_1 = 0{,}15$; точкова - $\xi_1 = 0{,}22$; пунктирна - $\xi_1 = 0{,}35$*

5.7. Мале підприємство у структурі промислового комплексу

Відмітною рисою МП є його безінерційність, тобто здатність швидко підлаштовуватися під кон'юнктуру ринку й переходити на випуск нової продукції. Ця особливість МП робить його привабливим партнером для великого підприємства. Великому підприємству (ВП) для забезпечення своєї діяльності найчастіше необхідна деяка дрібносерійна продукція, яку самому підприємству виробляти невигідно. У цьому випадку ВП хоче розмістити замовлення на МП. Такий вид співробітництва приводить до певної кооперації великого і малого підприємства. Якщо ця кооперація припускає також використання товарної марки ВП, під якою МП випускає й реалізує свою продукцію, надання великим і малим підприємствам кредитів і т.ін., то така взаємодія ВП і МП називається франчайзингом. Для складання обґрунтованої програми фінансової й виробничої кооперації ВП і МП необхідно використовувати методи економіко-математичного моделювання.

Метою даного підрозділу є розробка економіко-математичної моделі, що дозволяє досліджувати спільну виробничу діяльність ВП і МП; визначити умови, за яких ця діяльність приносить найбільший економічний ефект; розрахувати динаміку розвитку підприємств залежно від ступеня їхньої кооперації.

Розвиток МП в Україні супроводжується певними труднощами, зумовленими тим, що контингент, зайнятий у цій сфері діяльності, як правило, не має економічних і юридичних знань, без яких неможливі прийняття обґрунтованих рішень і розробка ефективної стратегії й тактики проведення конкурентної боротьби з великими компаніями. Однак у МП є можливість об'єднати зусилля з ВП. При цьому МП прагне перетвориться з конкурента ВП на його партнера.

Типова схема взаємодії МП і ВП наведена на рис. 5.29. Основні виробничі фонди (ОВФ) МП і ВП будемо позначати, відповідно, A і K. ВП забезпечує необхідні інвестиції (I_1) для МП, а МП поставляє частину своєї продукції в обсязі P_1 на ВП.

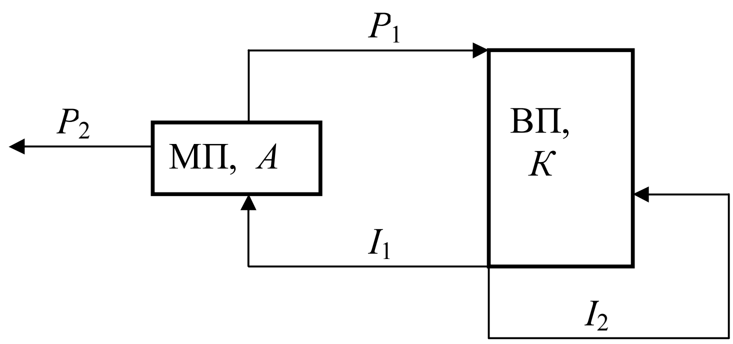


Рис. 5.29. *Схема взаємодії малого й великого підприємств*

Вибір найбільш оптимальної форми взаємодії МП і ВП припускає розробку математичної моделі, що відповідає схемі на рис. 5.29. Для вирішення поставленого завдання застосуємо такі моделі МП і ВП. Вважаємо, що ОВФ – єдиний фактор, що визначає випуск продукції. Виробнича діяльність описується однофакторною виробничою функцією підприємства. Час t будемо вимірювати в місяцях. Продукцію ВП не розглядаємо, оскільки нас цікавить насамперед динаміка розвитку МП. Що стосується продукції МП (P), то вона, як правило, має подвійне призначення. По-перше, частина продукції P_1 призначена для забезпечення діяльності ВП, інша продукція P_2 реалізується на зовнішньому ринку. Продукція P_1 - це, зазвичай, виробництво запчастин, ремонтно-відбудовні роботи й т.ін.

З урахуванням вказаних передумов, залежність між основними змінними моделі МП подається такою системою рівнянь:

$$P(t) = f_A \cdot A(t), \tag{5.81}$$

$$A(0) = A_0,$$

$$P_1(t) = \eta P(t), \tag{5.82}$$

$$M(t) = (1-\tau_p)\left[(1-\tau_{av})(1-c)P_1(t) - \mu \cdot A(t)\right], \tag{5.83}$$

$$\frac{dA}{dt} = s \cdot M(t) + I_1(t), \tag{5.84}$$

де $P(t)$ - випуск продукції в момент t у вартісному вираженні;

f_A - показник фондовіддачі для МП(за один місяць);

$A(t)$ - поточна вартість ОВФ МП;

A_0 - вартість ОВФ МП у момент $t = 0$;

$M(t)$ - чистий поточний прибуток МП;

c - питома собівартість продукції МП;

τ_p - податок на прибуток;

τ_{av} - податок на додану вартість;

μ - норма амортизації;

s - частка чистого прибутку, що відраховується на реінвестування $(0 \le s \le 1)$ для МП;

$I_1(t)$ - обсяг інвестицій, які виділяє ВП на розвиток МП.

Для наших цілей математичну модель ВП можна вибрати в такому вигляді:

$$X(t) = f_K \cdot K(t), \tag{5.85}$$

$$M_{КП}^{tot}(t) = (1-c_1) \cdot X(t),$$

$$M_{КП}(t) = M_{КП}^{tot}(t) - N(t), \quad (5.86)$$
$$N(t) = \tau_p \cdot M_{КП}(t),$$
$$\frac{dK}{dt} = \xi \cdot M_{КП}(t) + P_1(t), \quad (5.87)$$
$$P_1(t) = \eta P(t), \quad (5.88)$$

де $X(t)$ - випуск продукції в момент t у вартісному вираженні;

f_K - показник фондовіддачі для ВП (за один місяць);

$K(t)$ - поточна вартість ОВФ ВП;

c_1 – питома собівартість продукції ВП;

$M_{КП}^{tot}(t)$ - загальний прибуток ВП;

$M_{КП}(t)$ - чистий прибуток ВП, за винятком податкових відрахувань;

$N(t)$ - сума податкових відрахувань;

ξ - частка чистого прибутку, яка відраховується на реінвестування $(0 \le \xi \le 1)$ для ВП;

η - коефіцієнт, що змінюється в межах від 0 до 1.

Система рівнянь (5.81)-(5.88) описує взаємодію МП і ВП і відповідає схемі, показаній на рис. 3.33: інвестиції, які виділяє ВП на розвиток МП, ідуть на збільшення вартості ОВФ МП; частина продукції, вироблена МП, іде на розвиток ОВФ ВП. Оскільки конкретне значення параметра η не є для нас принциповим, то надалі вважаємо, що $\eta = 1$.

З рівнянь (5.81) - (5.84) знаходимо:
$$\frac{dA}{dt} = a \cdot A(t) + I_1(t), \quad (5.89)$$
де $a = s(1-\tau_p)\left[(1-\tau_{av})(1-c)f_A - \mu \cdot\right]$

З рівнянь (5.85) - (5.88) знаходимо:
$$\frac{dK}{dt} = a_1 \cdot K(t) + P(t), \quad (5.90)$$
де $a_1 = \dfrac{(1-c_1)f_K \cdot \xi}{1+\tau_p}$.

Система рівнянь (5.89) і (5.90) визначає взаємозалежний розвиток МП і ВП. Спочатку розглянемо стадію становлення МП (перший граничний випадок системи (5.89), (5.90)). На початкових етапах внесок МП у розвиток ОВФ ВП є незначним ($a_1 \cdot K(t) >> P_1(t)$), тоді рівняння (5.90) набере вигляду $\frac{dK}{dt} = a_1 \cdot K(t)$ і його розв'язком є:

$$K(t) = K_0 e^{a_1 t}, \tag{5.91}$$

де $K_0 = K(0)$.

Оскільки ми вважаємо, що ОВФ МП є малими, а інвестиції на розвиток МП мають той самий порядок, що і величина ОВФ, то на початкових стадіях розвитку МП інвестиції також є малими. Це означає, що ВП має певну свободу у виборі способів інвестування. ВП може вибрати чотири стратегії інвестування МП: 1) постійні в часі інвестиції - $I_1(t) = I_0$; 2) інвестиції, що лінійно зростають у часі - $I_1(t) = \beta \cdot t$; 3) інвестиції пропорційні ОВФ ВП - $I_1(t) = k \cdot K(t)$, з постійним коефіцієнтом k; 4) інвестиції пропорційні ОВФ ВП - $I_1(t) = k_2(t) \cdot K(t)$, з коефіцієнтом $k_2(t)$ пропорційним ОВФ МП, тобто $k_2(t) = k_1 A(t)$. Економічний зміст цих стратегій такий. Постійні в часі інвестиції має сенс вибрати в тому випадку, коли розвиток МП вимагає залучення приблизно однакових інвестицій протягом горизонту планування (періоду розвитку МП). Лінійно зростаючі в часі інвестиції можуть забезпечити значне зростання ОВФ МП на даному проміжку часу. Інвестиції пропорційні ОВФ ВП з постійним коефіцієнтом k відображають можливості ВП по інвестуванню МП; фактично ці інвестиції є постійною часткою реінвестицій ВП. У тому випадку, коли ВП ставить основним завданням інвестування в МП - прискорений розвиток МП, воно може вибрати четверту схему інвестування.

Розв’язки диференціального рівняння (5.89) з урахуванням (5.91) для розглянутих схем інвестування, що задовольняють початковій умові $A(0) = A_0$, мають відповідно вигляд:

$$A_1(t) = \left(A_0 + \frac{I_0}{a} \right) e^{at} - \frac{I_0}{a}, \tag{5.92}$$

$$A_2(t) = \left(A_0 + \frac{\beta}{a^2} \right) e^{at} - \frac{\beta}{a^2}(a \cdot t + 1), \tag{5.93}$$

$$A_3(t) = \left(A_0 + \frac{k \cdot K_0}{(a - a_1)} \right) e^{at} - \frac{k \cdot K_0}{(a - a_1)} e^{a_1 t}, \tag{5.94}$$

$$A_4(t) = A_0 \exp\left\{ a \cdot t + \frac{k_1 K_0}{a_1} \left(e^{a_1 t} - 1 \right) \right\}. \tag{5.95}$$

Для виконання розрахунків за формулами (5.92) – (5.95) були обрані такі значення параметрів: $f_A = 0{,}14$, $f_K = 0{,}02$ (у розрахунку на один місяць), $A_0 = 1$, $K_0 = 100$, $s = 0{,}5$, $\xi = 0{,}1$, $c = 0{,}6$, $c_1 = 0{,}7$, $\mu = 0$, $I_0 = 8{,}4 \cdot 10^{-4}$, $\beta = 5{,}7 \cdot 10^{-4}$, $k = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$, $k_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$; ставка оподатковування на прибуток τ визначається законодавцем - $\tau_p = 0{,}25$, $\tau_{av} = 0{,}2$.

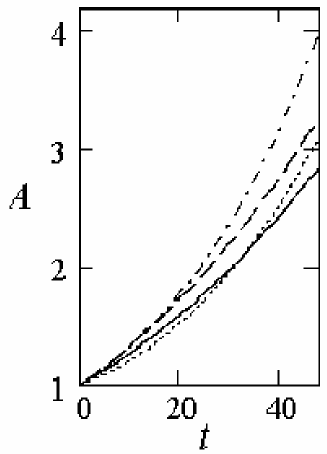


Рис. 5.30. *Залежність вартості ОВФ МП від* t:
суцільна лінія - $A_1(t)$;
точкова лінія - $A_2(t)$;
пунктирна лінія - $A_3(t)$;
штрих-пунктирна лінія - $A_4(t)$

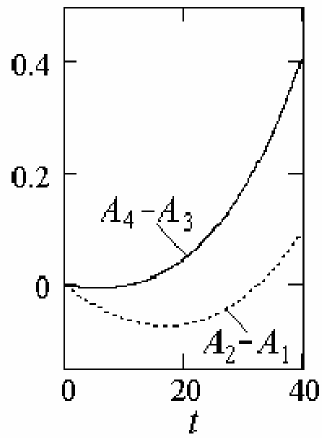


Рис. 5.31. *Залежність функцій* $A_4(t) - A_3(t)$ *і* $A_2(t) - A_1(t)$ *від часу*

На рис. 5.30 показано залежності від часу вартості ОВФ МП, розраховані за формулами (5.92) – (5.95). Розрахунки виконані в інтервалі від 0 до 48 місяців (4 роки). З представлених на рис. 5.31 результатів видно, що при $t < 32{,}35$, має місце нерівність $A_2(t) < A_1(t)$, а при $t > 32{,}35$ - $A_2(t) > A_1(t)$. Цей рисунок ілюструє взаємне розташування пар ліній $A_3(t)$, $A_4(t)$ і $A_1(t)$, $A_2(t)$.

Розглянемо другий граничний випадок системи рівнянь (5.89), (5.90). Припустимо, що всі кошти, необхідні для розвитку ОВФ ВП, виділяються у вигляді інвестицій для МП. Така ситуація має місце, коли всі ремонтно-відбудовні роботи з підтримки в робочому стані ОВФ ВП, виконує МП, і все необхідне обладнання виготовляє також МП. У цьому випадку система рівнянь (5.89), (5.90) набуває вигляду:

$$\frac{dA}{dt} = a \cdot A(t) + a_1 \cdot K(t), \tag{5.96}$$

$$\frac{dK}{dt} = f_A \cdot A(t), \tag{5.97}$$

де враховано, що відповідно до рівняння (5.81) $P(t) = f_A \cdot A(t)$. У результаті диференціювання рівняння (5.96) за часом система рівнянь (5.96), (5.97) може бути зведена до одного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

$$A'' - aA' - bA = 0, \tag{5.98}$$

де $b = a_1 f_A$. Характеристичне рівняння для рівняння (5.98) $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ має наступні корені:

$$\lambda_1 = 0{,}5(a - d),\ \lambda_2 = 0{,}5(a + d), \tag{5.99}$$

де $d = \sqrt{a^2 + 4b}$. Загальний розв'язок рівняння (5.98) можна записати у вигляді:

$$A(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.100}$$

де постійні C_1 й C_2 визначаються з початкових умов:

$$C_1 + C_2 = A_0, \quad C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 = a \cdot A_0 + a_1 \cdot K_0. \tag{5.101}$$

З системи рівнянь (5.101) знаходимо:

$$C_1 = \frac{A_0\lambda_2 - \varphi}{d}, \qquad C_2 = \frac{-A_0\lambda_1 + \varphi}{d}, \tag{5.102}$$

де $\varphi = a \cdot A_0 + a_1 \cdot K_0$. Підставляючи вираз (5.100) у праву частину (5.97) і інтегруючи отримане рівняння з урахуванням початкової умови $K(0) = K_0$, знаходимо:

$$K(t) = K_0 + f_A \left[\frac{C_1}{\lambda_1}\left(e^{\lambda_1 t} - 1\right) + \frac{C_2}{\lambda_2}\left(e^{\lambda_2 t} - 1\right) \right]. \tag{5.103}$$

Вирази (5.100) і (5.103), з урахуванням співвідношень (5.99) і (5.102), є розв'язками системи диференціальних рівнянь (5.96), (5.97).

На рис. 5.32 представлено результати розрахунків часової динаміки вартості ОВФ МП, що виконані за формулами (5.100) для трьох значень параметра реінвестування s. Часовий інтервал розрахунків становить 36 місяців. Зазначимо, що в цьому випадку параметр реінвестування для ВП ξ фактично виконує роль норми амортизації. Розрахунки, які представлені на рис. 5.32 й 5.33, виконані при $\xi = 0{,}02$.

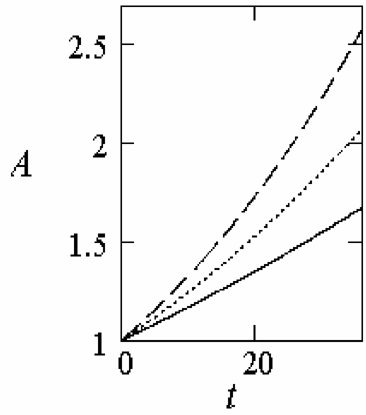


Рис. 5.32. *Залежність вартості ОВФ МП від* t*:*
суцільна лінія - $s = 0{,}2$*;*
точкова лінія - $s = 0{,}4$*;*
пунктирна лінія - $s = 0{,}6$

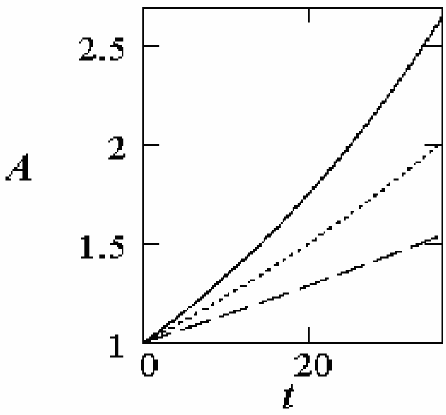


Рис. 5.33. *Залежність вартості ОВФ МП від* t*:*
суцільна лінія - $c = 0{,}5$*;*
точкова лінія - $c = 0{,}7$*;*
пунктирна лінія - $c = 0{,}9$

На рис. 5.33 подано результати розрахунків часової динаміки вартості ОВФ МП, які виконані за формулами (5.100) для трьох значень питомої собівартості c. З рис. 5.32 й 5.33 видна істотна залежність темпів розвитку МП від параметра реінвестування s для МП і від питомої собівартості його продукції.

Розглянемо систему рівнянь (5.89), (5.90) у загальному випадку. У наведених вище розрахунках ми фактично вважали, що інвестування МП великим провадиться з фонду нагромадження ВП. Таке припущення можна було зробити, оскільки ОВФ МП вважалися незначними. Для того, щоб систему рівнянь (5.89) і (5.90) можна було використати без зазначеного обмеження, перейдемо до більш детального формулювання завдання. Чистий прибуток ВП, отриманий за місяць t, позначимо $M_{КП}(t)$. Цей прибуток ділиться в частках ξ й $1-\xi$ $(0<\xi<1$ на утворення фонду розвитку підприємства F_R й фонду нагромадження F_N: $F_R(t)=\xi \cdot M_{КП}(t)$, $F_N(t)=(1-\xi)\cdot M_{КП}(t)$. Фонд розвитку підприємства $F_R(t)$ визначає динаміку поточного розвитку підприємства. У випадку кооперації з МП частина цього фонду може бути використана як інвестиції для розвитку МП. Вважаємо, що фонд $F_R(t)$ ділиться в частках q й $1-q$ $(0<q<1)$ на інвестиції для МП (I_1) і на реінвестування (I_2) (див. рис. 3.33), тобто:

$$I_1(t)=q\xi \cdot M_{КП}(t), \quad I_2(t)=(1-q)\xi \cdot M_{КП}(t). \tag{5.104}$$

Використовуючи співвідношення (5.104) у рівняннях (5.89) і (5.90), одержимо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dA}{dt} = a \cdot A(t) + b \cdot K(t), \qquad (5.105)$$

$$\frac{dK}{dt} = f_A \cdot A + a_1 \cdot K(t), \qquad (5.106)$$

де $a = s(1-\tau_p)(1-\tau_{av})(1-c) f_A$, $b = \dfrac{(1-c_1) f_K \cdot \xi \cdot (1-q)}{1+\tau_p}$,

$$a_1 = \frac{(1-c_1) f_K \cdot \xi \cdot q}{1+\tau_p}.$$

Систему однорідних диференціальних рівнянь розв'язуємо методом Ейлера. Характеристичним рівнянням системи рівнянь (5.105), (5.106) є:

$$(a-\lambda)(a_1-\lambda) - b \cdot f_A = 0.$$

Це рівняння має два різних дійсних корені:

$$\lambda_1 = 0{,}5(a + a_1 - d) \text{ і } \lambda_2 = 0{,}5(a + a_1 + d),$$

де $d = \sqrt{(a+a_1)^2 + 4bf_A}$.

Загальний розв'язок системи рівнянь (5.105), (5.106) є:

$$A(t) = C_1 \exp\{\lambda_1 t\} + C_2 \exp\{\lambda_2 t\}, \qquad (5.107)$$

$$K(t) = \frac{\lambda_1 - a}{b} C_1 \exp\{\lambda_1 t\} + \frac{\lambda_2 - a}{b} C_2 \exp\{\lambda_2 t\}.$$

Надалі нас буде цікавити динаміка ОВФ МП, тому зосередимо увагу на виразі (5.107). Постійні C_1 й C_2 визначимо з початкових умов:

$$A_0 = C_1 + C_2, \quad a \cdot A_0 + b \cdot K_0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2.$$

З огляду на прийняті вище значення A_0 й K_0, знаходимо:

$$C_1 = \frac{\lambda_2 - a - 100b}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{-\lambda_1 + a + 100b}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Тепер вираз (5.107) визначено повністю.

На рис. 5.34 показано результати розрахунку за формулою (5.107) залежності вартості ОВФ МП від параметра q. Дана залежність виявилася істотною, що цілком зрозуміло, оскільки параметр q визначає розподіл фонду розвитку між ВП і МП. Оскільки $(1-q)$ - це частка інвестицій, що спрямовуються на розвиток МП, то зрозуміло, що ця величина не може бути великою. Надалі вважаємо, що $1-q=0{,}1$, тобто вибираємо q рівним 0,9. При проведенні розрахунків, показаних на рис. 5.34 і нижче, обрані нові значення параметрів ξ й f_K: $\xi=0{,}15$, $f_K=0{,}05$. Це зроблено для того, щоб можна було розглядати не тільки початкові стадії розвитку МП, але й виконувати розрахунки в найбільш загальному випадку.

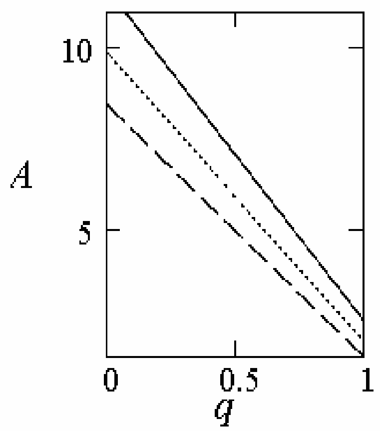


Рис. 5.34. *Залежність вартості ОВФ МП від* q*:*
суцільна лінія - $c=0{,}3$*;*
точкова лінія - $c=0{,}5$*;*
пунктирна лінія - $c=0{,}7$

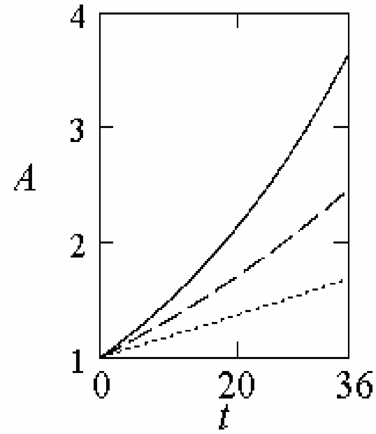


Рис. 5.35. *Залежність вартості ОВФ МП від* t*:*
суцільна лінія - $s=0{,}6$*;*
пунктирна лінія - $s=0{,}3$*;*
точкова лінія - $s=0$

На рис. 5.35 подано результати розрахунку за формулою (5.107) часової динаміки ОВФ МП для значення питомої собівартості $c=0{,}5$ й $q=0{,}9$. Вплив параметра реінвестування s на величину ОВФ є досить істотним. Однак з рис. 5.35 видно, що навіть при нульовому значенні параметра s ОВФ МП істотно зростають із часом. З рис. 5.35 видно істотну залежність темпів зростання ОВФ МП від параметра реінвестування s.

Питання для самоконтролю

1. Як здійснюється моделювання управління фінансами підприємств?
2. За якими принципом складається рівняння динаміки основних виробничих фондів?

3. Що таке горизонт планування?

4. Яким рівнянням визначається динаміка резервного фонду підприємств малого бізнесу?

5. Що таке двофакторна модель розвитку малого підприємства?

6. Для яких задач використовується модель малого підприємства з виробничою функцією типу Кобба-Дугласа?

7. Як здійснюється моделювання оптимізації оплати праці на підприємстві?

8. Як здійснюється побудова моделі динаміки розвитку двопродуктового малого підприємства?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Виконати розрахунок мінімального значення фондовіддачі ОВФ, за якого спостерігається додатна динаміка виробництва для однофакторної виробничої функції.

Вихідні дані:

1. собівартість продукції c становить – $c = 0{,}35$;
2. значення ставки оподатковування на прибуток - $\tau = 0{,}25$.
3. параметр реінвестування – $\xi = 0{,}25$.

Задача 2

Досліджується робота двопродуктового підприємства. Собівартість випуску продукції c_0, що зумовлена виробничим фондом A_0, для малого підприємства є $c_0 = 0{,}48$; аналогічно для фондів A_1 і A_2, відповідно - $c_1 = 0{,}55$; $c_2 = 0{,}35$; показник фондовіддачі для фонду A_0 (за один місяць) вибраних $f_0 = 0{,}14$; показники фондовіддачі для фондів A_1 і A_2 задані в одиницях f_0 - $f_1 = 1{,}4 f_0$; $f_2 = 1{,}2 f_0$.

Виконати розрахунки:

1. Динаміки фонду $A_1(t)$;
2. Фонду нагромадження F при $T \in [0; 60]$;
3. Залежності фонду нагромадження F від ξ_1.

ЧАСТИНА 3. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ Й МОДЕЛІ ПРИЙНЯТТЯ ГОСПОДАРСЬКИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

РОЗДІЛ 6. **ВРАХУВАННЯ ФАКТОРІВ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ЕКОНОМІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА**

6.1. Види невизначеності

Існує велика кількість економічних завдань, у яких неможливо однозначно визначити основні параметри й змінні моделі досліджуваного процесу або явища. У цьому випадку говорять, що прийняття господарських рішень здійснюється в умовах невизначеності.

Розрізняють два види невизначеності. Перший – це ***стохастична невизначеність***, або ***невизначеність першого порядку***, тобто ситуація, у якій передбачається, що для невизначених параметрів може бути встановлений імовірнісний розподіл. У цьому випадку часто вдаються до вивчення функції щільності ймовірностей, визначають середнє значення випадкової величини, її дисперсію й т.ін., що в остаточному підсумку дозволяє зробити висновок про припустимий варіант господарського розв'язку за деяким заздалегідь визначеним, як правило, граничним критерієм. Застосування імовірнісних методів моделювання економічних процесів виправдовує себе тільки в тих випадках, коли є можливість нагромадити й обробити велику кількість статистичної інформації, що забезпечує репрезентативність аналізованих вибірок.

Другий вид невизначеності – це невизначеність, при якій невідомо імовірнісний розподіл величини, що цікавить, але визначена область її зміни. Невизначеність такого виду називають ***невизначеністю другого порядку***. Виникає невизначеність другого порядку з двох причин: у зв'язку з дією людей, що переслідують інші цілі в деякій економічній ситуації, або у зв'язку з поведінкою деяких непередбачених природних факторів.

Для прийняття рішень у зазначених обставинах пропонуються деякі логічні критерії прийняття господарських рішень.

Одним із таких підходів є ***принцип гарантованого результату***. Його зміст полягає в тому, що вибирається такий x-параметр (план або управління), при якому деякий показник $W(x, y)$, що нас цікавить, досягає найкращого (найбільшого) значення за умови, що y, невизначений параметр, набуває найгіршого значення. Математично принцип гарантованого результату визначається за наступним алгоритмом.

1. Для кожного управління x знаходиться найгірше значення показника $W(x, y)$:

$$W_m(x) = \min_{y \in Y} W(x, y),\ x \in X .$$

2. Після цього вибирається таке управління $x \in X$, при якому досягається найбільше значення $W_m(x)$:

$$W^* = \max_{x\in X} W_m(x) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} W(x,y).$$

Величина W^* – це таке значення показника $W(x,y)$, яке ми можемо гарантувати при найгіршій для нас поведінці (значенні) невизначеного параметра y. Цей критерій вибору називається ***критерієм Вальда.***

Протилежний принципу гарантованого результату підхід заснований на оптимістичному припущенні, що невідомий параметр y буде набувати найкращих для нас значеннь. У цьому випадку вибір управляючого розв'язку ґрунтується на визначенні W^* за формулою:

$$W^* = \max_{x\in X}\max_{y\in Y} W(x,y).$$

Однак цей критерій занадто оптимістичний, тому частіше застосовується ***критерій Гурвіца***, що полягає у виборі такого управління x, при якому досягається

$$W^* = \max_{x\in X}(\alpha \min_{y\in Y} W(x,y) + (1-\alpha)\max_{y\in Y} W(x,y)),$$

де α приймає значення від 0 до 1. При $\alpha = 1$ маємо песимістичний підхід до ухвалення рішення на основі принципу гарантованого результату, при $\alpha = 0$ – оптимістичний підхід. Об'єктивних підґрунть для вибору коефіцієнта не існує.

Цікавим є підхід, запропонований Л. Севіджем. Він полягає в наступному. Для кожного значення $y \in Y$ знаходиться функція:

$$B(y) = \max_{x\in X} W(x,y),$$

яка показує, яке найкраще значення показника $W(x,y)$ можна одержати при кожному значенні $y \in Y$. Це значення показника можна було б одержати, якби було відоме значення параметра y заздалегідь.

Будується новий показник:

$$V(x,y) = B(y) - W(x,y) = \max_{x\in X} W(x,y) - W(x,y).$$

Показник називається функцією ризику (функцією втрат або функцією жалів). Він показує втрати (відхилення від найкращого значення $B(y)$) для кожного управління $x \in X$ при всіх значеннях параметра $y \in Y$. ***Критерій Севіджа*** полягає у виборі рішення на основі функції ризику $V(x,y)$ з використанням принципу гарантованого результату, тобто шукається такий розв'язок, при якому досягається:

$$W^* = \min_{x\in X}\max_{y\in Y}(\max_{x\in X} W(x,y) - W(x,y)).$$

Використання цього підходу дозволяє зменшити ризик при ухваленні рішення.

Проте необхідно пам'ятати, що всі наведені критерії мають високий ступінь довільності.

6.2. Теорія прийняття економічних рішень

Методи прийняття рішень в умовах відсутності достовірної інформації про можливі наслідки вивчаються ***теорією ризику***. Ця теорія має широку сферу застосувань в економіці. Одне з найбільш важливих – вибір інвестиційних проектів.

Мета цього підрозділу – навчитися визначати й використовувати для економічного аналізу наступні поняття:

- альтернатива;
- стан середовища;
- таблиця розв'язків;
- дерево розв'язків;
- критерій байдужності;
- критерій оптимізму;
- критерій песимізму;
- очікувана вартісна оцінка альтернативи;
- очікувана цінність достовірної інформації.

Основне завдання підрозділу: навчитися ухвалювати рішення в умовах визначеності, невизначеності й в умовах ризику.

Моделі

Теорія прийняття рішень – це аналітичний підхід до вибору найкращої альтернативи або послідовності дій. У теорії прийняття рішень існують три основні рівні класифікації. Вони залежать від ступеня визначеності можливих наслідків, з якими зустрічається особа, що ухвалює рішення (ОУР).

Відповідно існують три типи моделей:

1. *Прийняття рішень в умовах визначеності* – ОУР точно знає наслідки й результати будь-якої альтернативи або вибору рішення. Наприклад, ОУР із повною визначеністю знає, що внесок 100 тис. грн. на поточний рахунок приведе до збільшення балансу цього рахунку на 100 тис. грн.

2. *Прийняття рішень в умовах ризику* – ОУР знає ймовірності настання результатів або наслідків для кожного рішення. Ми можемо не знати того, що завтра буде дощ, але ми можемо знати, що ймовірність дощу 0,3.

3. *Прийняття рішень в умовах невизначеності* – ОУР не знає ймовірностей настання результатів для кожного рішення. Наприклад, ймовірність того, що весь тираж цієї книги буде реалізований за рік, авторам невідома.

Якщо має місце *повна* невизначеність відносно можливості реалізації станів середовища (тобто ми не можемо навіть приблизно вказати ймовірності настання кожного можливого результату), то обставини, з якими ми маємо справу при виборі рішення, можна представити як вид стратегічної гри, у якій один гравець – ОУР, а інший – якась об'єктивна дійсність, називана природою. Умови такої гри звичайно представляються наступною *таблицею рішень,* у якій рядки $A_1, A_2, ..., A_m$, відповідають стратегіям ОУР, а стовпці $N_1, N_2, ..., N_n$ – стратегіям природи (a_{ij} – виграш ОУР, відповідний до кожної пари A_i, N_j):

	N_1	N_2	$\cdots$	N_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

У розглянутій ситуації при виборі з множини $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ найкращого рішення критерії, які наведені в підрозділі 6.1, набувають наступного смислу:

1. *Максимаксный критерій,* або *критерій крайнього оптимізму* – визначає альтернативу, яка максимізує максимальний результат для кожної альтернативи, тобто ОУР вибирає стратегію *sq,* якій відповідає:

$$\max_i \max_j a_{ij}.$$

2. *Максиміний критерій Вальда,* або *критерій крайнього песимізму* – визначає альтернативу, яка максимізує мінімальний результат для кожної альтернативи, тобто ОУР вибирає стратегію i_0, якій відповідає:

$$\max_i \min_j a_{ij}.$$

3. *Критерій мінімаксного ризику Севиджа.* Згідно з цим критерієм вибирається стратегія, при якій величина ризику r_{ij} у найгірших умовах мінімальна, тобто рівна

$$\min_i \max_j r_{ij}.$$

Тут ризик $r_{ij} = (\max_i a_{ij}) - a_{ij}$.

4. *Критерій оптимізму-песимізму Гурвіца* – рекомендує при виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом, ні крайнім оптимізмом. Згідно з цим критерієм стратегія вибирається з умови:

$$\max_i \left\{ k \min_j a_{ij} + (1-k) \max_j a_{ij} \right\}.$$

Значення коефіцієнта песимізму k вибирається між нулем і одиницею. При $k = 1$ критерій Гурвіца перетворюється в критерій Вальда, *при* $k = 0$ – у критерій крайнього оптимізму.

5. *Критерій байдужності.* В умовах повної невизначеності передбачається, що всі можливі стани середовища (природи) рівноймовірні. Цей критерій виявляє альтернативу з максимальним середнім результатом, тобто:

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij}}{n}.$$

Якщо відома таблиця рішень з оцінками умов і ймовірностями реалізації для всіх станів середовища, можна визначити очікувану вартісну оцінку *EMV* для кожної альтернативи. Один із найпоширеніших критеріїв вибору альтернативи – *максимальна EMV.*

Для кожної альтернативи ***очікувана вартісна оцінка EMV*** є сума всіляких оцінок умов (виграшів) для цієї альтернативи, помножених на ймовірності реалізації цих виграшів:

$$EMV(A_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j,$$

де aij – виграш ОУР при виборі альтернативи i і реалізації стану середовища j, $j = 1,..., n$;

p_j – імовірність настання стану середовища j.

Очікуваною цінністю достовірної інформації EVPI назвемо різницю між виграшем в умовах визначеності й виграшем в умовах ризику.

Для того, щоб визначити *EVPI,* спочатку необхідно розрахувати математичне очікування в умовах визначеності, яке рівне очікуваному (або середньому) доходу у випадку, коли ми маємо достовірну інформацію перед тим, як ухвалити рішення.

Очікуваний виграш в умовах достовірної інформації визначається як:

$$\sum_{j=1}^{n} (\max a_{ij}) p_j.$$

Тоді:

$$EVPI = \sum_{j=1}^{n} (\max_i a_{ij}) p_j - \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j.$$

Таблицю рішень зручно використовувати при аналізі завдань, що мають одну множину альтернативних рішень і одну множину станів середовища. Багато завдань, однак, містять послідовності рішень і станів середовища. Якщо мають місце два (або більше) послідовних рішення й наступне рішення ґрунтується на результаті попереднього, більш кращим є підхід, заснований на побудові дерева рішень.

Дерево рішень – це графічне зображення процесу рішень, у якому відбиті альтернативні рішення, стани середовища, а також відповідні ймовірності й виграші для будь-яких комбінацій альтернатив і станів середовища.

Аналіз завдань за допомогою дерева рішень включає п'ять етапів:

1) формулювання завдання;

2) побудова дерева рішень;

3) оцінка ймовірностей станів середовища;

4) установлення виграшів для кожної можливої комбінації альтернатив і станів середовища;

5) розв'язок завдання шляхом розрахунків очікуваної вартісної оцінки *EMV* для кожної вершини стану середовища.

Приклади

Приклад 1. ***Вибір альтернативи***.

Компанія «Корівка» вивчає можливість проведення й збуту навісів для зберігання кормів. Проект може ґрунтуватися на великий або малій виробничій базі. Ринок для реалізації навісів може бути сприятливим або несприятливим.

Василь Бичков – менеджер компанії – ураховує також можливість взагалі не виробляти ці навіси. При сприятливій ринковій ситуації велике виробництво дозволило б Бичкову дістати чистий прибуток 200 тис. грн. Якщо ринок виявиться несприятливим, то при великому виробництві компанія зазнає збитків у розмірі 180 тис. грн. Мале виробництво дає 100 тис. грн. прибутку при сприятливій ринковій ситуації й 20 тис. грн. збитків при несприятливій.

Питання: Яку альтернативу слід вибрати?

Розв'язок. Застосуємо перераховані вище критерії. Складемо таблицю рішень (k = 0,75):

Стан середовища / Альтернатива		Сприят-ливий ринок	Не-сприят-ливий ринок	Maxi-max	Maxi-min	Кри-терій Севід-жа	Кри-терій Гур-віца	Кри-терій байду-жості
A_1	Створити велике вироб-ництво	200	-180	200	-180	180	-85	10
A_2	Створити мале вироб-ництво	100	-20	100	-20	100	10	40
A_3	Нічого не робити	0	0	0	0	200	50	0

Відповідь: За критерієм maximax слід вибрати альтернативу A_1; за критерієм maximin і критерієм Гурвіца (при $k = 0{,}75$) - A_3; за критерієм мінімуму максимального ризику (критерієм Севіджа) і критерієм байдужності - A_2.

Приклад 2. ***Вибір альтернативи при рівноймовірних станах середовища***.

Розглянемо умови прикладу 1 і припустимо, що обидва стани є *рівноймовірними*.

Питання: Яку альтернативу слід вибрати за критерієм максимізації *EMV*?

Розв'язок. Одержуємо наступні оцінки.

$$EMV(A_1) = 200 \cdot 0{,}5 + (-180) \cdot 0{,}5 = 10 \quad \text{тыс.грн.};$$

$$EMV(A_2) = 100 \cdot 0{,}5 + (-20) \cdot 0{,}5 = 40 \quad \text{тыс.грн.};$$

$$EMV(A_3) = 0 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Розв'язок у цьому випадку збігається з розв'язком, отриманим у прикладі 1 за критерієм байдужності.

Відповідь: Слід вибрати альтернативу A_2.

Приклад 3. ***Ухвалення рішення про використання додаткової інформації***.

Припустимо, що менеджер компанії «Корівка» (див. приклад 1) зв'язався з фірмою, що займається дослідженням ринку, яка запропонувала йому допомогу в ухваленні рішення про те, чи слід створювати виробництво навісів для зберігання кормів. Дослідники ринку стверджують, що їх аналіз дозволяє визначити, чи буде ринок сприятливим для даного продукту. Інакше кажучи, умови для компанії «Корівка» змінюються залежно від того, приймаються рішення в умовах ризику чи в умовах визначеності. Ця інформація може застерегти Бичкова від дуже серйозної помилки. Фірма, що займається дослідженням ринку, хотіла б одержати за цю інформацію 65 тис. грн.

Питання: Чи варто скористатися послугами зазначеної фірми? Навіть якщо результати дослідження є повністю точними, чи виправдана плата 65 тис. грн.?

Розв'язок. 1. Кращий результат для стану середовища «сприятливий ринок» – «створити велике виробництво» з виграшем 200 тис. грн., а для стану середовища «несприятливий ринок» – «нічого не робити» з виграшем 0. Очікувана вартісна оцінка в умовах визначеності рівна 200 • 0,5 + 0 • 0,5 = 100 тис. грн.

Отже, якби ми мали достовірну інформацію, ми очікували б одержати в середньому 100 тис. грн.

2. Максимум *EMV* рівний 40 тис. грн. Це розмір очікуваного доходу без достовірної інформації.

3. *EVPI*= Очікувана вартісна оцінка в умовах визначеності – Максимум *EMV* = 100 – 40 = 60 тис. грн.

Отже, Бичкову варто було б платити за достовірну інформацію не більш 60 тис. грн. Звичайно, такий висновок ґрунтується на припущенні, що ймовірність реалізації кожного стану середовища дорівнює 0,5.

Відповідь: Купувати достовірну інформацію (в умовах прикладу) не слід.

Приклад 4. Лукера Скальпель – адміністратор лікарні в Почаїві. Вона вирішує, чи слід зробити до лікарні велику прибудову, маленьку прибудову або не робити прибудови взагалі. Якщо населення Почаїва буде продовжувати зростати, то велика прибудова могла б приносити щорічно прибуток у 150 тис. грн. Якщо буде зроблена маленька прибудова, то вона може приносити лікарні 60 тис. грн. прибутку щорічно за умови, що населення буде збільшуватися. Якщо населення Почаїва не буде збільшуватися, то спорудження великої прибудови принесе лікарні збиток в 85 тис. грн., а маленької – в 45 тис. грн. На жаль, у Лукери немає інформації про те, як буде змінюватися чисельність населення Почаїва.

Завдання: побудуйте таблицю рішень. Визначте найкращу альтернативу, використовуючи критерій байдужнсті.

Питання:

1. Чому дорівнює значення *EMV* для найкращої альтернативи?

2. Отримана додаткова інформація: ймовірність зростання населення дорівнює 0,6, ймовірність того, що його чисельність залишиться незмінною, – 0,4. Визначите найкращий розв'язок, використовуючи критерій максимізації очікуваної вартісної оцінки. Чому дорівнює значення *EMV* для найкращої альтернативи при наявності додаткової інформації?

3. Яка очікувана цінність додаткової інформації?

Розв'язок. Застосуємо критерії maximax, maximin і критерій байдужності:

Стан середовища / Альтер-натива	**Сприят-ливий ринок**	**Не-сприят-ливий ринок**	**Maxi-max**	**Maxi-min**	**Кри-терій байду-жості**
Будувати велику прибудову	150	-85	150	-85	32,5
Будувати маленьку прибудову	60	-45	60	-45	7,5
Нічого не робити	0	0	0	0	0

Максимум *EMV* без достовірної інформації дорівнює 32,5 тис. грн.

Очікуваний дохід в умовах визначеності дорівнює 56 тис. грн.

Очікувана цінність достовірної інформації $EVPI$ = 56 – 32,5 = 23,5 тис. грн.

Відповіді:
1. 32,5 тис. грн.
2. 56 тис. грн.
3. 23,5 тис. грн.

6.3. Моделі систем масового обслуговування

Характерним прикладом стохастичних завдань є моделі систем масового обслуговування.

Системи масового обслуговування мають широке розповсюдження. Це телефонні мережі, залізничні й авіаційні каси, автозаправні станції й т.ін. Основною ознакою систем масового обслуговування є наявність деякої обслуговуючої системи, яка призначена для здійснення дій згідно з вимогами вступників у систему заявок. Заявки надходять у систему випадковим чином. Оскільки обслуговуюча система, як правило, має обмежену пропускну здатність, а заявки надходять нерегулярно, то періодично створюється черга заявок, які чекають на обслуговування, а іноді обслуговуюча система простоює чекаючи заявок. І те, і інше в економічних системах тягне непродуктивні витрати (втрати), тому при проектуванні систем масового обслуговування виникає завдання знаходження раціональної пропускної здатності системи, при якій досягається прийнятний компроміс між витратами від простою заявок у чергах й простою системи від недовантаження. Вперше завдання такого типу були вирішені в роботах А. К. Ерланга на початку минулого століття й лягли в основу «Теорії масового обслуговування», яка успішно розвивається наразі.

Таким чином, система масового обслуговування складається з ***блоку обслуговування***, ***потоку заявок*** і ***черги заявок,*** які чекають на обслуговування.

Блоки обслуговування в різних системах різняться між собою за багатьма показниками. По-перше, блок обслуговування може складатися з одного або декількох «приладів». Під приладом розуміється устрій або людина, що обслуговує заявки. Наприклад, у магазині може бути одна або кілька кас. У першому випадку система називається ***одноканальною***, у другому – ***багатоканальною***. По-друге, системи масового обслуговування можуть бути ***однофазними*** й ***багатофазними.*** У першому випадку заявка обслуговується тільки одним приладом, у другому – послідовністю приладів. Наприклад, каса в магазині – однофазна система, ощадкаса – двофазна, оскільки спочатку клієнт обслуговується контролером, а тільки потім одержує гроші у касира.

Друга складова систем масового обслуговування – вхідний потік заявок. Звичайно припускають, що вхідний потік підпорядковується деякому імовірнісному закону для тривалості інтервалів між двома послідовно вступними заявками, причому закон розподілу вважається сталим протягом деякого досить тривалого часу. Джерело заявок необмежене.

Третя складова – дисципліна черги. Ця характеристика описує порядок обслуговування заявок, що надходять на вхід системи. Найчастіше застосовується дисципліна: «першим прийшов – першим обслужений». Але можливі й інші порядки обслуговування: «першим прийшов – останнім обслугований», випадковий порядок обслуговування, обслуговування з пріоритетами.

Як приклад застосування системи масового обслуговування розглянемо завдання проектування автозаправної станції (АЗС).

Нехай необхідно вибрати один з декількох варіантів будівництва АЗС. Автомобілі прибувають на станцію випадковим чином і, якщо не можуть бути обслужені відразу, стають у чергу. Дисципліна черги – «першим прийшов – першим обслужений». Припустимо для простоти, що у всіх варіантах розглядається тільки одна бензоколонка, а варіант від варіанта відрізняється лише її потужністю.

Припустимо, статистичні спостереження дозволили одержати величину середньої кількості клієнтів μ, що обслуговуються в одиницю часу. Зворотна величина $\frac{1}{\mu}$ визначає середній час обслуговування одного клієнта.

Далі робиться стандартне припущення, що ймовірність того, що обслуговування одного клієнта, що перебуває в процесі обслуговування в момент t, буде завершено в малому проміжку часу $[t, t+\tau]$, приблизно рівна $\mu\tau$, де $\mu > 0$. Імовірність того, що обслуговування не закінчиться, вважається приблизно рівною $1-\mu\tau$, а ймовірність того, що в цей проміжок буде закінчене обслуговування двох або більше клієнтів, – величина, якою можна знехтувати. Тоді щільність розподілу часу обслуговування має експонентний розподіл:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t},\ t \geq 0.$$

Далі, виходячи з того, що клієнти прибувають на АЗС випадково, передбачається, що ймовірність прибуття одного клієнта за будь-який малий проміжок часу $[t, t+\tau]$ з точністю до малих величин, якими можна знехтувати, пропорційна τ з деяким коефіцієнтом пропорційності $\lambda > 0$. Величина λ інтерпретується як середнє число клієнтів, що з'являються в АЗС за одиницю часу, а зворотна їй величина $\frac{1}{\lambda}$ – як середній час появи одного клієнта. Імовірність того, що за цей проміжок часу не прибуде жодного клієнта, вважається приблизно рівною $1-\lambda\tau$, а ймовірність прибуття двох або більше клієнтів – малою величиною порівняно зі значенням $\lambda\tau$. З висунутих припущень у теорії ймовірностей робляться наступні висновки. По-перше, проміжки часу τ між двома послідовними появами клієнтів задовольняють експонентному розподілу:

$$\varphi(t)=\lambda\, e^{-\lambda t},\ t\ge 0.$$

По-друге, імовірність того, що за будь-який вже не малий період часу T прибуде n клієнтів, підраховується за формулою:

$$P(n)=\frac{(\lambda T)^n\, e^{-\lambda t}}{n!},\ n=0,\,1,\,2,\,...,$$

тобто вхідний потік заявок є пуассонівським.

Відзначимо, що, на відміну від середньої кількості автомобілів, що прибувають в одиницю часу на АЗС, тобто величини λ, величина μ залежить від вибраного нами варіанта будівництва АЗС. Тому має сенс розглядати ті проекти АЗС, для яких середній час обслуговування $1/\mu$ менше середнього проміжку часу $1/\lambda$ між прибуттям клієнтів тому, що у противному разі черга буде постійно зростати. У тому ж випадку, коли $1/\mu<1/\lambda$, через якийсь час після початку роботи система перейде в стаціонарний режим, тобто її показники не будуть залежати від часу.

Позначивши відношення λ/μ через ρ, можна показати, що стаціонарний режим установлюється при $\rho<1$. Величину ρ називають навантаженням системи. Тоді основні характеристики системи масового обслуговування визначаються за формулами:

- коефіцієнт простою системи:

$$\mathrm{E}_1=1-\rho,$$

- середнє число клієнтів у системі:

$$\mathrm{E}_2=\frac{\rho}{1-\rho},$$

- середня довжина черги:

$$\mathrm{E}_3=\frac{\rho^2}{1-\rho},$$

- середній час перебування клієнта в системі:

$$\mathrm{E}_4=\frac{1}{\mu-\lambda},$$

- час перебування клієнта в черзі:

$$\mathrm{E}_5=\frac{\rho}{\mu-\lambda}.$$

На основі аналізу значень наведеної системи показників, що характеризують систему масового обслуговування, робиться висновок про доцільність вибору варіанта будівництва АЗС.

Приклад. Нехай для загальних умов постановки завдання по проектуванню АЗС відомі наступні дані: середній інтервал між прибуттями автомобілів становить 4 хвилини. Варіанти будівництва АЗС мають наступні середні часи обслуговування автомобілів: 5 хв, 3,5 хв, 2 хв, 1 хв, 0,5 хв. Результати розрахунків по дослідженню різних варіантів будівництва АЗС зведені в таблицю:

Характе-ристики СМО	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$1/\lambda$	4 хв	4 хв	4 хв	4 хв	4 хв
Λ	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
$1/\mu$	5 хв	3,5 хв	2 хв	1 хв	0,5 хв
μ	0,2	0,286	0,5	1	2
Р	1,25	0,875	0,5	0,25	0,125
E_1	-0,25	0,125	0,5	0,75	0,875
E_2	-5	7	1	0,333	0,143
E_3	-6,25	6,125	0,5	0,083	0,018
E_4	-20	27,477	4	1,333	0,571
E_5	-25	24,305	2	0,333	0,071

Перший варіант будівництва АЗС не придатний через те, що черга в цьому випадку буде зростати нескінченно.

Другий варіант гарний за показником завантаженості обладнання $\rho = 0{,}875$ й, отже, малої середньої частки простою обладнання $E_1 = 0{,}125$, але при цьому варіанті виникають великі черги й, отже, великі середні часи простою автомобілів $E_4 = 27{,}48$ хв.

Третій варіант приводить до того, що обладнання в середньому половину часу простоює, але середнє число автомобілів у системі рівне тільки 1, а середні втрати часу рівні 4 хв при середньому часі обслуговування 2 хв.

В інших варіантах черги практично ні, але більшу частину часу обладнання простоює, тому ці варіанти доцільно відкинути як неефективні.

Остаточний вибір варіанта проекту АЗС, мабуть, належить особі, яка ухвалює рішення (ОУР), але попередня рекомендація з результатів аналізу може полягати в пропозиції третього варіанта, якщо виходити з того, що спостерігається постійна тенденція зростання автомобільного парку в країні.

6.4. Методи теорії ігор

Як уже говорилося вище, у багатьох ситуаціях прийняття господарських рішень доводиться здійснювати в умовах невизначеності другого порядку. Подібні ситуації називають ігровими. Їхня суть полягає в тому, що ухвалення рішення доводиться здійснювати в умовах, коли в цьому процесі бере участь кілька сторін, причому часто з протилежними інтересами, наприклад, як у класичній ситуації взаємодії продавця й покупця. Іншими словами, це ситуації, у яких виникає конфлікт інтересів. Ці ситуації називають ігровими, а учасників – гравцями. Якщо інтереси гравців строго антагоністичні, то гру називають ***антагоністичною***, якщо в процесі гри учасники можуть яким-небудь чином поєднуватися, що обіцяє їм більш високі виграші, то ігру називають ***кооперативною***. Конфлікт може виникати не тільки в результаті свідомих дій різних учасників, але й у результаті дії тих або інших «стихійних сил». В останньому випадку говорять про «***ігри із природою***». Для характеристики ігрової ситуації використовуються наступні поняття: «***гравці***» – множина зацікавлених сторін, яких також називають учасниками, сторонами, особами; «***стратегії***» – можливі дії кожної зі сторін; «***функції виграшу***» або «***платежі***» – числові характеристики, що виражають інтереси гравців.

Стратегії бувають «чистими» і «змішаними». ***Чиста стратегія*** – це стратегія, орієнтована на певну поведінку гравця-супротивника. ***Змішана стратегія*** – це стратегія, орієнтована на кілька можливих стратегій поведінки гравця-супротивника.

Класифікують ігри за різними ознаками: за числом гравців, за кількістю стратегій, за властивостями функції виграшу, за можливостями попередніх переговорів і взаємодією між гравцями в ході гри.

За числом гравців розрізняють ігри з ***двома, трьома*** й більшою кількістю гравців.

За кількістю стратегій розрізняють ***скінченні*** й ***нескінченні ігри***. У скінченних іграх гравці мають у своєму розпорядженні скінченне число стратегій, у нескінченних – нескінченне.

За властивостями функцій виграшу розрізняють ігри з нульовою сумою (антагоністичні), тобто ігри, у яких є прямий конфлікт і виграш одного учасника дорівнює програшу другого, і ігри з постійною різницею, тобто такі, у яких гравці програють і виграють одночасно.

Залежно від можливості попередніх переговорів між гравцями розрізняють ***кооперативні*** й ***некооперативні*** ігри.

Для формулювання завдання в ігровій постановці необхідно реалізувати наступні етапи.

1-й етап. Визначення учасників гри (гравців).

На цьому етапі аналізується умова завдання й робиться спроба визначити учасників гри, а також визначити суть конфлікту, який виникає між ними.

2-й етап. Визначення стратегій гравців.

Визначення стратегій гравців – процес багато в чому неформальний. Щоб визначити стратегії, необхідно сформулювати кінцеві цілі гравців і знайти шляхи досягнення цих цілей. У матричних іграх з нульовою сумою цілі гравців прямо протилежні.

3-й етап. Визначення виграшів гравців при використанні кожної стратегії.

Виграші (платежі) обов'язково повинні мати кількісне вираження. Виграші є показниками ступеня досягнення цілей відповідного гравця. Виграші визначаються для комбінацій різних стратегій гравців.

4-й етап. Представлення матриці виграшів (платежів) у нормальній формі.

Представлення здійснюється шляхом внесення знайдених значень виграшів (платежів) у матрицю.

Основним принципом розв'язку матричних антагоністичних ігор є припущення про те, що кожен гравець прагне забезпечити собі максимально можливий виграш при будь-яких діях партнера. У цих умовах оптимальною стратегією гравця № 1 незалежно від стратегії супротивника буде стратегія, яка максимізує мінімальний виграш, тобто максимінна стратегія, а для гравця № 2 тоді оптимальною є мінімаксна стратегія.

Фундаментальним результатом теорії ігор є ***Теорема про мінімакс***, яка стверджує, що сформульовані завдання для гравців № 1 і 2 завжди мають розв'язок для будь-якої матриці виграшів і розв'язки збігаються.

Розв'язок антагоністичної гри в чистих стратегіях

Позначимо через α_i найменший виграш гравця A при виборі ним стратегії A_i, для будь-якої стратегії гравця B (найменше число в i-тому рядку матриці A), тобто $\alpha_i = \min\limits_{j=1,n} a_{ij}$.

Число

$$\alpha = \max_{i=1,m} a_i = \max_{i=1,m} \min_{j=1,n} a_{ij}$$

називається ***нижньою ціною гри***, або ***максимінним виграшем*** (***максиміном***).

Це гарантований виграш гравця A.

Стратегія, що відповідає максиміну, називається ***максимінною***.

Гравець B зацікавлений у тому, щоб зменшити виграш гравця A. Вибираючи стратегію B_j, він ураховує максимально можливий при цьому виграш для A. Позначимо: $\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$.

Число

$$\beta = \min_{j=\overline{1,n}} \beta_j = \min_{j=\overline{1,n}} \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}$$

називається ***верхньою ціною гри***, або ***мінімаксним виграшем*** (***мінімаксом***).

Це гарантований програш гравця B.

Якщо нижня й верхня ціни збігаються, то загальне значення верхньої й нижньої ціни гри $(\alpha = \beta = \nu)$ називається ***чистою ціною***, або ***ціною гри***.

Стратегії, відповідні до ціни гри, є оптимальними, а їх сукупність – оптимальним розв'язком, або ***розв'язком гри***.

Чисті стратегії A_i і B_i дають оптимальний розв'язок гри тоді й тільки тоді, коли відповідний їй елемент a_{ij} є одночасно найбільшим у своєму стовпці й найменшим у своєму рядку. Така точка в матриці називається ***сідловою точкою***.

Приклад. Визначити нижню й верхню ціну гри, заданою платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти чисті стратегії гравців, якщо є сідлова точка.

Розв'язок. Усі розрахунки зручно проводити в таблиці, у якій, крім матриці A, введено стовпець α_i і рядок β_i:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	4	2	-3	3	-3
A_2	-1	1	2	4	-1
A_3	4	5	2	5	2
β_j	4	5	2	5	$\alpha = \beta = 2$

Аналізуючи рядки матриці (стратегії гравця A), заповнюємо стовпець α_i: $\alpha_1 = -3$; $\alpha_2 = -1$ $\alpha_3 = 2$ – мінімальні числа в рядках *1, 2, 3*. Аналогічно заповнюємо рядок $\beta_j: \beta_1 = 4, \beta_2 = 5, \beta_3 = 2$, $\beta_4 = 5$ – максимальні числа у стовпцях *1, 2, 3, 4* відповідно.

Нижня ціна гри:

$$\alpha = \max_{i=1,2,3} \alpha_i = \max_{i=1,2,3} (-3;-1;2) = 2.$$

Верхня ціна гри

$$\beta = \min_{j=1,2,3,4} \beta_j = \min_{j=1,2,3,4} (4;5;2;5) = 2.$$

Ці значення рівні, виходить, чиста ціна гри рівна: $\nu = \alpha = \beta = 2$. Отже, гра має сідлову точку (A_2, B_2).

Чисті стратегії гравців:

$$S_A^* = (0;0;1);$$
$$S_B^* = (0;0;1;0).$$

Розв'язок антагоністичної гри в змішаних стратегіях

Якщо в матриці немає сідлової точки, то шукаємо розв'язок у змішаних стратегіях:

$$S_A^* = (p_1; p_2, ..., p_m), \text{ де } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Це означає, що гравець A вибирає стратегії $A_1, A_2, ..., A_m$ з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Аналогічно й для B:

$$S_B^* = (q_1; q_2, ..., q_n), \text{ де } \sum_{j=1}^{n} q_i = 1.$$

У матричній грі є ще два важливі поняття.

Рядок платіжної матриці називається ***домінуючим*** рядком, якщо всі її елементи не перевершують відповідних елементів якого-небудь іншого рядка.

Стовпець називається ***домінуючим***, якщо всі його елементи не менші від відповідних елементів якого-небудь іншого стовпця.

Алгоритм розв'язку гри.

1. Перевірити, чи має платіжна матриця сідлову точку. Якщо так, то розв'язок – у чистих стратегіях, якщо немає – продовжити аналіз матриці.
2. Вилучити, якщо вони є, домінуємі рядки й домінуючі стовпці. На їхньому місці в оптимальних стратегіях гравців відповідні компоненти будуть дорівнювати нулю.
3. Розв'язати матричну гру одним з відомих методів.
4. При розв'язку методами ЛП, якщо в платіжній матриці є від'ємні числа, додаємо до всіх компонентів те саме додатне число, так щоб усі елементи нової матриці стали невід'ємними, а потім від

знайденої ціни гри віднімаємо це ж число.

Приклад. Підприємство може випускати чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4, одержуючи при цьому прибуток, що залежить від попиту, який може знаходитися в одному із чотирьох станів B_1, B_2, B_3, B_4. Дана платіжна матриця

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – прибуток від i-ої продукції при j-му стані попиту.

Визначити оптимальні пропорції, що гарантують середню величину прибутки при будь-якому стані попиту, вважаючи його невизначеним.

Розв'язок. 1) Визначимо верхню й нижню ціну гри:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	3	3	6	8	3
A_2	9	10	4	2	2
A_3	7	7	5	4	4
A_4	7	7	4	1	1
β_j	9	10	6	8	

$$\alpha=\max_{i=1,2,3,4}\alpha_i=\max_{i=1,2,3,4}(3;2;4;1)=4;$$

$$\beta=\min_{j=1,2,3,4}\beta_j=\min_{j=1,2,3,4}(9;10;6;8)=6.$$

Тому що $\alpha\neq\beta$, то сідлової точки нема, розв'язок будемо шукати в змішаних стратегіях.

2) Спростимо платіжну матрицю. Для цього вилучимо домінуючий рядок і домінуючий стовпець:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{Домінуючий рядок} \end{array}$$

$\uparrow$

домінуючий стовпець

Отримаємо нову матрицю:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 6 & 8\\ 9 & 4 & 2\\ 7 & 5 & 4\end{pmatrix}.$$

3) Складемо завдання:

$$S_A^*=(p_1,p_2,p_3) \text{ й } S_B^*=(q_1,q_2,q_3)$$

Якщо гравець A застосовує змішану стратегію S_A^* проти будь-якої чистої стратегії B_j гравця B, то він одержує середній виграш, або математичне очікування виграшу $a_j=a_{1j}p_1+a_{2j}p_2+...+a_{mj}p_m$, $j=\overline{1,n}$, (тобто елементи j-го стовпця платіжної матриці множаться на відповідні ймовірності стратегій A_1, A_2, ..., A_m і результати складаються.

Для оптимальної стратегії S_A^* всі середні виграші не менші від ціни гри v, тому одержуємо систему нерівностей:

$$\begin{cases}3p_1+9p_2+7p_3\ge v,\\ 6p_1+4p_2+5p_3\ge v,\\ 8p_1+2p_2+4p_3\ge v.\end{cases}$$

Розділимо всі нерівності на v ($v>0$) й введемо нові змінні:

$$x_i=\frac{P_i}{v}\ge 0.$$

Одержимо:

$$\begin{cases}3x_1+9x_2+7x_3\ge 1,\\ 6x_1+4x_2+5x_3\ge 1,\\ 8x_1+2x_2+4x_3\ge 1.\end{cases}$$

Мета гравця A – максимізувати свій гарантований виграш, тобто $v\to\max$.

Розділивши на $v\ne 0$ рівність $p_1+p_2+p_3=1$, одержимо, що змінні x_1, x_2, x_3 задовольняють умову $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{v}$.

І якщо $v\to\max$, то $\frac{1}{v}\to\min$, тобто $Z=x_1+x_2+x_3\to\min$.

У такий спосіб одержуємо задачу:

$Z=x_1+x_2+x_3\to\min$.

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \ge 1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \ge 1, \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1. \end{cases} \qquad x_i \ge 0.$$

Тому що цілі гравця B протилежні, то його завдання – двоїсте цьому, тобто $F = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \le 1. \end{cases} \qquad y_i \le 0.$$

Таким чином, ми отримали задачу ЛП:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1, \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1, \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1, \\ F - y_1 - y_2 - y_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю задачу симплексним методом. У такий спосіб маємо оптимальний розв'язок задачі:

$$X^* = \left(\frac{2}{27};0;\frac{1}{9};0;0;\frac{1}{27} \right); Y^* = \left(\frac{1}{27};\frac{4}{27};0;0;\frac{2}{27};0 \right),$$

причому $F_{\max} = Z_{\min} = \dfrac{5}{27} = \dfrac{1}{v}$.

Отже, $v = \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{27}{5} = 5{,}4.$

Оптимальні стратегії $S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ й $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$ знайдемо, використовуючи співвідношення:

$$x_i = \frac{p_i}{v} \Rightarrow p_i = x_i \cdot v,$$

$$y_i = \frac{q_i}{v} \Rightarrow q_i = y_i \cdot v.$$

Маємо:

$$p_1 = \frac{2}{27} \cdot \frac{27}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4;$$

$$p_2 = 0 \cdot \frac{27}{5} = 0; \qquad \sum p_i = 1.$$

$$p_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

$$q_1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{27}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2;$$

$$q_2 = \frac{4}{27} \cdot \frac{27}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8; \qquad \sum q_j = 1.$$

$$q_3 = 0 \cdot \frac{27}{5} = 0.$$

Таким чином, $S_A^* = (0{,}4; 0; 0{,}6; 0)$ і $S_B^* = (0{,}2; 0; 0{,}8; 0)$.

Зауваження. Тому що останній рядок матриці був викреслений як домінуючий, а також викреслений другий стовпець як домінуючий, то на їхньому місці в оптимальних стратегіях гравців стоять нулі.

Висновок

Підприємство повинне випускати продукцію в співвідношенні: 40% випуску – продукція A_1, 60% випуску – продукція A_3, а продукцію A_2 й A_4 не випускати зовсім. Тоді воно дістане гарантований прибуток у розмірі 5,4 у.д.е. У той час як оптимальний попит у 20% перебуває в стані B_1 й у 80% – у стані B_3.

Питання для самоконтролю

Питання 1. У теорії прийняття рішень ситуація, яку не може контролювати особа, що ухвалює рішення, називається:

1) деревом рішень;
2) станом середовища;
3) рішенням в умовах невизначеності;
4) альтернативою;
5) таблицею рішень.

Питання 2. Укажіть правильну відповідність назв критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності:

1) minmax («критерій оптимізму»);
2) maxmin («критерій песимізму»);
3) minmin («критерій песимізму»);
4) maxmin («критерій байдужності»);
5) maxmax («критерій байдужності»).

Питання 3. У завданні прийняття рішень розглядається одна множина станів середовища й одна множина рішень. Якщо ймовірність настання одного зі станів середовища дорівнює одиниці, то розв'язок ухвалюється в умовах:

1) часткової невизначеності;
2) невизначеності;
3) визначеності;
4) байдужності;
5) ризику.

Питання 4. Можна зробити одне з наступних придбань: квартира, земельна ділянка, річковий катер, авторемонтна майстерня або невелике кафе. У випадку, якщо обставини складуться сприятливо, прибуток становитиме відповідно 22, 12, 17, 25 або 30 тис. грн. У випадку несприятливого збігу обставин покупка квартири або земельної ділянки принесе прибуток відповідно 7 або 9 тис. грн., а покупка катера, авторемонтній майстерні або кафі – збитки відповідно 5, 11 або 13 тис. грн.

Сприятливий і несприятливий збіг обставин рівноймовірні. У цьому випадку достовірна інформація про стан середовища оцінюється величиною:

1) 15,5 тис. грн.;
2) 10 тис. грн.;
3) 8 тис. грн.;
4) 5 тис. грн.;
5) 2 тис. грн.

Питання 5. Модель прийняття розв'язків в умовах ризику відноситься до класу моделей:

1) імітаційних;
2) статистичних;
3) алгебраїчних;
4) управління запасами;
5) математичного програмування.

Питання 6. Нехай у якості критерію ухвалення рішення в умовах ризику використовується очікувана вартісна оцінка альтернативи *EMV.* Імовірність того, що фактичний виграш буде дорівнювати значенню *EMV:*

1) висока;
2) залежить від числа альтернатив;
3) мала;
4) залежить від числа станів середовища;
5) ніщо з вищевказаного не є вірним.

Питання 7.

1. Які основні складові систем масового обслуговування?
2. Які можуть бути устрої блоків обслуговування?
3. Які можуть бути порядки обслуговування черг?
4. Якими показниками характеризуються системи масового обслуговування?
5. Як визначаються основні показники, що характеризують СМО, для випадку експонентних розподілів імовірностей вступу заявок і ймовірностей часу їх обслуговування?
6. Що таке гра? Які її складові?
7. Дати класифікацію ігор.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Тамара Пончик збирається побудувати ресторан недалеко від університетського гуртожитку. Один із можливих варіантів – передбачити в ньому пивний бар. Інший варіант не пов'язаний із продажем пива. В обох випадках Тамара оцінює свої шанси на успіх як 0,6 і на невдачу як 0,4. Попередні обговорення показують, що план, пов'язаний з продажем пива, може принести 325 тис. грн. прибутку. Без продажу пива можна заробити 250 тис. грн. Втрати ресторану у випадку відкриття бару при ньому складуть 70 тис. грн., у випадку відкриття без бару – 20 тис. грн.

Виберіть альтернативу для Тамари Пончик на основі середньої вартісної оцінки як критерію.

Питання:

1. Чи варто реалізувати план, що передбачає продаж пива?
2. Чому рівне значення *EMV* для найкращої альтернативи?

Задача 2

«Фотоколор» – невеликий магазин, що торгує хімічними реактивами, які використовуються деякими фотостудіями при обробці плівки. Один із продуктів, який пропонує «Фотоколор», – фіксаж ВР-6. Адам Напівтонів, директор магазину, продає протягом місяця 11, 12 або 13 ящиків ВР-6. Від продажу кожного ящика фірма одержує 35 тис. грн. прибутку. Фіксаж ВР-6, як і багато фотореактивів, має малий термін придатності. Тому, якщо ящик не проданий до кінця місяця, Адам повинен його знищити. Тому що кожний ящик обходиться магазину в 56 тис. грн., він втрачає їх у випадку, якщо ящик не проданий до кінця місяця. Імовірність продати 11, 12 або 13 ящиків протягом місяця рівна відповідно 0,45; 0,35 і 0,2.

Питання:

1. Скільки ящиків закуповувати фірмі для продажу щомісяця?
2. Яка очікувана вартісна оцінка цього рішення?
3. Скільки ящиків варто було б закуповувати, якби Адам міг дістати фіксаж ВР-6 з добавкою, яка значно продовжує термін його придатності?

Задача 3

Компанія «Молодий сир» – невеликий виробник різних продуктів із сиру. Один із продуктів – сирна паста – продається в роздріб. Вадим Ароматів, менеджер компанії, повинен вирішити, скільки ящиків сирної пасти слід провадити протягом місяця. Імовірність того, що попит на сирну пасту протягом місяця буде 6, 7, 8 або 9 ящиків, рівна відповідно 0,1; 0,3; 0,5; 0,1. Витрати на виробництво одного ящика пасти становлять 45 тис. грн. Ароматів продає кожний ящик за ціною 95 тис. грн. Якщо сирна паста не продається протягом місяця, то вона псується й компанія не одержує доходу.

Питання:
1. Скільки ящиків слід провадити протягом місяця?
2. Яка очікувана вартісна оцінка цього рішення?

Теми семінарських занять

1. Теоретично обґрунтувати показники E_1, E_2, E_3, E_4, E_5.

2. Навести приклад і доказ показників E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 для багатоканальної багатофазної системи масового обслуговування.

3. Привести приклад і доказ показників E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 для одноканальної однофазної системи масового обслуговування.

РОЗДІЛ 7. ВПЛИВ ВИПАДКОВИХ ФАКТОРІВ І РИНКОВИХ ОБМЕЖЕНЬ НА ДИНАМІКУ ВИРОБНИЦТВА

Особливістю інноваційного розвитку господарських систем у сучасній економіці є підвищений рівень ризику й невизначеності, причому найменш дослідженою є проблема управління ризиками виробничого підприємства, що веде поточну господарську діяльність. У розділі викладається підхід до управління господарськими ризиками підприємства на наступній концептуальній основі. Будь-який вид економічної діяльності за своєю суттю спрямований у майбутнє й тому пов'язаний з об'єктивною наявністю невизначеності, що проявляється в недетермінованості наслідків прийняття рішень. Особливості функціонування малих підприємств зумовлюють значні кредитно-інвестиційні ризики в сфері малого бізнесу. Для того, щоб перебороти ці ризики й вижити в складних умовах невизначеності, малим підприємствам необхідні інвестиції. З іншого боку, наявність ризиків у малому бізнесі знижує інвестиційну привабливість малих підприємств. Ця обставина вимагає створення схем і механізмів, що забезпечують стабільність роботи малого підприємства в умовах кон'юнктури ринку, яка швидко змінюється.

Основний зміст цього пункту викладений в роботі [10].

7.1. Проблема невизначеності інвестиційних проектів

Практика господарювання малих підприємницьких структур в Україні свідчить, що поки що за результативністю вони не стали потужним сегментом вітчизняної економіки. В Україні частка малого бізнесу у ВВП становить 11%, а кількість малих підприємств у розрахунку на 10 тис. осіб - 53 одиниці, тоді як у країнах з розвинутою ринковою економікою ці показники складають відповідно 50-60% та 500-700 одиниць. Головною проблемою вітчизняних підприємницьких структур є недостатність фінансових ресурсів для підтримки і розвитку власного бізнесу. Дослідження фінансової діяльності малих підприємств свідчить, що у структурі джерел фінансового забезпечення питома вага власних фінансових ресурсів у середньому становить 35-40%. Тобто ані прибуток, ані амортизаційні відрахування як джерела фінансових ресурсів не є суттєвими і потребують значної мобілізації фінансових ресурсів за рахунок зовнішніх джерел. У той же час, у структурі зовнішніх джерел фінансування найбільшу питому вагу складає кредиторська заборгованість (49-54%), довгострокові та короткострокові кредити банків (5-7%). Така структура зовнішніх джерел формування фінансових ресурсів не є оптимальною, якщо брати до уваги, що в країнах з розвинутою ринковою економікою кредиторська заборгованість малих підприємств становить 15-20%, а кредити банків та інші позикові кошти - 45-55%.

Одним із шляхів полегшення функціонування суб'єктів малого підприємництва в Україні є підтримка їх діяльності через розвиток послуг мікрокредитування. Однією з форм підтримки малих підприємств, що широко застосовується в країнах з недостатнім рівнем розвитку малого бізнесу, є інвестиції у вигляді разових безпроцентних кредитів, або кредитів з фіксованою (низькою) процентною ставкою. При цьому важливо мати математичну модель динаміки розвитку малого підприємства, що дозволить зв'язати ефект від інвестицій з основними параметрами підприємства, а також урахувати можливі ризики малого підприємства. Особливість МП полягає в тому, що МП, як правило, вузькоспеціалізовані і є монопродуктовими; використовують одну технологію, не змінюючи її в процесі свого функціонування і т. ін. Ця обставина має бути врахована при аналізі інвестиційних проблем розвитку МП.

При оцінці ефективності інвестиційних проектів часто доводиться враховувати фактори невизначеності – відсутність повної й точної інформації про умови реалізації проекту і, як наслідок, про грошовий потік, що породжується реалізацією проекту. Виявляється важливим виділити два види невизначеності, що вимагають різних методів урахування. Перший вид – *внутрішня* невизначеність. Ця невизначеність індивідуальна, вона своя для кожного проекту. Уявімо собі два проекти в умовах внутрішньої невизначеності. Умови реалізації обох проектів нам у повному обсязі невідомі. Однак, якби ми раптом одержали повну й точну інформацію про умови реалізації й грошових потоків одного з проектів, це ніяк не допомогло б нам в оцінці другого. Із внутрішньою невизначеністю проектувальники стикаються щораз, коли мова йде про техніко-економічні показники складних об'єктів. Нехай, наприклад, проект передбачає будівництво промислового будинку, однак кошторис на будівництво ще не розроблений. У цій ситуації проектувальник *А*, маючи наявну інформацію (наприклад, про будівельний майданчик й про досвід будівництва аналогічних будинків), може вказати лише деякий інтервал можливих значень кошторисної вартості будівництва й у кращому випадку вказати для неї імовірнісний розподіл на цьому інтервалі.

Розглянемо тепер проектувальника *Б*, що розробляє інший проект, що передбачає будівництво іншого будинку. Тоді інформація про рішення, яке прийняв *А*, не могла б ніяк вплинути на рішення *Б*: невизначеність величини кошторисної вартості будівництва для кожного із проектів своя. Це дозволяє вважати будь-які проекти в умовах внутрішньої невизначеності незалежними: ніяка інформація про умови реалізації одного проекту не змінює інформацію про безліч можливих витрат і результатів іншого й про (імовірнісний або якийсь інший) розподіл витрат і результатів на цій безлічі.

Своєрідним антиподом до внутрішнього є *зовнішня* невизначеність. Грошові потоки й ефективність проекту визначаються тут невідомим «станом природи». Такий вид невизначеності досліджувався Севіджем, який визначав *природу* як «об'єкт, з яким пов'язані інтереси особи», а *стан природи* – як «опис природи, що не залишає неописаними ніяких значимих аспектів». Так, ефективність багатьох проектів залежить від перспективної динаміки обмінного курсу долара. Якщо проектувальник одержить яку-небудь інформацію про цю динаміку, це відразу ж вплине на оцінку ефективності всіх проектів, які він розробляє. Інакше кажучи, всі проекти в умовах зовнішньої невизначеності виявляються до певної міри залежними просто тому, що ефекти всіх проектів залежать від того самого фактора - стану природи (під зовнішньою природою ми розуміємо насамперед ринкові умови).

Для урахування зовнішньої невизначеності на практиці роблять так звані оцінки стабільності проекту. Практично це означає розгляд деякої скінченої кількості можливих сценаріїв реалізації проекту («типових сценаріїв» або «сценаріїв-представників»), для кожного з яких ефект оцінюється стандартним способом. Далі дії проектувальників можуть бути двоякими:

1) або проект відкидається, якщо він виявляється неефективним за якогось із розглянутих сценаріїв. Таке правило поведінки, орієнтоване на найгірший стан природи, можна назвати песимістичним;

2) або сценаріям приписуються певні (суб'єктивні) ймовірності й оцінка проекту провадиться за математичним очікуванням ефекту, розрахованим на основі цих імовірностей. Таке правило поведінки, обґрунтоване ще в роботах Томаса Байєса, прийнято називати байєсовським.

Необхідно враховувати ситуації, коли на ефект проекту спільно впливають фактори зовнішньої й різного роду внутрішньої невизначеності. Тут з'ясовується, що відповідні критерії є узагальненнями як критерію математичного очікування ефекту, так і критерію оптимізму-песимізму Л. Гурвіца.

У загальному випадку інвестиційний проект являє собою деяку сукупність дій, що породжує відповідний потік доходів і витрат і, як наслідок - ефект (чистий дисконтований дохід, різниця між дисконтованими сумами грошових надходжень і витрат). В умовах зовнішньої невизначеності грошові потоки проекту й, отже, його ефект залежать від стану природи (ринку). Це дозволяє, ідучи за Севіджем, формалізувати проекти як функції, що відображають стани природи в ефекти.

У дусі маржиналістської теорії підприємницьких ризиків, вважаємо, що будь-які проекти (з тим самим типом невизначеності) можуть бути порівняні, тобто кожному проекту можна приписати деяке число – *очікуваний ефект,* за величиною якого провадиться оцінка ефективності проектів, порівняння проектів і вибір кращого з декількох альтернативних проектів.

У детермінованому випадку незалежність проектів означає, що реалізація одного не впливає на ефект іншого. Ця вимога порушується, скажімо, при розгляді проектів розвитку рибальства на річці й будівництва хімічного заводу на тій же річці. Однак ситуація не спрощується й тоді, коли мова йде про «явно незалежні» проекти, наприклад, про проект заміни застарілого обладнання й проект автоматизації бухгалтерського обліку. Тут ми зіштовхуємося з нечіткістю в розумінні самого терміна «стан природи». Дотепер цей термін ми використали для опису «зовнішнього середовища» стосовно оцінюваного проекту. Але тоді при оцінці проекту автоматизації бухгалтерського обліку ситуації заміни застарілого обладнання й відмови від такої заміни ми повинні були розглядати як різні стани природи. Аналогічно, при оцінці проекту заміни обладнання ситуації, коли бухгалтерський облік автоматизований і не автоматизований, також повинні були розглядатися як різні стани природи.

Нарешті, зауважимо, що оцінка ефективності проекту базується на інформації про його можливі ефекти, яка формалізована у вигляді деяких математичних об'єктів, наприклад, чисел, числових множин або імовірнісних розподілів. «Фізичний» зміст проекту при цьому мовби ігнорується. Звідси випливає, що два проекти, інформація про ефекти яких ідентична, будуть тотожно ефективними незалежно від того, де і як вони реалізуються. Тим часом установити факт взаємозалежності проектів тільки за інформацією про їхні ефекти не можна - для цього треба знати «весь проект», а не тільки пов'язані з ним грошові потоки.

7.2. Економічна ефективність фірми в моделі марківського процесу

Серед математичних методів, що широко застосовуються у дослідженні динаміки розвитку економічних систем, одне з центральних місць посідають моделі, засновані на теорії марківського випадкового процесу. Теорія марківського процесу детально розроблена в математичному відношенні й має широку сферу застосування. Зокрема розглядається застосування марківських процесів до завдань про розподіл ресурсів між різними галузями виробництва й споживанням, оптимальні строки заміни обладнання, регулювання водопостачання та ін.

Застосування моделі марківського процесу до дослідження динаміки економічних систем звичайно зводиться до виконання чисельних розрахунків із метою одержання конкретних кількісних характеристик процесу. При цьому основною проблемою, з якою зіштовхуються дослідники, є визначення параметрів моделі. Спроба детального опису економічної системи у рамках моделі Маркова приводить до необхідності визначення великої кількості параметрів, які мають імовірнісний характер, і чисельне їхнє визначення виявляється досить проблематичним. Зазначені труднощі стримують застосування теорії марківських процесів до дослідження економічних систем.

У цьому підрозділі модель однорідного ланцюга Маркова застосована до дослідження динаміки розвитку фірми, що працює в умовах ринкової невизначеності. Ми ставимо завдання - оцінити ступінь впливу кожного з параметрів моделі на кінцевий економічний результат діяльності фірми. І на підставі цього зробити висновки про необхідний ступінь точності при визначенні даного параметра моделі.

Іншими словами, ми вирішуємо наступне завдання. Припустимо, що у нас є можливість визначити параметри моделі марківського ланцюга для опису роботи фірми з відносною погрішністю не менше 0,1 (або 10%). Параметри моделі мають імовірнісний характер і для їхнього визначення потрібно виконати збір і статистичну обробку великих масивів даних. Ця робота сама по собі є досить трудомісткою. При цьому виникають наступні питання: яку точність можна чекати від результатів, отриманих при використанні даної моделі; яким чином буде відбуватися нагромадження погрішностей розрахунків при збільшенні горизонту планування (тобто при збільшенні числа кроків у ланцюзі Маркова). Інакше кажучи: чи будуть результати достовірними й чи варто братися за застосування моделі ланцюга Маркова, якщо параметри моделі не можуть бути визначені з погрішністю, меншою за (наприклад) 10%.

Розглянемо діяльність деякої, наприклад, туристичної фірми. Економічні підсумки своєї діяльності фірма визначає у фіксовані моменти часу t. Якщо фірма підбиває підсумки щомісяця, то параметр t нумерує місяці (хоча він може нумерувати квартали, роки і т. ін.). Користуючись термінологією, прийнятою в теорії ланцюгів Маркова, будемо говорити, що в кожний конкретний момент часу t фірма може перебувати в одному з множини можливих станів $A_1, A_2, \dots$. Стосовно туристичної фірми (аналогічний опис може бути застосований до будь-якого підприємства) це означає наступне: якщо туроператори в даному місяці виконали план на 100%, то будемо вважати, що фірма перебуває в стані A_1; якщо план виконаний на 99% - то в стані A_2 і т.ін. Надалі обмежимося випадком, що план завжди виконується не менш ніж на 91%. Хоча це обмеження й не є принциповим, проте у реальній діяльності підприємств воно звичайно виконується.

При зазначеному вище способі опису ми прийдемо до моделі ланцюга Маркова з розмірністю 10×10. Назвемо цю модель моделлю *T* (від слова «точна»). Для повного опису моделі *T* буде потрібне визначення ста дев'яноста параметрів. Це завдання виглядає нереальним. У такому випадку від моделі *T* переходять до моделі *H* («наближена»). Це може бути зроблено в такий спосіб. Замість 10 станів (рівнів) системи розглядаються (у найпростішому випадку) два: стан A_1 - план виконаний на 96-100% і стан A_2 - план виконаний на 91-95%. Модель *H* має розмірність 2×2. Для повного опису моделі *H* потрібно визначити шість параметрів. Спростивши опис моделі, ми одночасно знизили її точність. Наразі розмірність задачі (а отже, ступінь детальності й точності моделі) не є принципою. Результати, отримані нижче, можуть бути отримані й для моделей з більш високою розмірністю. Модель 2×2 цікавить нас тільки з погляду прозорості подальших викладень.

Надалі будемо дотримуватися наступної термінології. Якщо система перебуває в стані A_i, то будемо говорити, що вона перебуває «на рівні i». Вище було відзначено, що навіть для найпростішої дворівневої системи потрібне визначення шести параметрів. Нашим завданням є дослідження питання про мінімальний ступінь точності, з якою повинен бути визначений кожен із шести параметрів дворівневої системи, за якої модельні розрахунки можуть вважатися достовірними.

Модель однорідного (не залежного від часу) ланцюга Маркова для дворівневої системи полягає у визначенні двох матриць: матриці ймовірностей переходів

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

і матриці вартості

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

де p_{ij} - імовірність переходу системи з рівня i на рівень j за один крок еволюції (тобто при зміні часу з моменту t до моменту $t+1$);

r_{ij} - дохід, отриманий при переході системи з рівня i на рівень j за один крок еволюції.

Ймовірності переходів p_{ij} зв'язані наступними співвідношеннями:

$$p_{11} + p_{12} = 1, \qquad p_{21} + p_{22} = 1. \tag{7.1}$$

Приймемо наступні позначення:

$$p_{11} = p, \quad p_{21} = p - d.$$

У розглянутому прикладі з туристичною фірмою (як і в багатьох інших економічних системах), величина d перебуває в межах

$$0 < d < 0{,}8p.$$

З урахуванням (7.1) матриця P може бути записана у вигляді:

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ p-d & 1-p+d \end{pmatrix}.$$

Спростимо також позначення для матриці R:

$$R = \begin{pmatrix} \tilde{r}_0 & \tilde{r}_2 \\ \tilde{r}_1 & \tilde{r}_3 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Дослідження різних економічних систем приводять до висновку, що для економічних систем між параметрами матриці (7.2) мають місце такі співвідношення:

$$\tilde{r}_0 > \max\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\}, \quad \tilde{r}_3 < \min\{\tilde{r}_1, \tilde{r}_2\}. \tag{7.3}$$

Зручно в якості грошової одиниці вибрати величину $\tilde{r}_0$. Тоді (7.2) набуде вигляду:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \bar{r}_2 \\ \bar{r}_1 & \bar{r}_3 \end{pmatrix},$$

де $\bar{r}_i = \dfrac{\tilde{r}_i}{\tilde{r}_0}$.

Введемо позначення:

$$\bar{r}_i = 1 - r_i. \tag{7.4}$$

У цих позначеннях:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1-r_2 \\ 1-r_1 & 1-r_3 \end{pmatrix}.$$

У реальних економічних задачах для r_1 й r_2 мають місце обмеження:

$$0 < r_1, r_2 < 0{,}5. \tag{7.5}$$

З (7.3) і (7.4) випливає:

$$r_3 > \max\{r_1, r_2\}.$$

У моделі ланцюга Маркова економічний результат (дохід фірми) залежить від рівня (стану), з якого система починає еволюцію. Позначимо через $v_i(t)$ дохід, отриманий за t кроків еволюції системи (фірми) у випадку, коли за $t = 0$ система перебувала на i-ому рівні. Тоді вектор доходів розраховується з векторно-матричного рівняння [5]:

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \left(E + P + P^2 + \ldots + P^t\right) \cdot \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

де E – одинична матриця 2×2,

g_i - елементи головної діагоналі матриці $P \cdot R^T$, R^T - транспонована матриця вартостей R.

На рис. 7.1 показано динаміку доходу фірми залежно від часу t, у випадку, коли в початковий момент часу фірма перебуває на першому рівні. Розрахунки, виконані за наступних значень параметрів: $p = 0{,}9$; $d = 0{,}2$; $r_1 = 0{,}2$; $r_2 = 0{,}4$ і трьох значень параметра r_3. Всі три лінії на рисунку практично зливаються. Чисельні розрахунки показують, що відхилення значень $v_1(t)$ для значень параметра $r_3 = 0{,}4$ й $r_3 = 0{,}9$ від значень $v_1(t)$ для $r_3 = 0{,}6$ не перевищують 1%. Це означає, що при точності розрахунків 1% значення параметра r_3 може бути обчислене як сума: $r_3 = r_1 + r_2$.

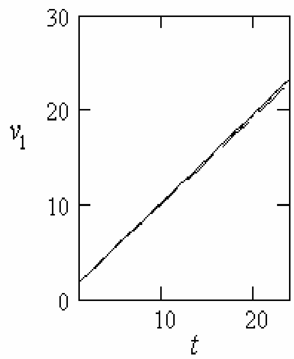


Рис. 7.1. *Величина доходу $v_1(t)$ як функція t для трьох значень* $r_3 = 0{,}4; 0{,}6; 0{,}9$

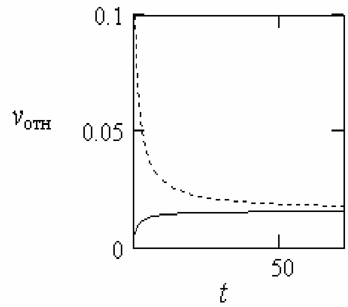


Рис. 7.2. *Залежність зведених різниць доходів від часу: суцільна лінія - $v_{1отн}$; точкова - $v_{2отн}$*

На рис. 7.2 показано результати розрахунку величин:

$$v_{1отн} = \frac{v_1(0{,}4) - v_1(0{,}8)}{v_1(0{,}4)} \quad \text{і} \quad v_{2отн} = \frac{v_2(0{,}4) - v_2(0{,}8)}{v_2(0{,}4)}. \qquad (7.6)$$

У (7.6) у дужках указано значення параметра r_3. Інші параметри при розрахунку по (7.6) мають такі значення: $p = 0{,}9$; $d = 0{,}2$; $r_1 = 0{,}1$; $r_2 = 0{,}3$. З рис. 7.2 видно, що $v_{1отн}$ й $v_{2отн}$ при великих значеннях t сходяться до величини 0,017. Це означає, що при великих t конкретне значення параметра r_3 стає несуттєвим.

На рис. 7.3 показано залежність величини

$$v_{12}(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{v_1(t)}$$

від параметра d для двох значень t. З рис. 7.3 видно, що за $t = 12$ дохід v_1 може перевищувати v_2 на 20%, а за $t = 24$ - усього лише на 10%.

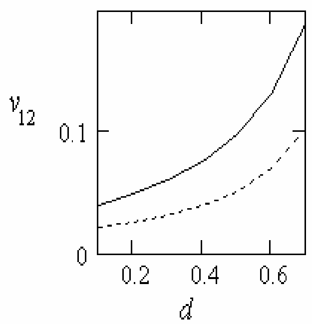


Рис. 7.3. *Залежність $v_{12}(t)$ від d для різних t:*
суцільна лінія - $t = 12$; точкова - $t = 24$

Оскільки $v_1(t)$- це дохід, отриманий фірмою за час t, у тому випадку, коли за $t = 0$ фірма перебувала на першому рівні, то з результатів, представлених на рис. 7.3, випливає, що для одержання максимального економічного ефекту фірма повинна вжити заходів, щоб на самому початку проекту (за $t = 0$) перебувати саме на рівні 1, а не 2.

Отже, особливу увагу рекламній й маркетинговій діяльності фірма повинна приділяти на самому початку проекту.

7.3. Оптимізація виробничих потужностей двопродуктового підприємства за наявності ринкових обмежень

Однією з актуальних проблем у плануванні виробничої діяльності підприємств є оптимальне завантаження виробничих потужностей. У вирішенні цього завдання можна виділити два основних напрями. Перший напрям пов'язаний зі складанням оптимального плану виробництва при фіксованих виробничих потужностях. Другий напрям пов'язаний з плануванням розвитку виробничих потужностей. Найбільша кількість методик з розробки виробничих програм ставлять собі за мету розрахунок оптимального плану виробництва. Завдання оптимального плану - забезпечити найбільш ефективне завантаження наявних виробничих потужностей (перший напрям). У більш принциповій постановці (другий напрям) завдання планування полягає у визначенні оптимальних масштабів виробничих потужностей підприємства з урахуванням ринкової кон'юнктури. У цьому підрозділі поставлене завдання розробки методики визначення оптимальних масштабів виробництва (основних виробничих фондів) двопродуктового підприємства за наявності ринкових обмежень.

Одними з перших питань, які виникають при плануванні діяльності двопродуктових підприємств, є питання про оптимальне співвідношення виробничих потужностей, що випускають продукцію першого й другого виду, і про оптимальний масштаб виробництва в цілому. Нашим завданням є розробка методики визначення оптимальних масштабів виробництва двопродуктового підприємства при наявності ринкових обмежень, і розрахунок оптимального співвідношення основних виробничих фондів, які задіяні у виробництві першого й другого видів продукції, з метою одержання максимального прибутку.

З урахуванням (5.68), співвідношення (5.60) можна записати у вигляді:

$$A = (1 + p_1)A_1 + (1 + p_2)A_2 \,. \tag{7.7}$$

Співвідношення (7.7) означає, що фактично ми виключаємо з розгляду основні фонди A_0 і будемо записувати рівняння тільки для A_1 й A_2.

У силу ринкової кон'юнктури існує насичення ринку продукцією кожного виду. Обсяги виробленої P_i й реалізованої продукції R_i (у вартісному вираженні) i-го виду ($i = 1{,}2$) визначаються виразами:

$$P_i = f_i \cdot A_i \,, \tag{7.8}$$

$$R_i = Q_i\left(1 - \exp\{-k_i A_i\}\right), \tag{7.9}$$

де f_i - показник фондовіддачі для i-го виду фондів;

Q_i - максимальна потреба ринку в продукції i-го виду.

Вираз (7.9) відображає насичуваність ринку продукцією. Якби ринок не насичувався, то розвиток виробництва теоретично був би безмежним, що нереально. Коефіцієнт k_i у рівнянні (7.9) визначається з умови збігу P_i й R_i при малих обсягах виробництва (тобто при малих значеннях A_i), а саме, з умови:

$$\lim_{A_i \to 0} \frac{\partial R_i}{\partial A_i} = \frac{\partial P_i}{\partial A_i}. \quad (7.10)$$

З (7.8) – (7.10) знаходимо: $k_i = \dfrac{f_i}{Q_i}$. Тепер (7.9) набуде вигляду:

$$R_i = Q_i \left(1 - \exp\left\{ - f_i \frac{A_i}{Q_i} \right\} \right). \quad (7.11)$$

На рис. 7.4 показано залежності обсягів виробленої P_1 й реалізованої продукції R_1 від вартості основних виробничих фондів A_1 за $f_1 = 1{,}5$. У якості f_1 ми беремо типове значення річного показника фондовіддачі.

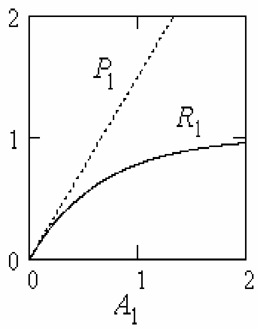


Рис. 7.4. *Залежність обсягів виробленої P_1 й реалізованої продукції R_1 від вартості основних виробничих фондів A_1 за $Q_1 = 1$*

Дохід підприємства визначається обсягом реалізації R_i кожного виду продукції, а витрати пов'язані з виробництвом P_i, тому прибуток підприємства визначається рівняннями:

$$M_{tot} = \sum_{i=1}^{2} (R_i - c_i P_i), \quad (7.12)$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t), \quad (7.13)$$

$$N(t) = \tau \cdot M(t), \quad (7.14)$$

де c_i – частка собівартості випуску продукції (зумовлена i-тим виробничим фондом);

$M_{tot}(t)$ - загальний прибуток малого підприємства;

$M(t)$ - чистий прибуток малого підприємства за винятком податкових відрахувань;

$N(t)$ - сума податкових відрахувань;

τ - ставка оподатковування на прибуток.

Рівняння (7.8), (7.11), (7.12)-(7.14) являють собою модель двопродуктового підприємства, що працює в умовах ринкових обмежень на реалізацію продукції. У рамках сформульованої моделі будемо вирішувати наступне завдання: знайти значення основних виробничих фондів A_1 і A_2, за яких чистий прибуток M підприємства досягає максимального значення.

З рівнянь (7.13), (7.14) випливає:

$$M = \frac{1}{1+\tau} M_{tot}. \tag{7.15}$$

Співвідношення (7.15) означає, що завдання знаходження максимуму чистого прибутку M збігається із завданням знаходження максимуму загального прибутку M_{tot}, тому ми будемо шукати максимум M_{tot} як функції двох змінних A_1 і A_2. Критичні точки M_{tot} визначаються з системи рівнянь:

$$\frac{\partial M_{tot}}{\partial A_1} = 0, \qquad \frac{\partial M_{tot}}{\partial A_2} = 0. \tag{7.16}$$

Ми будемо розв’язувати дві різні задачі на умовний екстремум. Перша задача: основні виробничі фонди можуть перерозподілятися між лініями (цехами), що виробляють два різні види продукції, але повна вартість фондів є постійною:

$$A_1 + A_2 = A \equiv const. \tag{7.17}$$

Друга задача: обсяги виробничих фондів A_1 і A_2 погоджені між собою:

$$A_2 = k_1 \cdot A_1. \tag{7.18}$$

Почнемо з розв'язку першої задачі (7.16), (7.17). Ми не будемо виконувати аналітичного доказу, що задача (7.16), (7.17) є задачею на максимум (а не на мінімум). Замість цього, ми приводимо на рис. 7.5 залежність M_{tot} від A_1, розраховану за рівнянням (7.12), де згідно з (7.17) виконана підстановка $A_2 = A - A_1$. Інші параметри для розрахунку обрані наступними:

$$Q_1 = 1,\ Q_2 = 1{,}3Q_1,\ f_1 = 1{,}5,\ f_2 = 0{,}8 f_1,\ c_1 = 0{,}5,\ c_2 = 0{,}6c_1. \tag{7.19}$$

Надалі за одиницю виміру вартості беремо Q_1, тобто $Q_1 = 1$. З рис. 7.5 видно, що задача (7.16), (7.17) дійсно є задачею на максимум. Аналогічним способом можна переконатися, що й задача (7.16), (7.18) також є задачею на максимум.

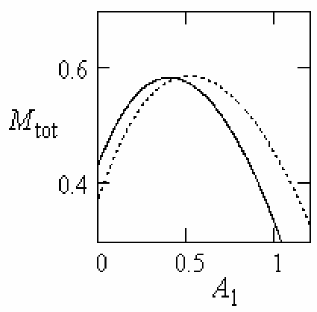


Рис. 7.5. *Залежність* M_{tot} *від* A_1*: суцільна лінія -* $A = 1{,}5 \cdot Q_1$*; точкова лінія -* $A = 2 \cdot Q_1$

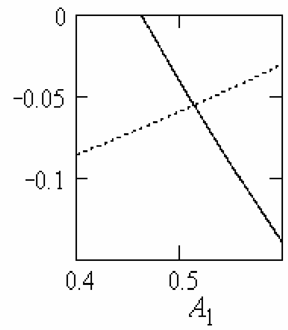


Рис. 7.6. *Залежність від* A_1 *лівої частини (7.20) (суцільна лінія) і правої частини (точкова лінія)*

Завдання (7.16), (7.17) приводить до такого рівняння для A_1, при якому M_{tot} досягає максимуму:

$$f_1\left(\exp\left\{-\frac{f_1 A_1}{Q_1}\right\} - c_1\right) = f_2\left(\exp\left\{-\frac{f_2(A - A_1)}{Q_2}\right\} - c_2\right). \qquad (7.20)$$

На рис. 7.6 показано графічний розв'язок рівняння (7.20) за $A = 2Q_1$; інші параметри зазначені в (7.19).

Чисельний розв'язок рівняння (7.20) для кривих, показаних на рис. 7.5, приводить до наступного результату. Максимальне значення M_{tot} досягається за $A_1 = 0{,}513$ для $A = 2Q_1$; за $A_1 = 0{,}399$ для $A = 1{,}5Q_1$. Ці максимальні значення дорівнюють - $M_{tot}(A = 2) = 0{,}587$, $M_{tot}(A = 1{,}5) = 0{,}584$ (значення A і M_{tot} в од. Q_1). Вказані максимальні значення виявилися близькими за величиною. Для з'ясування залежності максимального прибутку від сумарної вартості основних виробничих фондів A (див. (7.17)), на рис. 7.7 подано результати розрахунку максимального значення прибутку M_{tot} як функції A.

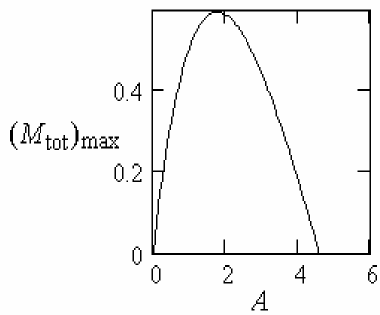


Рис. 7.7. *Залежність максимального значення прибутку* M_{tot} *від сумарної вартості основних виробничих фондів* A

З рис. 7.7 випливає, що збільшення сумарної вартості основних виробничих фондів A приводить до зростання максимального прибутку M_{tot} тільки поки вартість фондів не досягне значення $A = 1{,}765$, при цьому максимальний прибуток становитиме $M_{tot} = 0{,}594$. Подальше збільшення сумарної вартості основних виробничих фондів буде приводити до зниження максимально можливого прибутку.

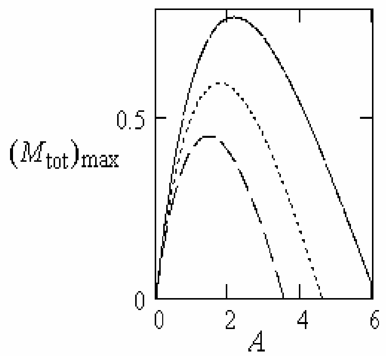


Рис. 7.8. *Залежність максимального значення прибутку* M_{tot} *від сумарної вартості основних виробничих фондів* A*: суцільна лінія -* $c_1 = 0{,}4$*; точкова -* $c_1 = 0{,}5$*; пунктирна -* $c_1 = 0{,}6$

На рис. 7.8 подано результати розрахунку $\left(M_{tot}\right)_{\max}$ як функції A для трьох значень собівартості c_1, при цьому собівартість c_2, згідно з (7.19), визначена як $c_2 = 0{,}6c_1$. З розрахунків, поданих на рис. 7.8, видно, що збільшення сумарної вартості фондів може приводити до зростання максимального прибутку тільки при одночасному зниженні собівартості.

Перейдемо до розв'язку другої задачі - (7.16), (7.18), яка, як було зазначено вище, також є задачею на максимум. На рис. 7.9 показано результати розрахунку прибутку M_{tot} від вартості фондів A_1, при цьому фонди A_2 визначені співвідношенням (7.18).

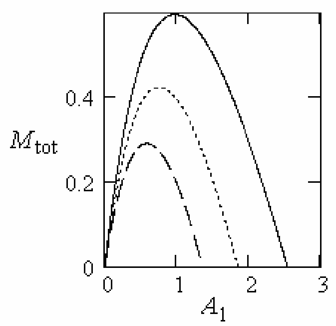


Рис. 7.9. *Залежність прибутку* M_{tot} *від вартості фондів* A_1*: суцільна лінія -* $c_1 = 0{,}4$*; точкова -* $c_1 = 0{,}5$*; пунктирна -* $c_1 = 0{,}6$

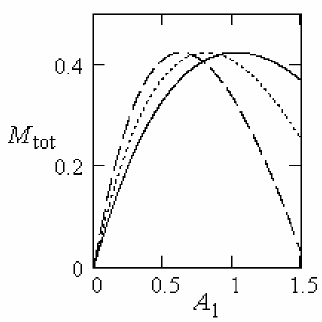


Рис. 7.10. *Залежність прибутку* M_{tot} *від вартості фондів* A_1*: суцільна лінія -* $f_1 = 1{,}1$*; точкова -* $f_1 = 1{,}4$*; пунктирна -* $f_1 = 1{,}8$

З рис. 7.9 видно, що збільшення виробничих фондів A_1 приводить до збільшення максимального значення M_{tot} тільки при зниженні собівартості.

На рис. 7.10 прибуток M_{tot} розрахований як функція A_1 при $c_1 = 0{,}5$ для трьох значень показника фондовіддачі f_1. З результатів, показаних на рис. 7.10, видно, що збільшення показника фондовіддачі не приводить до збільшення прибутку, але приводить до того, що максимальний прибуток буде отримано за меншої вартості основних виробничих фондів. Ця обставина приводить до висновку, що в ринкових умовах підприємство повинно надавати перевагу високотехнологічному обладнанню, тобто обладнанню з високим показником фондовіддачі, оскільки при цьому можна домогтися значного скорочення вартості основних виробничих фондів.

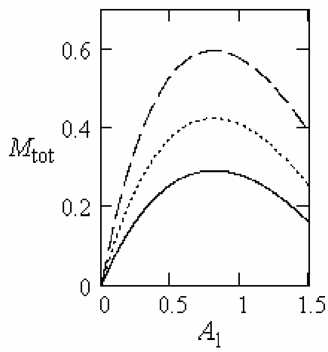


Рис. 7.11. *Залежність прибутку* M_{tot} *від вартості фондів* A_1*: суцільна лінія -* $c_1 = 0{,}6$, $f_1 = 1{,}08$*; точкова -* $c_1 = 0{,}5$, $f_1 = 1{,}4$*; пунктирна -* $c_1 = 0{,}4$, $f_1 = 1{,}8$

На рис. 7.11 подано результати розрахунку M_{tot} у випадку, коли одночасно змінюється й собівартість (убуває) і фондовіддача (зростає). У цьому випадку зростання максимального значення M_{tot} відбувається за практично незмінного значення вартості фондів A_1.

7.4. Виробничі функції та інвестиційна програма підприємства в ринкових умовах

Планування діяльності підприємства в ринкових умовах має враховувати ринкову кон'юнктуру, яка зумовлена обмеженим попитом на продукцію даного підприємства. Ринкові обмеження є досить істотним зовнішнім фактором, що у значній мірі визначає стратегію виробничої діяльності підприємства. Найбільший вплив ринкова кон'юнктура має на діяльність малих підприємств. Планування виробничої діяльності таких підприємств істотно спирається на поточний маркетинговий аналіз ринку. При цьому підприємство змушене мати певні резервні потужності, які можуть бути задіяні за сприятливої ситуації. Навмисно створенням цих потужностей підприємство, як правило, не займається. Вони виникають «самі по собі» у результаті дії двох протилежних тенденцій: з одного боку, підприємство прагне максимально збільшити масштаби виробництва, з іншого – у силу ринкової невизначеності попит на продукцію в будь-який момент може виявитися меншим, ніж плановий випуск продукції в даний період часу.

Одним із ефективних інструментів планування виробничої діяльності підприємства є виробничі функції (ВФ). У силу зазначених вище причин побудова ВФ, а отже, і вся проблема моделювання виробничої діяльності підприємства у ринкових умовах істотно ускладнюється.

На сьогодні активно досліджуються динамічні моделі розвитку підприємств. Зазначені моделі можуть бути застосовані до дослідження виробничої діяльності підприємств будь-яких масштабів: малих, середніх і великих підприємств. У зазначених вище роботах передбачалося, що ринок має необмежену ємність стосовно продукції, що випускає підприємство. У підрозділі поставлене завдання розробки методики розрахунку динаміки розвитку ОВФ підприємства й оптимальної інвестиційної програми за наявності ринкових обмежень.

Нижче викладені результати роботи [97], в якій досліджувалися наступні завдання: розробити і дослідити новий клас виробничих функцій для підприємства, яке працює в умовах ринкових обмежень; розробити методику розрахунку динаміки розвитку основних виробничих фондів (ОВФ) підприємства при обмежених потребах ринку; дослідити залежність динаміки ОВФ, чистого прибутку й фонду нагромадження підприємства від показника фондовіддачі, собівартості й частки прибутку, виділеної на реінвестування; визначити вплив коефіцієнта ліквідності на економічну ефективність проекту; визначити стратегію розвитку виробництва, яка дасть можливість дістати максимальний прибуток.

Будемо вважати, що обсяг виробництва P підприємства, визначається єдиним фактором – вартістю ОВФ A. Вище було зазначено, що модель виробничої динаміки, яка заснована на однофакторній ВФ, є досить змістовною. Наприклад, двофакторна ВФ Кобба-Дугласа

$$P = bA^{\alpha} L^{\beta} \qquad (7.21)$$

за постійної фондоозброєності

$$k_f = A / L = const \qquad (7.22)$$

перетворюється в однофакторну ВФ, що безпосередньо випливає з (7.21) при підстановці – $L = k_f^{-1} A$. При цьому, якщо в (7.21) має місце рівність $\alpha + \beta = 1$, то з (7.21) і (7.22) випливає:

$$P(A) = f \times A, \qquad (7.23)$$

де f - фондовіддача. При цьому збільшення випуску лінійно пов'язане зі збільшенням ОВФ ΔA:

$$\Delta P = f \times \Delta A. \qquad (7.24)$$

ВФ $f(x)$ (тут $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор ресурсів), які використовуються в економічних моделях, зазвичай вважаються неокласичними. Це, зокрема, означає, що виконується закон (гіпотеза) спадної ефективності виробництва: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$ – зі зростанням витрат одного i-го ресурсу темп зростання випуску продукції зменшується. Однофакторна ВФ типу Леонтьєва (7.23) є граничним випадком неокласичної ВФ. Такий тип функції з постійним темпом зростання за ресурсом ($\frac{\partial P}{\partial A} = f \equiv const$) може мати місце лише в припущенні, що ринок не насичується, тобто виробництво даного виду продукції можна нарощувати нескінченно. Якщо у ВФ (7.21) $\alpha + \beta \equiv \sigma > 1$, то за умови (7.22) ВФ (7.21) набуде вигляду $P(A) = \gamma \times A^{\sigma}$. Ця ВФ відповідає виробництву зі зростаючою економічною ефективністю, дійсно: $\frac{\partial^2 P}{\partial A^2} = \gamma \times \sigma \times (\sigma - 1) \times A^{\sigma - 2} > 0$. У реальних ринкових умовах необхідно враховувати ринкові обмеження, що приводять до того, що економічна ефективність, починаючи з певного обсягу виробництва, завжди виявляється спадною.

Нехай поточне виробництво продукції дорівнює P. Припустимо, що в результаті маркетингових досліджень установлено, що максимальна потреба ринку в даному виді продукції дорівнює Q, тобто $P_{\max} = Q$. Згідно зі співвідношенням (7.24) темп зростання випуску P без урахування ринкових обмежень визначається тільки внутрішніми параметрами виробництва, у цьому випадку - тільки фондовіддачею f, яка у загальному випадку може залежати від поточного обсягу виробництва $f = f(P)$. За наявності ринкових обмежень темп зростання випуску буде залежати також від максимальної потреби в товарі Q. Співвідношення (7.24) тепер є: $\Delta P(A) = \varphi(Q, P) \times \Delta A$, або при $\Delta A \to 0$:

$$\frac{dP(A)}{dA} = \varphi(Q,P), \tag{7.25}$$

де $\varphi(Q,P)$ - ефективне значення фондовіддачі. Для функції $\varphi(Q,P)$ мають виконуватися такі умови:

$$\varphi(Q,0) \equiv \lim_{P \to 0} \varphi(Q,P) = f; \tag{7.26}$$

$$\varphi(Q,Q) \equiv \lim_{P \to Q} \varphi(Q,P) = 0. \tag{7.27}$$

Умова (7.26) констатує той факт, що за малих P, коли вплив ринкових обмежень ще не позначається на роботі підприємства, співвідношення (7.25) має переходити в співвідношення (7.24), яке еквівалентне рівнянню $\frac{dP(A)}{dA} = f$. Умова (7.27) означає, що за максимальної насиченості ринку (коли $P = Q$) будь-яке збільшення ОВФ ΔA приводить, згідно з (7.25) і (7.27), до нульового приросту випуску - $\Delta P = 0$. Розглядаючи функцію $\varphi(Q,P)$ як функцію змінної P, розкладемо її в околиці Q в ряд за степенями $P - Q$:

$$\varphi(Q,P) = \varphi(Q,Q) + k_1(Q) \times (P-Q) + k_2(Q) \times (P-Q)^2 + \ldots. \tag{7.28}$$

Надалі залежність від параметра Q в коефіцієнтах k_1 і k_2 вказувати не будемо. Утримуючи в правій частині (7.28) тільки лінійний за $P - Q$ внесок і з огляду на (7.27), одержуємо:

$$\varphi_{10}(Q,P) = k_{10} \times (Q - P), \tag{7.29}$$

де $k_{10} = -k_1$.

За своїм економічним змістом випуск P є функцією вартості ОВФ A, отже, $\varphi_{10}(Q,P)$ також залежить від A. Для того, щоб залежність φ від A була узгоджена з законом спадної ефективності, коефіцієнт k_{10} в (7.29) має бути додатним. Дійсно, оскільки ми вважаємо, що функція $P(A)$ є зростаючою: $A_2 > A_1 \to P_2 > P_1$, тоді за $k_{10} > 0$ з (7.28) випливає, що функція φ_{10} є спадною функцією A: $A_2 > A_1 \to P_2 > P_1 \to \varphi_{10}(Q,P_2) < \varphi_{10}(Q,P_1)$. Даний ланцюжок нерівностей є виразом закону спадної ефективності.

Підставивши (7.29) в (7.26), дістанемо $k_{10} \times Q = f$, отже $k_{10} = f / Q$. Тепер з рівностей (7.29) і (7.25) одержуємо рівняння:

$$\frac{dP(A)}{dA} = \frac{f}{Q} \times (Q - P). \tag{7.30}$$

Розв'язком рівняння (7.30), за початкової умови $P(0) = 0$, є ВФ:

$$P_{10}(A) = Q \times (1 - \exp\{-f \times A / Q\}). \tag{7.31}$$

Відзначимо, що ВФ (7.31) задовольняє умови неокласичності, крім умови нескінченного зростання $P_{10}(A)$ за $A \to \infty$. Легко переконатися, що ВФ (7.31) за малих A перетворюється у ВФ (7.23). Дійсно, розклавши праву частину рівності (7.31) у ряд за степенями A і обмежуючись лише лінійною за A частиною ряду, одержуємо $P_{10}(A) = f \times A$. Графічна ілюстрація відповідності між ВФ (7.31) і ВФ (7.23) розглянута в попередньому пункті.

З виразу (7.29) випливає, що функція $\varphi_{10}(Q,P)$ є непарною щодо одночасної заміни знаків її параметрів: $\varphi_{10}(-Q,-P) = -\varphi_{10}(Q,P)$. Якщо експериментальні дані дозволяють стверджувати, що функція $\varphi(Q,P)$ в рівнянні (7.25) є парною: $\varphi(-Q,-P) = \varphi(Q,P)$, тоді в цьому випадку ряд у правій частині (7.28) буде починатися з квадратичного за $P-Q$ члена, і, з огляду на те, що $\varphi(Q,Q) = 0$, одержимо:

$$\varphi_{02}(Q,P) = k_{02} \times (Q-P)^2,$$

де відповідно до (7.26) $k_{02} = f / Q^2$. Рівняння (7.25) тепер набуде вигляду:

$$\frac{dP(A)}{dA} = \frac{f}{Q^2} \times (Q-P)^2. \tag{7.32}$$

Розв'язком рівняння (7.32), за початкової умови $P(0) = 0$, є ВФ:

$$P_{02}(A) = Q \times \left(1 - \frac{1}{\frac{f}{Q} \times A + 1} \right). \tag{7.33}$$

У найбільш загальному випадку в правій частині рівняння (7.28) отримаємо лінійний і квадратичний за $P-Q$ внески:

$$\varphi_{12}(Q,P) = k_1 \times (Q-P) + k_2 \times (P-Q)^2. \tag{7.34}$$

У (7.34) ми вже замінили знак k_1 на протилежний. По-перше, помітимо, що для збіжності розкладу (7.28) зазвичай має виконуватися умова $\left|k_1 \times (Q-P)\right| > \left|k_2 \times (P-Q)^2\right|$ для всіх P, зокрема, і для $P = 0$. Це означає, що

$$\left|k_{21} Q\right| < 1, \tag{7.35}$$

де $k_{21} = k_2 / k_1$.

З умови (7.26) для функції (7.34) знайдемо $k_1 \times Q + k_2 \times Q^2 = f$, або $1 + k_{21} Q = \frac{k_{10}}{k_1}$. Відхилення k_1 від k_{10} будемо характеризувати параметром δ: $\dfrac{k_{10}}{k_1} = 1+\delta$, тоді з двох останніх співвідношень знаходимо:

$$k_{21}Q = \delta \quad \text{і} \quad k_1 = \frac{k_{10}}{1+\delta}. \tag{7.36}$$

Згідно з (7.35), $|\delta| < 1$.

Рівняння (7.25), з урахуванням (7.34), набуде вигляду:

$$\frac{dP}{(Q-P)+k_{21}(P-Q)^2} = k_1 \times dA. \tag{7.37}$$

Розв'язком рівняння (7.37), за початкової умови $P(0) = 0$, є ВФ:

$$P_{12}(A) = Q \times \frac{\exp\left\{\dfrac{k_{10}}{1+\delta}A\right\} - 1}{\exp\left\{\dfrac{k_{10}}{1+\delta}A\right\} - \dfrac{\delta}{1+\delta}}. \tag{7.38}$$

При одержанні розв'язку (7.38) ми скористалися співвідношеннями (7.36). Якщо в (7.38) покласти $\delta = 0$, тоді ВФ $P_{12}(A)$ перетвориться на ВФ $P_{10}(A)$, яка визначиться співвідношенням (7.31). Зазначимо, що при необхідності ряд у правій частині рівності (7.28) може бути продовжений додаванням третьої й більш високих степенів відхилень ($P-Q$). Однак це потребує додаткової експериментальної інформації для визначення додаткових коефіцієнтів. При наявності достатньої інформації диференціальне рівняння для визначення ВФ у разі, якщо воно не може бути розв’язане аналітично, - може бути розв’язане стандартними чисельними методами.

Для попереднього порівняння ВФ (7.31), (7.33) і (7.38) використаємо такі одиниці виміру: випуск P записуємо в одиницях Q, вартість ОВФ A - в одиницях $1/k_{10} \equiv Q/f$. У зазначених одиницях ВФ набудуть вигляду:

$$P_{10} = 1 - e^{-A}. \tag{7.39}$$

$$P_{02} = 1 - \frac{1}{A+1}. \tag{7.40}$$

$$P_{12} = \frac{\exp\left\{\dfrac{A}{1+\delta}\right\} - 1}{\exp\left\{\dfrac{A}{1+\delta}\right\} - \dfrac{\delta}{1+\delta}}. \tag{7.41}$$

На рис. 7.12 показано графіки ВФ за (7.39) – (7.41). З рис. 7.12 видно, що всі три ВФ задовольняють умові спадної ефективності. Крім того, з рис. 7.12 видно, що ВФ (7.39) (точніше (7.31)) може розглядатися як деяка «еталонна» залежність випуску P від вартості ОВФ A.

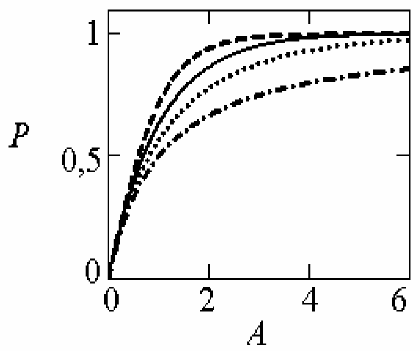


Рис. 7.12. *Залежність обсягу виробництва від поточної вартості ОВФ: суцільна лінія – ВФ P_{10} за (7.39); штрих - пунктирна лінія – ВФ P_{02} за (7.40); пунктирна лінія – ВФ P_{12} за (7.41) для $\delta = -0{,}4$; точкова лінія – ВФ P_{12} за (7.41) для $\delta = 0{,}9$.*

Інші залежності, наприклад, P_{12} можуть застосовуватися, коли є необхідність одержати більш точну відповідність між експериментальною й теоретичною функціями. З рис. 7.12 видно, що якщо експериментальні дані щодо випуску $P_{експ}$ лежать вище, ніж «еталонна» залежність випуску P за (7.39), то параметр δ у ВФ (7.41) потрібно вибрати від'ємним, а якщо нижче – тоді додатним.

Для здійснення розрахунків економічної динаміки підприємства доцільно використовувати іншу, ніж у співвідношеннях (7.39) – (7.41), систему одиниць виміру. У подальших розрахунках буде використовуватися ВФ (7.31) (індекс “10” у позначенні ВФ опускаємо). На рис. 7.13 показано типовий вигляд залежності $P(A)$ згідно з (7.31). Динаміку виробництва ми фактично починаємо досліджувати не зі значення $A = 0$, а з деякого значення $A = A_0$, при цьому $P = P_0$.

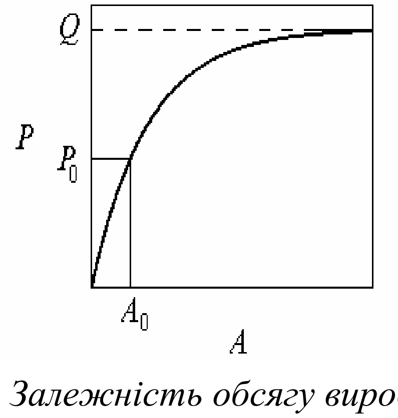


Рис. 7.13. *Залежність обсягу виробництва від поточної вартості ОВФ*

Замість двох параметрів Q і P_0 зручніше використовувати один параметр – їхнє відношення: $g = \dfrac{Q}{P_0}$. З визначення ВФ (7.31) і рис. 7.13 зрозуміло, що:

$$P_0 = Q \times (1 - \exp\{-f \times A_0 / Q\}). \tag{7.42}$$

З огляду на визначення g, з (7.42) знаходимо $Q = \dfrac{f}{q} A_0$, де $q = \ln \dfrac{g}{g-1}$. Тепер ВФ (7.31) набуде вигляду:

$$P(A) = \frac{f}{q} \times A_0 \left[1 - \exp\left\{ -q \times \frac{A}{A_0} \right\} \right]. \tag{7.43}$$

Інші рівняння динаміки підприємства беремо у вигляді:

$$M_{tot}(t) = (1-c) \times P(t), \tag{7.44}$$

$$M(t) = M_{tot}(t) - N(t),$$

$$N(t) = \tau \times (1-\xi) M(t),$$

$$\frac{dA}{dt} = \xi \times M(t), \tag{7.45}$$

З системи (7.43) – (7.45) послідовно знаходимо (аргумент t у функціях не вказуємо):

$$M = \frac{(1-c)}{1+\tau(1-\xi)} P = \frac{(1-c) f A_0}{q[1+\tau(1-\xi)]} \left[1 - \exp\left\{ -q \times \frac{A}{A_0} \right\} \right], \tag{7.46}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{aA_0}{q} \left[1 - \exp\left\{ -q \times \frac{A}{A_0} \right\} \right] \quad , \tag{7.47}$$

де

$$a = \frac{(1-c) f \xi}{1+\tau(1-\xi)}. \tag{7.48}$$

Рівняння (7.47), за початкової умови $A(0) = A_0$, має розв'язок:

$$A(t) = \frac{A_0}{q} \ln\left(\frac{e^{a \times t}}{g-1} + 1 \right). \tag{7.49}$$

Зі співвідношення (7.43) видно, що “природною” одиницею виміру для випуску $P(A)$ й для вартості ОВФ A є величина A_0. Крім того, параметр A_0 визначає масштаб виробництва. Для виключення масштабу вважаємо $A_0 = 1$. Залежність економічної динаміки підприємства від співвідношення між Q й P_0 у даній роботі ми досліджувати не будемо, тому для виконання розрахунків обираємо конкретне значення $g = 2$. Це означає, що протягом впровадження проекту підприємство може подвоїти виробництво, і лише тоді ринок буде повністю насичений даним видом продукції (при $g = 2$ $q = \ln 2$). Для розрахунку a за (7.48) використовувалися статистичні дані для малих підприємств Дніпропетровської області:

$$c = 0{,}6;\ f = 0{,}12;\ \xi = 0{,}5\ (\xi \in [0{,}3; 0{,}7]\ );\ \tau = 0{,}25. \qquad (7.50)$$

На рис. 7.14 представлено часову динаміку вартості ОВФ за (7.49) для трьох значень собівартості. Розрахунки виконані для часового інтервалу 48 місяців (4 роки). За $c = 0{,}6$ вартість ОВФ за 4 роки зростає майже удвічі. За $c = 0{,}8$ приріст ОВФ відбувається досить повільно. Для збільшення темпу зростання ОВФ підприємство має вжити заходи для зниження собівартості продукції.

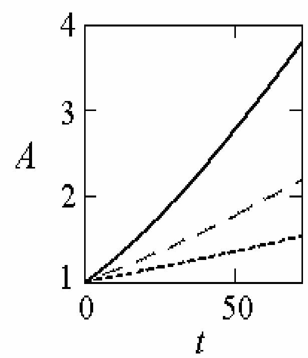


Рис. 7.14. *Залежність вартості ОВФ A від часу: суцільна лінія - $c = 0{,}4$; пунктирна лінія - $c = 0{,}6$; точкова лінія - $c = 0{,}8$*

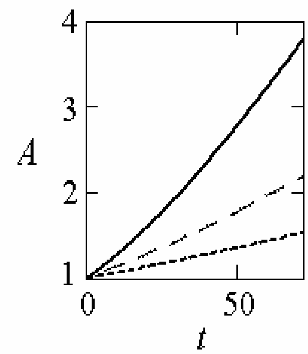


Рис. 7.15. *Залежність вартості ОВФ A від часу: суцільна лінія - $f = 0{,}2$; пунктирна лінія - $f = 0{,}1$; точкова лінія - $f = 0{,}05$*

З рис. 7.15 видно істотну залежність динаміки ОВФ від фондовіддачі. Розрахунки виконані в часовому інтервалі від 0 до 72 місяців. Для малих значень фондовіддачі темпи зростання ОВФ є низькими. З (7.48) і (7.49) видно, що за фіксованого параметра реінвестування ξ динаміка ОВФ визначається добутком $(1 - c) \times f$. На рис. 7.14 й 7.20 показано результати розрахунків за $\xi = 0{,}5$.

На рис. 7.21 показано залежність вартості ОВФ від параметра реінвестування ξ для $t = 24$. Результати, які наведені на рис. 7.21, означають наступне. Якщо, наприклад, частка собівартості продукції дорівнює 0,4 і реінвестування проводитися з параметром реінвестування $\xi = 0{,}5$, то через 2 роки вартість ОВФ зросте з $A_0 = 1$ до $A_1 = 1{,}658$.

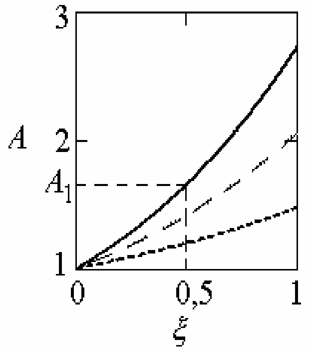


Рис. 7.21. *Залежність вартості ОВФ* A *від* ξ*:*
суцільна лінія - $c = 0{,}4$*;*
пунктирна лінія - $c = 0{,}6$*;*
точкова лінія - $c = 0{,}8$

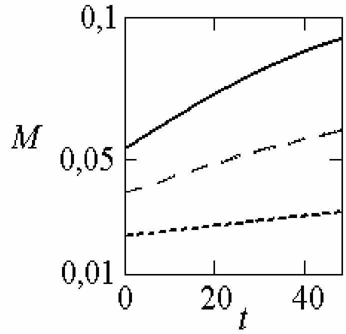


Рис. 7.22. *Залежність* M *від* t*:*
суцільна лінія - $c = 0{,}3$*;*
пунктирна лінія - $c = 0{,}5$*;*
точкова лінія - $c = 0{,}7$

На рис. 7.22 подано часову динаміку чистого прибутку підприємства за (7.46) для трьох значень собівартості. За $c = 0{,}5$ чистий поточний прибуток підприємства за 4 роки зростає в 1,56 раза.

На рис. 7.23 подано часову динаміку чистого прибутку підприємства для трьох значень фондовіддачі. З результатів рис. 7.23 видно, що для невеликих значень фондовіддачі ($f < 0{,}1$) чистий прибуток підприємства слабко залежить від реінвестування. Ця обставина має враховуватися при розробці

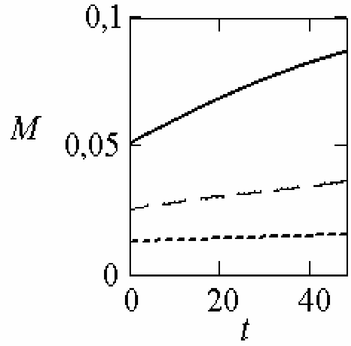


Рис. 7.23. *Залежність* M *від* t*:*
суцільна лінія - $f = 0{,}2$*;*
пунктирна лінія - $f = 0{,}1$*;*
точкова лінія - $f = 0{,}05$

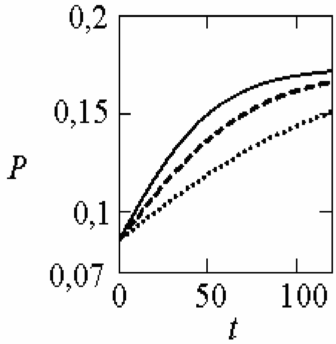


Рис. 7.24. *Залежність випуску* P *від* t*: суцільна лінія -* $c = 0{,}3$*;*
пунктирна лінія - $c = 0{,}5$*;*
точкова лінія - $c = 0{,}7$

нового проекту, а саме, - підприємство має віддавати перевагу обладнанню з більш великим значенням фондовіддачі, тобто новому високоефективному обладнанню. З порівняння (7.46) і (7.49) видно, що фондовіддача більшою мірою позначається на величині чистого прибутку, ніж на вартості ОВФ.

На рис. 7.24 подано часову динаміку обсягу виробництва P, що розрахована за (7.43) і (7.49) для трьох значень собівартості.

Розрахунки виконані для часового інтервалу 120 місяців. Із представлених результатів видно, що ринкові обмеження приводять до істотного вповільнення зростання обсягу виробництва за $t > 48$. Це означає, що в тому випадку, коли горизонт планування T перевищує 48 місяців, продовження реінвестування при $t > 48$ є проблематичним. Питання про оптимальну тривалість реінвестування буде розглянуто нижче.

Основним економічним результатом діяльності підприємства є фонд нагромадження F. Відповідно до прийнятої вище моделі (7.43) – (7.45) поточний чистий прибуток M поділяється на дві частини. Частка ξM витрачається на збільшення ОВФ, а інша частина $(1-\xi)M$ утворює внесок у фонд нагромадження F у поточному місяці. За весь період T (горизонт планування) існування проекту фонд нагромадження складе:

$$F(T) = \int_0^T (1-\xi)M \times dt. \tag{7.51}$$

Із загальних міркувань зрозуміло, що нема рації нарощувати ОВФ протягом всього періоду T. У деякий момент часу t_1 придбання нових ОВФ потрібно припинити, оскільки, у силу обмеженості горизонту планування, нові ОВФ, задіяні пізніше t_1, вже не встигнуть принести належну економічну віддачу. Тому у виразі (7.51) параметр реінвестування ξ має бути такою функцією часу:

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi, & за\ t \in [0; t_1), \\ 0, & за\ t \in [t_1; T). \end{cases} \tag{7.52}$$

Відзначимо, що коли параметр ξ визначений за (7.52), зміна величин A й M, відповідно до рівняння (7.45), припиняється за $t = t_1$, тобто $M(t) = M(t_1)$ за $t > t_1$. Таким чином, з урахуванням виразу (7.52) в (7.51), дістанемо:

$$F(T) = \int_0^{t_1} (1-\xi)M \times dt + M(t_1) \times (T - t_1). \tag{7.53}$$

Інтеграл в (7.53) легко обчислюється з урахуванням рівняння (7.45):

$$\int_0^{t_1} (1-\xi)M \times dt = \frac{1-\xi}{\xi}\left(A(t_1) - A_0\right).$$

Протягом реалізації проекту на придбання нових ОВФ витрачено $A(t_1) - A_0$ власних коштів підприємства. Частина λ цієї вартості може бути повернута. Тоді повний економічний ефект (ПЕЕ) від проекту складе:

$$E(T) = F(T) + \lambda \times (A(t_1) - A_0) =$$

$$= \left(\frac{1-\xi}{\xi} + \lambda \right)\left(A(t_1) - A_0\right) + M(t_1) \times (T - t_1), \qquad (7.54)$$

де λ – коефіцієнт ліквідності. Ліквідність підприємства може бути визначена на підставі аналізу фондового ринку [204 – 206].

На рис. 7.20 показано залежність ПЕЕ від параметра t_1 для коефіцієнта

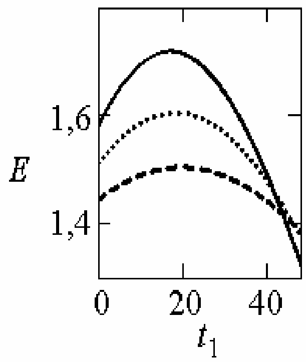


Рис. 7.20. *Залежність ПЕЕ від періоду реінвестування* t_1 *для горизонту планування* $T = 48$ *місяців: суцільна лінія -* $\xi = 0{,}8$*; точкова лінія -* $\xi = 0{,}6$*; пунктирна лінія -* $\xi = 0{,}4$

ліквідності $\lambda = 0{,}5$. Розрахунки проведені для трьох значень параметра реінвестування. Кожна з трьох отриманих кривих має максимум за деякого значення t_1.

Часовий інтервал реінвестування t_1 є “внутрішнім” параметром теорії. ПЕЕ має обчислюватися для значення t_1^*, за якого функція $E(T)$ досягає максимуму. Якщо дорівняти похідну за t_1 від правої частини рівності (7.54) нулю, то одержимо рівняння для визначення t_1^*:

$$T - t_1^* = \frac{1-\lambda}{a_0}\left[\exp\left\{a \times t_1^*\right\} + 1\right], \qquad (7.55)$$

де $a_0 = a / \xi$.

Позначимо $L(t_1) = T - t_1$, $R(t_1) = \dfrac{1-\lambda}{a_0}\left[\exp\{a \times t_1\} + 1\right]$. Точки перетинання ліній L й R, згідно з (7.55), визначають значення параметра t_1^*.

На рис. 7.21 показано графічний розв'язок рівняння (7.55) для параметра ліквідності $\lambda = 0{,}7$ (інші параметри визначені за (7.50)). Пряма $12 - t_1$ не перетинається з лінією R, це означає, що для горизонту планування $T = 12$ (один рік) параметр t_1^* дорівнює 0, тобто, згідно з (7.53), витрачати кошти на реінвестування недоцільно.

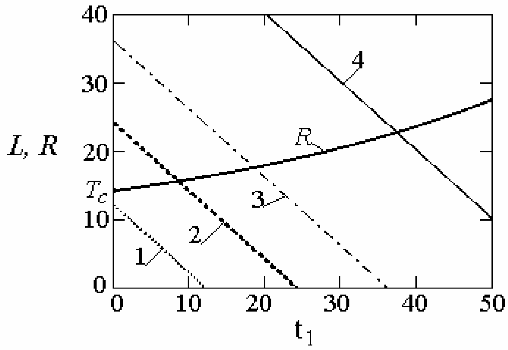


Рис. 7.21. *Залежність* L *і* R *від* t_1*: 1 - пряма* $12 - t_1$*;*
2 - пряма $24 - t_1$*; 3 - пряма* $36 - t_1$*; 4 - пряма* $60 - t_1$

Чисельний розрахунок параметра t_1^* за (7.55) приводить до такого результату: для горизонту планування $T = 24$ $t_1^* = 8{,}534$; для горизонту планування $T = 36$ $t_1^* = 18{,}53$; для горизонту планування $T = 60$ $t_1^* = 37{,}37$. Це означає, що для горизонту планування $T = 24$ витрачати частку ξ чистого прибутку на збільшення вартості ОВФ має сенс не більше, ніж протягом восьми з половиною місяців. Аналогічні висновки мають місце й для інших горизонтів планування. Значення горизонту планування T_c, починаючи з якого параметр t_1^* стає відмінним від нуля, визначається з рівняння (7.55):

$$T_c = \frac{2(1-\lambda)}{a_0}. \qquad (7.56)$$

На рис. 7.22 показано результати розрахунку T_c як функції частки собівартості для трьох значень фондовіддачі f. Розрахунки виконані для інтервалу $0 < c < 0{,}8$. З рис. 7.22 видно, що при зростанні частки собівартості збільшується горизонт планування, для якого нема рації виконувати реінвестування частини прибутку. Це означає, що велика частка собівартості продукції гальмує розвиток підприємства.

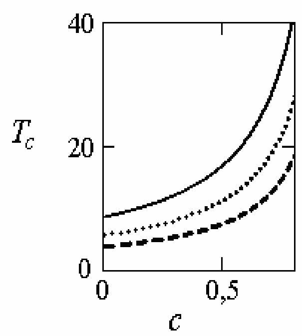


Рис. 7.22. *Залежність* T_c *від частки собівартості: суцільна лінія -* $f = 0{,}08$*; точкова лінія -* $f = 0{,}12$*; пунктирна лінія -* $f = 0{,}18$

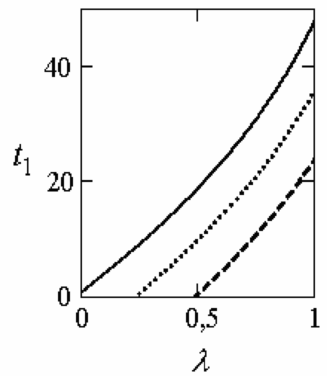


Рис. 7.23. *Залежність часового інтервалу інвестування від коефіцієнта ліквідності: суцільна лінія -* $T = 48$*; точкова лінія -* $T = 36$*; пунктирна лінія -* $T = 24$

На рис. 7.23 подано результати розрахунку часового інтервалу інвестування за (7.55). Видно, що параметр ліквідності істотно впливає на оптимальну тривалість інвестування. Це означає, що виробнича діяльність підприємства має бути організована таким чином, щоб ОВФ могли бути використані в наступному проекті або переведені в грошові фонди підприємства. Сучасна тенденція підприємницької діяльності в розвинених країнах полягає саме в багаторазовому використанні ОВФ у різних проектах.

На рис. 7.24 показано залежність оптимальної тривалості інвестування від горизонту планування. Результати рис. 7.24 дозволяють дати кількісну оцінку цілком зрозумілої тенденції – зі збільшенням горизонту планування час інвестування зростає.

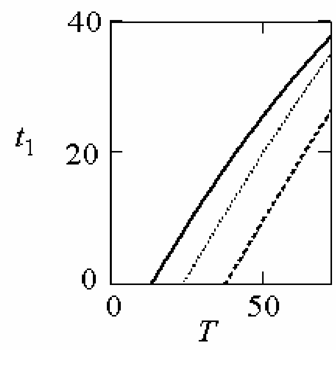


Рис. 7.24. *Залежність часового інтервалу інвестування від горизонту планування: суцільна лінія -* $c = 0{,}3$*; точкова лінія -* $c = 0{,}6$*; пунктирна лінія -* $c = 0{,}75$

Після того, як з'ясовано властивості параметрів t_1 і T_c, можна приступати до розрахунку ПЕЕ за (7.54). Зазначимо, що функція $E(T)$ залежить, крім горизонту планування T, від параметрів c, f, ξ, λ, але не залежить від t_1, оскільки t_1 розраховується за (7.55) і також є функцією параметрів $c, \ f, \ \xi, \ \lambda$. Програма розрахунку $E(T)$ має містити підпрограму розрахунку $t_1 = t_1^*$ за (7.55).

На рис. 7.25 представлено результати розрахунку ПЕЕ для коефіцієнта ліквідності $\lambda = 0{,}5$; інші параметри визначені за (7.50). З результатів, показаних на рис. 7.25, можна зробити висновок, що для горизонтів планування, починаючи з $T = 24$ і вище, реінвестування дає позитивний економічний ефект, при цьому параметр реінвестування має бути максимальним.

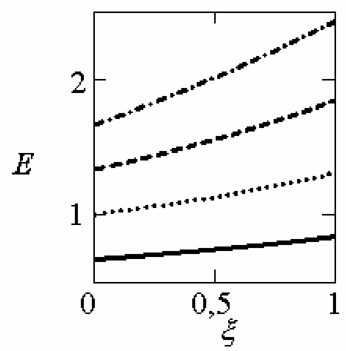


Рис. 7.25. *Залежність економічної ефективності* E *від параметра реінвестування: суцільна лінія - горизонт планування* $T = 24$*; точкова лінія - горизонт планування* $T = 36$*; пунктирна лінія - горизонт планування* $T = 48$*; штрих - пунктирна лінія - горизонт планування* $T = 60$

На рис. 7.26 показано залежність ПЕЕ від частки собівартості c. Розрахунки виконані за тих самих значень параметрів, що й на рис. 7.26. З рис. 7.26 видно, що собівартість продукції має вирішальне значення для економічної ефективності проекту. У ринкових умовах зниження собівартості має бути в центрі уваги підприємців.

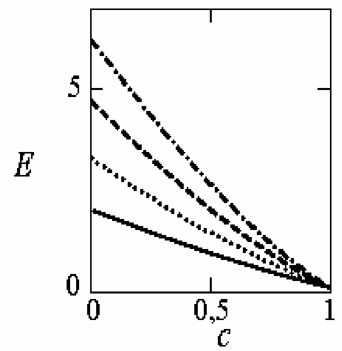


Рис. 7.26. *Залежність економічної ефективності* E *від собівартості: суцільна лінія - горизонт планування* $T = 24$*; точкова лінія - горизонт планування* $T = 36$*; пунктирна лінія - горизонт планування* $T = 48$*; штрих - пунктирна лінія - горизонт планування* $T = 60$

Запропонована методика визначення ВФ підприємства в умовах ринкових обмежень на виробництво продукції дає можливість побудувати новий клас ВФ. Залежність отриманих у роботі ВФ від кількісних характеристик ОВФ узгоджується з законом спадної ефективності. Аналіз діяльності підприємства на основі запропонованої методики приводить до наступних висновків:

– темп зростання ОВФ і чистого прибутку підприємства, що зумовлений реінвестиціями, істотно залежить від собівартості продукції й фондовіддачі;

– оптимальний період часу реінвестування істотно менший за горизонт планування, для малих горизонтів планування інвестиції недоцільні;

– повний економічний ефект від проекту є зростаючою функцією обсягу реінвестицій;

– економічна ефективність і період інвестування суттєво залежать від ліквідності ОВФ;

– для одержання максимального прибутку підприємство має впроваджувати низьковитратні технології для зменшення собівартості продукції.

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає проблема невизначеності інвестиційних проектів?
2. Як визначається економічна ефективність фірми в моделі марковського процесу?
3. Що таке модель однорідного ланцюга Маркова?
4. Що таке матриці ймовірностей переходів?
5. Що таке матриці вартості?
6. Як визначається економічний результат у моделі ланцюга Маркова?
7. У чому полягає оптимізація виробничих потужностей двопродуктового підприємства за наявності ринкових обмежень?

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Розрахувати динаміку доходу фірми в моделі ланцюга Маркова за наступних значень параметрів: $p = 0{,}8$; $d = 0{,}3$; $r_1 = 0{,}25$; $r_2 = 0{,}45$ $r_3 = 0{,}6$.

Задача 2

Виконати оптимізацію виробничих потужностей двопродуктового підприємства за наявності ринкових обмежень.

Вихідні дані: $Q_1 = 2$, $Q_2 = 1{,}75 Q_1$, $f_1 = 1{,}65$, $f_2 = 1{,}45 f_1$, $c_1 = 0{,}35$, $c_2 = 0{,}7 c_1$, $\tau = 0{,}25$.

ЧАСТИНА 4. РЕАЛІЗАЦІЯ ТОВАРІВ І ПОСЛУГ

РОЗДІЛ 8. **МОДЕЛЮВАННЯ РЕКЛАМНОЇ КОМПАНІЇ**

8.1. Моделювання маркетингу в малому бізнесі

У цьому підрозділі обговорюються дві взаємозалежні проблеми, які виникають при економіко-математичному моделюванні підприємницької діяльності. Які економіко-математичні методи й моделі можуть бути використані керівником малої організації у своїй роботі? Якими економіко-математичними моделями можна описувати динаміку малих організацій?

У країнах з розвиненою ринковою економікою в сфері малого бізнесу зайнято близько 3/4 економічно активного населення й виробляється більше 2/3 ВНП. Малий бізнес не тільки створює нові робочі місця на основі самозайнятості населення й підвищує рівень його споживання, але й відтворює конкурентне середовище, необхідну для нормального функціонування й розвитку ринкової економіки й формування її ефективної антимонопольної структури.

Розвиток малого підприємництва необхідний для ефективного функціонування економіки України. Для розуміння особливостей цього розвитку є корисними різноманітні економіко-математичні маркетингові моделі, підходам до побудови й вивченню яких присвячений цей підрозділ. При цьому особливу увагу ми приділили застосуванню методів статистики об'єктів нечислової природи, які є наразі найбільш актуальними при аналізі конкретних економічних даних.

Проблеми маркетингу малого бізнесу

У всіх країнах з розвиненою ринковою економікою нестабільність малого бізнесу багато в чому пов'язана з його великою залежністю від зовнішнього середовища - як від Steep-Факторів (соціальних, технологічних, економічних, екологічних, політичних), так і від факторів конкурентного оточення (у тому числі - від постачальників і споживачів). Для того, щоб вижити й зайняти свою ринкову нішу, малий бізнес повинен добре орієнтуватися й адаптуватися в умовах досить високої невизначеності й ризику. Це означає, що діяльність малого бізнесу споконвічно має ризиковий характер, а тому вимагає прикладного маркетингу.

Для зниження ступеня ризику в сфері малого бізнесу потрібен високий професіоналізм менеджера малої організації у сфері обробки ринкової інформації й швидкість реакції в прийнятті розв'язків при зміні умов зовнішнього середовища, тобто як особа, що ухвалює розв'язки (ЛПР), менеджер малої організації повинен бути одночасно гарним маркетологом.

Маркетинг малого бізнесу має особливості. Для того, щоб мала організація могла вижити й зайняти свою ринкову нішу, її маркетинг із самого початку повинен бути орієнтований не на абстрактне виробництво й збут, а на конкретного споживача з його індивідуальними запитами. Іншими словами, пріоритетною формою маркетингу малого бізнесу є цільовий спеціалізований маркетинг. Він дозволяє сконцентрувати об'єктивно невеликі ресурси малої організації на найбільш важливому напрямі. Однак ціна помилки ЛПР, ціна ухвалення неправильного рішення в малому бізнесі багаторазово зростає, тому що в малої організації, як правило, немає фінансових можливостей диверсифікувати свою діяльність і свій ризик.

Для того, щоб швидко реагувати на зміни зовнішнього середовища, що має значний вплив на малу організацію, її менеджер повинен проводити постійний моніторинг ринкової ситуації за певними найбільш значимими параметрами (попит, пропозиція, ціни, товари-конкуренти, альтернативні технології й ін.). Збір і оперативне використання такої інформації є вирішальним чинником успіху у маркетингу малого бізнесу при прийнятті рішень. Це вимагає певних знань і навичок у менеджера по формуванню банку даних і роботі з маркетинговою інформацією. Найбільш доступними для менеджерів малого бізнесу є економіко-статистичні (у сучасній термінології - економетричні) методи й методи математичного моделювання, що дозволяють (при певній підготовці менеджерів і наявності програмної підтримки) досить швидко обробляти й використовувати оперативну інформацію на основі прикладного застосування економіко-математичних моделей.

Маркетингові моделі для вирішення завдань малого бізнесу

Досить відомими прикладами застосування методів економіко-математичного моделювання в маркетингу для структурування й аналізу ринкової інформації є моделі життєвого циклу товару (фірми), моделі маркетингового комплексу, матриця «Бостон консалтинг груп», Swot-Аналіз, матриця Портера для аналізу конкурентів, матриця визначення проблеми. Усе це - найпростіші інструменти управління маркетингом у малому бізнесі, які дозволяють досить оперативно оцінити місце й конкурентні переваги організацій. Разом з тим, можливості економіко-математичного моделювання дозволяють менеджеру самостійно моделювати свою власну ситуацію й створювати власні інноваційні моделі (або варіанти типових моделей з власними значеннями параметрів) оптимальної поведінки на ринку в умовах невизначеності й ризику. Так, відома серед маркетологів і менеджерів матриця «Бостон консалтинг груп» є, у загальному випадку, не двомірною, а тривимірною моделлю, у якій, поряд із часткою на ринку й темпом зростання продажів, обов'язково повинен розглядатися такий параметр як прибуток організації.

При розробці економіко-математичної підтримки малого бізнесу необхідні також моделі розвитку малого підприємництва, у яких на основі імовірнісних і імітаційних методів проводиться оцінка ризику підприємницької діяльності й нормативні дані зіставляються зі статистичними даними, що характеризують реальне положення в розглянутій галузі економіки.

Методологія математичного моделювання дозволяє ставити й вирішувати різні завдання, що виникають у маркетингу. Зокрема, відзначимо завдання аналізу й прогнозування ринкової ситуації, оцінки різних видів ризиків.

Доцільно розділяти економіко-статистичні (економетричні) методи й економіко-математичне моделювання, хоча такий розподіл і умовний. Прикладом перших (тобто методів прикладної статистики стосовно конкретних економічних даних) є методи вибіркового вивчення споживачів. Так, у 1994 р. у Росії було опитано 500 споживачів і продавців розчинної кави, отримані результати були використані фірмою-замовником при маркетингу, зокрема при плануванні рекламної кампанії. Технологія проведення таких маркетингових досліджень близька до технології соціологічних опитувань, а також має багато спільного зі статистичним управлінням якостю продукції, зокрема з оцінкою якості при сертифікації. Однак аналіз ринкової ситуації на основі цих методів є для підприємців досить громіздким і дорогим. Набагато вигідніше придбати результати вже проведених маркетингових досліджень, виконаних спеціалізованими агентствами або маркетинговими фірмами.

В економіко-математичному моделюванні використовуються моделі, націлені на конкретне застосування. Прикладами таких моделей є економіко-математичні моделі управління запасами, за допомогою яких вдається знаходити оптимальні розміри поставок і процедури їх надходження. Звичайне застосування таких моделей дозволяє принаймні удвічі скоротити сумарні витрати. Набір подібних комп'ютерних моделей повинен бути робочим інструментом менеджера малого підприємства.

При математичному моделюванні маркетингових проблем малого бізнесу використовуються статистичні методи й методи експертних оцінок, а також методи імітаційного моделювання. Сьогодні – у час швидких змін у соціальній, економічній і політичній сферах - відсутні досить довгі часові ряди економічних даних, і інтерес дослідників і практичних працівників перемістився зі статистики часових рядів у сферу теорії й практики експертних оцінок.

Велику роль у маркетингових дослідженнях для малого бізнесу відіграють фактори нечислової природи - якісні ознаки, інтервальні й нечіткі оцінки й ін. У цих термінах природно описувати, наприклад, нові й новітні технології, ноу-хау, товари, що не мають аналогів на ринку, кластер інновацій і т.ін. Активно розвиваються сучасні методи статистичного аналізу нечислових даних. Статистика нечислових даних (в іншій термінології - статистика об'єктів нечислової природи) - новий перспективний розділ прикладної статистики. Він є одним із чотирьох основних розділів, на які фахівці ділять прикладну статистику, поряд зі статистикою випадкових величин, багатомірним статистичним аналізом, статистикою випадкових процесів і часових рядів. Оригінальність і ефективність математичного апарату статистики нечислових даних визначається тим, що він заснований на використанні різних відстаней між результатами спостережень у вибіркових просторах, а не операцій підсумовування, як в інших трьох основних класичних розділах прикладної статистики.

При вивченні підприємницьких ризиків, зокрема, пов'язаних з інвестиційними проектами, необхідно моделювати різні невизначеності майбутнього й сьогодення. Невизначеність описують за допомогою ймовірносно-статистичних, нечітких, зокрема, інтервальних моделей. Ймовірносно-статистичні моделі націлені насамперед на аналіз масових явищ. Невизначеність одиничних подій більш доцільно описувати за допомогою нечітких множин, зокрема, за допомогою інтервальних чисел, що задають нижні й верхні границі для параметрів, які точно невідомі. Хоча давно доведено, що теорія нечітких множин у певному смислі зводиться до теорії випадкових множин, при практичному застосуванні ситуація виглядає інакше. Математичний апарат теорії нечітких множин поки що суттєво відрізняється від ймовірнісно-статистичного інструментарію, а також від апарату статистики інтервальних даних.

При застосуванні математичних моделей досить важливим є дослідження стабільності висновків стосовно припустимих відхилень вихідних даних і передумов моделі. Тільки та модель може бути рекомендована для практичного використання, для якої отримані з її допомогою висновки мало змінюються при подібних відхиленнях.

Перейдемо до більш докладного розгляду запропонованих економіко-математичних моделей, призначених для опису маркетингової діяльності й життєвого циклу організацій малого бізнесу.

Маркетингові моделі прийняття рішень у малому бізнесі

Для структурування й аналізу ринкової інформації можуть бути застосовані різні варіанти таких відомих інструментів організації інформації для прийняття ефективних управлінських рішень, як Swot-Аналіз і матриця «Бостон консалтинг груп». Ці моделі дозволяють ефективно використовувати сучасні методи експертних оцінок, у тому числі засновані на застосуванні статистики нечислових, зокрема інтервальних даних.

В узагальнених моделях Swot-Аналізу всі організації малого бізнесу оцінюються (у кількісних або в якісних шкалах) за чотирма групами показників - сильні й слабкі сторони, погрози й можливості. Часткові показники зводяться в групові, а групові - у підсумковий (узагальнений). Це дає можливість ранжувати і класифікувати конкурентів (наприклад, на досить небезпечних, небезпечних і безпечних). Крім того, вдається відслідковувати й моделювати динаміку показників і підсумкових оцінок господарсько-економічної діяльності підприємств.

В узагальненій матриці «Бостон консалтинг груп» пропонується використовувати тривимірну модель, у якій підприємство описується часткою на ринку, темпом зростання продажів і прибутком. Від якісних значень перерахованих змінних виконується перехід до кількісних, а також будується підсумковий показник і прогностичні правила.

Розглянуті моделі засновані на застосуванні технології побудови одиничних, групових і узагальнених показників (оцінок окремих сторін діяльності фірм-конкурентів і їх економічного становища в цілому). Комп'ютерна підтримка цієї технології може бути здійснена, наприклад, за допомогою АРМ МАТЕК - автоматизованого робочого місця організатора експертного опитування. Скорочена назва МАТЕК утворена з початкових букв повної назви «МАТематичні методи в ЕКспертних оцінках».

8.2. Моделі життєвого циклу малих підприємств

До питань, які розглядаються в заключній частині посібника тісно примикають питання моделювання життєвого циклу малих підприємств. Коротко розглянемо кілька типів економіко-математичних моделей, що описують розвиток малих підприємств і їх сукупностей (популяцій) протягом їх життєвого циклу.

Моделювання потоку проектів, що виконуються малими організаціями

При побудові математичних моделей даного типу вважається, що мале підприємство асоціюється з послідовністю виконуваних ними проектів. Нові малі підприємства породжуються відповідно до пуассонівського процесу змінної інтенсивності (аналогічно потоку заявок у теорії масового обслуговування). Кожне нове мале підприємство виконує спочатку один проект, величина (вартість) і тривалість якого - випадкові величини із заданими (у моделі) розподілами.

Точніше, з урахуванням відомих уявлень про життєвий цикл продукції, економічний ефект (на одиницю часу) від виконання проекту описується (випадкової) функцією від часу (з відліком від моменту початку здійснення проекту). Типовий вид цієї функції такий: спочатку від’ємні значення (спочатку необхідні вкладення), потім - зростання до максимального значення, тривале «плато» на досягнутому рівні, потім - спад до 0 (закінчення проекту) або від'ємної величини (при необхідності утилізації обладнання й т.ін.). Оскільки для здійснення проекту, як правило, необхідний початковий капітал, то в модель створення й роботи малих підприємств необхідно внести нову змінну - (випадкову) величину початкового капіталу, яка, зокрема, обмежує коло проектів, реальних для даного малого підприємства. Можливо й розорення малого підприємства, якщо через які-небудь випадкові (у смислі теорії ймовірностей) причини стартовий капітал виявиться недостатнім для здійснення проекту. Відзначимо, що потоки платежів необхідно оцінювати шляхом приведення до порівнянних цін, а при цьому не обійтися без урахування інфляції, вивчення й прогнозування якої має певні труднощі.

Однак для деяких видів діяльності, наприклад, надання науково-технічних послуг, можна вважати, що економічний ефект (у порівнянних цінах), заданий описаною вище функцією, має простий частковий вид - є східчастою функцією, рівною додатній константі С на відрізку [0, Т] і 0 поза його (тут С и Т - випадкові величини).

Оскільки кожний проект рано або пізно закінчується, мале підприємство, як правило, повинне переходити до здійснення нових проектів ще до закінчення життєвого циклу попереднього проекту. У моделі приймаємо, що кожний проект породжує своїх нащадків - нові проекти - з певною інтенсивністю. З цього погляду мале підприємство - це сукупність проектів, у яку входять: 1) вихідний проект (якщо він ще триває); 2) його безпосередні нащадки; 3) нащадки його нащадків і т.ін. Розвиток малого підприємства полягає у виникненні, виконанні й припиненні проектів, його утворюючих. Якщо всі ці проекти припиняються, то мале підприємство функціонально ліквідується. Аналогом є розвиток популяції прізвищ, який досліджується за допомогою теорії розгалуджених процесів.

Розглянуті моделі дозволяють, зокрема, вивчати динаміку розподілу малих підприємств за розмірами і тривалістю життя, наприклад, оцінювати частку підприємств, що припинили діяльність протягом певного інтервалу часу (наприклад, року) після організації. Можна продемонструвати позитивну роль технопарків як «інкубаторів» малих підприємств, вплив експертизи бізнес-плану й ін. Підтримка проектів на початкових стадіях за умови експертного відсікання малоперспективних проектів суттєво підвищує ймовірність «виживання» і ефективність інших.

Приклад економіко-математичної моделі потоку проектів

Наведений вище опис визначає досить велике сімейство математичних моделей. Розглянемо одну з них.

Нехай процес породження нових підприємств у регіоні описується пуассонівським процесом з постійною інтенсивністю q. Це означає, що за одиницю часу виникає випадкове число X малих підприємств, причому X має пуассонівський розподіл з параметром q. У середньому за одиницю часу виникає q малих підприємств, оскільки математичне очікування X рівно q. Величина q залежить від числа жителів і рівня соціально-економічного розвитку регіону.

Наступний крок - моделювання початкового капіталу й вартості проекту. При цьому у випадку, коли вартість проекту більша від початкового капіталу, то підприємство гине, навіть не приступивши до діяльності. Добре відомо, що в Україні велике число зареєстрованих малих підприємств не проявляє виробничої активності. Проте вони найчастіше продовжують ураховуватися в державній звітності, оскільки їх власники не вважають за потрібне проводити процедуру ліквідації.

Успішність проекту визначається системою рівнянь динаміки.

Модель заняття ніш малими підприємствами

Припустимо, що є скінченний набір ніш, які можуть зайняти організації, що виникають. Відповідно до деякого розподілу ймовірностей породжуються нові організації (тобто вказуються для них ніші). Якщо ніша зайнята, то організація гине. Якщо ні - займає нішу й функціонує якийсь час, після чого припиняє діяльність і звільняє нішу. Діюча організація може захоплювати вільні ніші на тих же підставах, що й організації, які виникають. Неважко одержати розрахункові формули для визначення кількості вільних ніш і ймовірності того, що ніша зайнята, а також для інших характеристик, що описують розвиток популяції малих організацій на основі постійного пошуку й захоплення нових ринкових ніш.

Модель вибору ніші менеджером малого підприємства

Для опису поведінки малої організації пропонується використовувати модель вибору ніші на основі теорії прийняття рішень з використанням дерева цілей. Розглядаючи вибір на кожному етапі як випадкову величину, одержуємо можливість розрахунків розподілу малих організацій за варіантами остаточних розв'язків. А це породжує ітераційний процес перегляду рішень, оскільки знання підсумкового розподілу тягне перегляд деяких з раніше ухвалених рішень, наприклад, про кількість можливих конкурентів. Модель доцільно реалізувати у вигляді імітаційної комп'ютерної системи, придатної також для індивідуального навчання й проведення ділових ігор.

Висновок. Економіко-математичне моделювання має широкі перспективи практичного застосування в маркетингу малого бізнесу. Спільна робота економістів, математиків і менеджерів малого бізнесу, які практикують, принесе користь як теорії, так і практиці.

8.3. Оптимізація рекламної компанії

Постановка проблеми

Для успішної конкуренції на споживчих ринках підприємство повинно приділяти велику увагу рекламній компанії. При цьому виникає проблема оптимізації рекламної компанії. Менеджери фірми, яка починає рекламувати новий товар або послугу, повинні визначитися з оптимальними витратами на рекламну компанію й оптимальними термінами проведення рекламної компанії. Критерієм оптимальності в цьому випадку є одержання максимального прибутку від проекту з урахуванням видатків на рекламну компанію. У даному підрозділі ми використовуємо загальновідому модель рекламної компанії [3].

Метою підрозділу є розробка методики визначення оптимальних термінів проведення рекламної компанії, які забезпечують максимальний загальний прибуток від проекту.

Ми розглядаємо модель рекламної компанії, яка ґрунтується на таких основних гіпотезах. Розглядається величина dN/dt – швидкість зміни в часі кількості споживачів, які дізналися про товар і мають намір і кошти купити його (t – час, що минув з початку рекламної кампанії), $N(t)$ – кількість уже поінформованих клієнтів. Вважається, що dN/dt пропорційна кількості покупців, які ще не знають про цей товар (послуги), тобто величині

$$\alpha_1(t)\left(N_0 - N(t)\right),$$

де N_0 – загальна кількість потенційних платоспроможних покупців, $\alpha_1(t)$ – характеризує інтенсивність рекламної кампанії (що фактично визначається витратами на рекламу на сьогодні). Припускається також, що ті, хто дізнався про товар, так чи інакше поширюють отриману інформацію серед необізнаних, виступаючи в ролі додаткових рекламних «агентів» фірми. Їхній внесок дорівнює величині

$$\alpha_2(t)\cdot N(t)\cdot\left(N_0 - N(t)\right),$$

де величина $\alpha_2(t)$ – характеризує ступінь спілкування покупців між собою (вона може бути встановлена опитуванням). Цей вклад буде тим більшим, чим більша кількість обізнаних покупців. Величині $\alpha_1(t)$ $\alpha_2(t)$ додатні.

У результаті динаміка кількість поінформованих клієнтів $N(t)$ (споживачів товару) визначається рівнянням:

$$\frac{dN}{dt} = \left[\alpha_1 + \alpha_2(t)\cdot N(t)\right]\cdot\left(N_0 - N(t)\right). \tag{8.1}$$

Строки рекламної компанії й витрати на рекламу повинні бути пов'язані із загальним прибутком фірми й з горизонтом планування (T). Насамперед зауважимо, що рівняння (8.1) має аналітичний розв'язок

$$N(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\exp\left[(\alpha_1 + \alpha_2 N_0)t\right] - 1}{1 + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2 N_0}\exp\left[(\alpha_1 + \alpha_2 N_0)t\right]}. \tag{8.2}$$

Розрахунки будемо виконувати за наступних значень параметрів у формулі (8.2). Потенційна кількість клієнтів $N_0 = 1000$, інтенсивність рекламної компанії $\alpha_1 = 0{,}005$.

З'ясуємо вплив параметра α_2 на динаміку кількості проінформованих клієнтів $N(t)$. На рис. 8.1 показано результати розрахунків $N(t)$ за різних α_2 для горизонту планування $T = 24$.

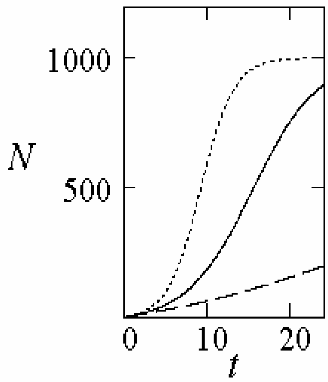


Рис. 8.1. *Динаміку кількості проінформованих клієнтів* $N(t)$: *точкова лінія* - $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-4}$; *суцільна* - $\alpha_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$; *пунктирна* - $\alpha_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

З рис. 8.1 видно істотну роль параметра α_2. Це означає, що менеджери фірми мають заохочувати своїх клієнтів до поширення інформації про товар.

Позначимо через p величину прибутку від одиничного продажу. Тоді поточний прибуток дорівнює:

$$P(t) = p\frac{dN}{dt}.$$

На рис. 8.2 показано динаміку поточного прибутку при різних значеннях α_2.

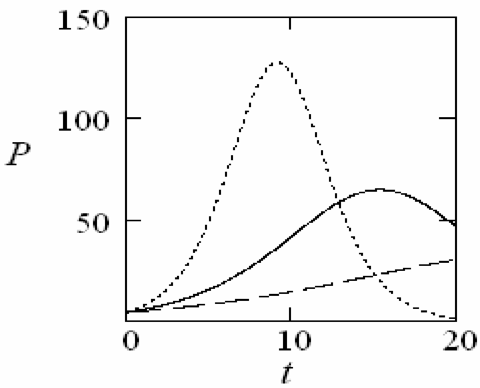


Рис. 8.2. *Динаміка поточного прибутку; відповідність ліній і значень* α_2 *та сама, що й на рис. 8.1*

З рис. 8.2 видно, що рекламна компанія повинна мати скінченний термін, оскільки її ефективність з часом зменшується. Термін рекламної компанії визначається рівністю:

$$S(t_r) = P(t_r),$$

де $S(t)$ - поточна вартість рекламної компанії.

Оптимізація витрат на рекламу туристичної фірми з урахуванням сезонності

Зрозуміло, що прибуток туристичної фірми залежить від сезону й від витрат на рекламу. Розглянемо наступну модель прибутку F туристичної фірми за чотири квартали ($i = \overline{1,4}$) поточного року:

$$F = \sum_{i=1}^{4} (P_i - C_i), \tag{8.3}$$

$$P_i = x_i(Ц - B), \tag{8.4}$$

$$C_i = L_i + R_i + Z_i, \tag{8.5}$$

$$Z_i = 0{,}15 \cdot Q_i, \tag{8.6}$$

$$Q_i = x_i Ц, \tag{8.7}$$

$$x_i = 35 \cdot k_i \sqrt{R_i + 3000}, \tag{8.8}$$

де P_i – валовий прибуток в i-ому кварталі;

C_i – сумарні витрати в i-ому кварталі;

x_i – кількість реалізованих путівок в i-ому кварталі;

$Ц$ – середня ціна однієї путівки;

B – витрати на обслуговування однієї путівки;

Q_i – дохід від реалізації путівок в i-ому кварталі;

L_i – оплата персоналу фірми;

R_i – витрати на рекламу в i-ому кварталі;

Z_i – непрямі витрати в i-ому кварталі;

k_i – коефіцієнт сезонності для i-го кварталу.

Формула (8.8) отримана емпірично.

Будемо розглядати п'ять варіантів сезонності ($j = \overline{1,5}$). Коефіцієнти сезонності для чотирьох кварталів визначаються співвідношеннями:

$$k_1^{(j)} = k_4^{(j)} = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot j, \qquad k_2^{(j)} = k_3^{(j)} = 2{,}2 - k_1^{(j)}. \tag{8.9}$$

Наприклад, для першого варіанта сезонності з (8.9) одержуємо:

$$k_1^{(1)} = k_4^{(1)} = 0{,}6, \qquad k_2^{(1)} = k_3^{(1)} = 1{,}6. \tag{8.10}$$

У стандартній комплектації пакет програм Excel містить файл SOLVSAMP, у якому модель (8.3) – (8.8) представлена у вигляді електронної таблиці. За допомогою цієї таблиці зручно виконувати оптимізацію видатків на рекламу за допомогою програми «Пошук розв'язку». У файлі SOLVSAMP докладно описаний алгоритм застосування програми «Пошук розв'язку». Будемо використовувати дані, наведені у файлі SOLVSAMP. Вважаємо, що ціни виражені в умовних грошових одиницях. Позначення умовної грошової одиниці – р. (1 р.=10 грн.).

Вирішуємо наступне завдання. Визначити витрати на рекламу в кожному кварталі так, щоб прибуток туристичної фірми був максимальний ($F \to \max$). Використовуємо перший варіант сезонності (8.10). Застосування програми «Пошук розв'язку» дає результат представлений в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Визначення оптимальних витрат на рекламу туристичної фірми

	A	B	C	D	E	F
2	Квартал	1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.	Усього
3	Коефіцієнти сезонності	0,6	1,6	1,6	0,6	
4						
5	Кількість продажів	1 984	14 112	14 112	1 984	32 193
6	Виторг від реалізації	79 380р.	564 480р.	564 480р.	79 380р.	1 287720р.
7	Витрати на обслуговування	49 612	352 800	352 800	49 612	804 825
8	Валовий прибуток	29 767	211 680	211 680	29 767	482 895
9						
10	Оплата персоналу фірми	8 000	8 000	9 000	9 000	34 000
11	Реклама	5 930	60 504	60 504	5 930	132 868
12	Непрямі витрати	11 907	84 672	84 672	11 907	193 158
13	Сумарні витрати	25 837	153 176	154 176	26 837	360 026
14						
15	Прибуток	3 930р.	58 504р.	57 504р.	2 930р.	122 868р.
16	Норма прибутку	5%	10%	10%	4%	10%
18	Ціна путівки	40р.				
19	Витрати на обслуговування однієї путівки	25р.				

Розв’язок задачі дає наступний результат: 1) оптимальні витрати на рекламу:

у першому кварталі – 5 930*10 = 59,3 тис. грн.,

у другому кварталі – 60 504*10 = 605,04 тис. грн.,

у третьому кварталі – 605,04 тис. грн.,

у четвертому кварталі – 59,3 тис. грн.;

2) внаслідок цих витрат на рекламу буде отримано максимальний прибуток, який складе F = 122 868*10 $\approx$ 1,229 млн. грн.

Аналогічні результати можуть бути отримані й для інших варіантів сезонності. Порівняння отриманих результатів дає можливість зробити висновки про вплив сезонності й видатків на рекламу на загальний прибуток фірми. Такий аналіз пропонується виконати в задачі № 2 самостійно.

Питання для самоконтролю

1. Які особливості має моделювання маркетингу?
2. Які маркетингові моделі прийняття рішень у малому бізнесі ви знаєте?
3. Які ви знаєте моделі життєвого циклу малих підприємств?
4. Що таке модель заняття ніш малими підприємствами?
5. Сформулюйте основні принципи оптимізації рекламної компанії.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

Видатки на рекламу становлять $S = 2t$. Знайти оптимальний термін рекламної компанії. Вихідні дані: потенційна кількість клієнтів $N_0 = 1000$, інтенсивність рекламної компанії $\alpha_1 = 0{,}005$, ступінь спілкування покупців $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

Задача 2

Використовуючи дані з табл. 8.1, визначити оптимальні витрати на рекламу туристичної фірми в кожному кварталі для п'яти варіантів сезонності (8.9). Звіт про розрахунки представити у вигляді таблиці:

Варіант сезонності, *j*	**Витрати на рекламу**				**Прибуток, *F***
	1 квартал	**2 квартал**	**3 квартал**	**4 квартал**	
1	*	*	*	*	*
…	…	…	…	…	…
5	*	*	*	*	*

Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

РОЗДІЛ 9. **ЗАДАЧІ РЕАЛІЗАЦІЇ ТОВАРІВ**

9.1. Математичний аналіз попиту й споживання

При моделюванні підприємницької діяльності важливим класом економетричних функцій є функції споживання й попиту. Функції споживання відображають кінцеві результати використання різних споживчих благ. Регресійні параметричні моделі споживання часто називають «цільовими функціями споживання» і використовують у якості глобальних критеріїв оптимальності в екстремальних завданнях. Функції споживання називають також функціями рівня життя, функціями добробуту, функціями суспільної корисності й т.ін. ***Функція споживання*** характеризує спільне споживання деякого набору благ і визначає рівень споживання.

У просторі благ кожній функції споживання відповідає деяке сімейство непересічних поверхонь байдужості, відповідно до певних рівнів споживання набору благ. Рівень споживання зручно виражати в одиницях вартості витрат на придбання благ. Співвідношення граничних корисностей благ, узяте зі зворотним знаком, у теорії функцій споживання зветься ***нормою еквівалентного заміщення благ.***

Функції споживання можуть бути перетворені у функції купівельного попиту. При цьому передбачається, що споживач максимізує споживання в рамках свого доходу з урахуванням ціни кожного блага. Функції попиту можуть охоплювати всю сферу споживання (макроекономічні функції) і відображати індивідуальний попит (мікроекономічні функції). При аналізі функцій попиту важливе значення має визначення еластичності факторів, особливо еластичності щодо доходу й цін.

Еластичність по доходу являє собою процентне значення збільшення (зменшення) попиту на блага (товар) при збільшенні (зменшенні) доходу на один відсоток.

Благо або товар називають ***благом (товаром) з нееластичним попитом по доходу,*** якщо ця еластичність менша +1, і з еластичним попитом по доходу, якщо вона більша +1. Предмети розкоші є благами з еластичним попитом по доходу. Нееластичний з ненегативною еластичністю попит характеризує предмети першої необхідності. Негативна еластичність по доходу властива другорядним (малоцінним) благам.

Еластичність попиту за ціною є аналогічним заходом чутливості попиту на зміну ціни. Розрізняють *прямі* й *перехресні* еластичності за ціною. У першому випадку виміряється зміна попиту на благо при зміні на 1% його ж ціни, у другому – при зміні також на 1% ціни іншого блага. Еластичний попит за ціною спостерігається, якщо еластичність за ціною менша -1. Якщо еластичність більша -1, попит за ціною нееластичний. При рівності еластичності за ціною -1 має місце *нормальний* попит за ціною.

Нарешті, важливе значення при аналізі має розрахунок ***часткової еластичності заміни*** одного блага іншим. Якщо ця еластичність від'ємна, то блага є *доповнюючими,* якщо дорівнює нулю – *незалежними,* якщо додатна – *конкуруючими.*

Алгоритм і особливості аналізу розглянемо на прикладі дослідження функції споживання.

Приклад. При розробці плану замовлення путівок для оздоровчих заходів колективом фірми проведені дослідження потреб співробітників фірми в путівках по туристичних маршрутах (q_1) і путівках санаторно-курортного лікування (q_2). У результаті регресійного аналізу отримана наступна залежність коштів, внесених співробітниками за путівки, від кількості путівок зазначених видів:

$$U(q_1, q_2) = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2. \qquad (9.1)$$

Визначити, чи може ця залежність слугувати цільовою функцією споживання, і якщо так, побудувати карти байдужості й споживання, виконати імітаційні розрахунки варіантів споживання путівок.

Розв'язок.

1) Перевіряється функція $U(q_{1,}q_2)$ на опуклість.

Для цього знаходять значення другого повного диференціала функції. Перший повний диференціал цієї функції:

$$dU = (\partial U/\partial q_1)dq_1 + (\partial U/\partial q_2)dq_2 = (90 - 2q_1)dq_1 + (50 - 2q_2)dq_2.$$

Тоді другий повний диференціал:

$$d^2U = (\partial^2 U\big/\partial q_1^2)dq_1^2 + (\partial^2 U\big/\partial q_1 \partial q_2)dq_1 dq_2 + (\partial^2 U\big/\partial q_2 \partial q_1)dq_2 dq_1 +$$
$$+ (\partial^2 U\big/\partial q_2^2)dq_2^2 = -2dq_1^2 - 2dq_2^2.$$

Тому що dq_1 й dq_2 додатні при всіх значеннях q_1 і q_2, то $d^2U < 0$, *а* отже, $U(q_1, q_2)$ опукла до осей і може служити цільовою функцією споживання.

2) Будується карта байдужості для заданої функції.

Криві байдужості є лініями рівного рівня витрат $U(q_1, q_2)$. Для побудови кривих байдужості слід виразити одне з благ через інше й рівень витрат, величина якого приймається за константу. Наприклад, формула для виразу q_2 має вигляд:

$$q_2 = 25 \pm \sqrt{625 - q_1^2 + 90q_1 - U(q_1, q_2)}$$

Зауваження. Даний вираз для q_2 можна одержати, розв'язавши квадратне рівняння (9.1) відносно q_2.

Підставляючи різні значення q_1 при сталих значеннях $U(q_1, q_2)$, можна одержати розрахункові точки й побудувати за ними криві байдужності.

У нашому випадку функція *U(q,,q₂)* являє собою рівняння кола:

$$U(q_1, q_2) = 90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$$

$$q_1^2 - 90q_1 + q_2^2 - 50q_2 = -U(q_1, q_2)$$

$$q_1^2 - 2 \cdot 45q_1 + 45^2 + q_2^2 - 2 \cdot 25q_2 + 25^2 = 2025 + 625 - U(q_1, q_2)$$

$$(q_1 - 45)^2 + (q_2 - 25)^2 = 2650 - U(q_1, q_2)$$

Центр кола в точці (9.165, 25), радіус $R = \sqrt{2650 - U(q_1, q_2)}$. Знайдемо криві байдужності для рівнів споживання $U(q_1, q_2)$, що дорівнюють 650, 1000, 1800 і 2000. Радіуси кіл, що визначають криві споживання, відповідно рівні: 44,7; 40,6; 29,2; 25,5.

Тому що величини q_1 й q_2 додатні, дуги кривих розташовані тільки в першому квадранті системи координат.

Для побудови карти переваг визначаються вирази для еквівалентної норми заміщення благ. Вона може бути знайдена за допомогою рівняння дотичної до кривих байдужості:

$$\gamma = \frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial U / \partial q_1}{\partial U / \partial q_2} = -\frac{50 - 2q_1}{90 - 2q_2} = -\frac{25 - q_2}{45 - q_1}$$

Рівняння нормалі до цієї дотичної знайдемо як:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\partial U / \partial q_1}{\partial U / \partial q_2} = \frac{45 - q_1}{25 - q_2} \text{ або } \frac{dq_1}{45 - q_1} = \frac{dq_2}{25 - q_2} = c.$$

Перебудовуючи останній вираз, одержимо: $(q_2 - 25) = c(q_1 - 45)$, тобто сімейство прямих, що сходяться в точці (9.165, 25), нахил яких визначається кутовим коефіцієнтом c.

Побудуємо карту переваг для значень c, що дорівнюють 0,11; 0,6; 1,0; 5,0. Щоб побудувати кожну пряму карти переваги, достатньо, крім відомої точки перетинання всіх прямих (9.165, 25), знайти ще одну точку. Це легко зробити, якщо підставляти в рівняння $(q_2 - 25) = c(q_1 - 45)$, наприклад, нульові значення q_1, або q_2.

Для $c = 0{,}11$ при $q_1 = 0$ одержимо $q_2 = 20{,}5$. Аналогічно можна знайти інші точки, що визначають лінії (прямі) переваги. Карти переваги зображаємо графічно.

Напрями кривих переваги до центру окружності вказують напрями найбільшої зміни потреби в розглянутій сукупності благ. Відповідно до заданої функції споживання максимальний рівень придбання путівок складе $q_1 = 45$ й $q_2 = 25$ штук.

3) Проводяться імітаційні розрахунки за функцією споживання.

Припустимо, що в базовому періоді у фірмі використовувалися 20 туристичних путівок і 10 путівок на курорти й у санаторії. Еквівалентна норма заміщення путівок різного типу становила 0,6, а видатки на придбання путівок становили 1800 грн. У плановому періоді передбачається, що видатки на придбання путівок збільшаться до 2000 грн.

Розрахувати, скільки путівок буде придбано, якщо еквівалентна норма заміщення путівок не зміниться. Розглянути, яким чином зміниться гранична еквівалентна норма заміщення, якщо пропозиція путівок санаторно-курортного лікування а) залишиться на базовому рівні; б) зросте до 15 штук; в) зросте до 20 штук.

При незмінній нормі, яка є еквівалентною нормі заміщення в плановому періоді, знайдемо значення q_1 й q_2, розв'язуючи систему рівнянь для функцій споживання й переваги:

$$q_2 - 25 = 0{,}6(q_1 - 45),$$

$$90q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2 = 2000.$$

При підстановці q_2 вираженого з першого рівняння, одержуємо два корені $q_1 = 23.14$ й $q_2 = 11{,}883$. Другий корінь необхідно відкинути як нереальний. Таким чином, значення q_2 приблизно становить 11-12 штук. Отже, при незмінній еквівалентній нормі замішення, при збільшенні видатку на путівки до 2000 грн., тобто на (2000/1800 – 1)*100% = 11,1%, кількість туристичних путівок збільшиться на 4 штуки, або на 20%, а число путівок санаторно-курортного лікування – на 2 шт., тобто приблизно на 24%. Таким чином, при визначенні пропозиції путівок санаторно-курортного типу в плановому періоді будемо мати:

- ***для варіанта а)*** коли пропозиція залишається на рівні базового періоду, з рівняння $2000 = 90q_1 - q_1^2 + 50 \cdot 10 - 10^2$ знаходимо кількість туристичних путівок. Вона буде становити приблизно 24-25 штук, а гранична норма заміщення визначиться зі співвідношення:

$$\gamma = -(25-10)/(45-24) = -0{,}73;$$

- ***для варіанта б)*** кількість туристичних путівок буде приблизно становити 21-22 штуки, а $\gamma = -0{,}42$;
- ***для варіанта в)*** $q_1 = 20$ і $\gamma = -0{,}2$. Результати аналізу говорять про те, що зі зростанням пропозиції путівок санаторно-курортного лікування кількість туристичних путівок трішки знижується, а еквівалентна норма заміщення цих благ різко диференціюється.

4) Будуються функції попиту з функцій споживання.

Якщо є цільова функція споживання, відомий дохід (бюджет) покупців і ціни благ, то можна одержати й функції попиту, виходячи з гіпотези, що споживач витрачає весь свій бюджет на придбання розглянутого набору благ.

Припустимо, що середня вартість туристичної путівки становить p_1= 50 грн., путівки санаторно-курортного лікування – p_2= 130 грн. Встановлено також, що на придбання путівок на рік фірма може виділити а) 10 000 грн. і б) 100 000 грн.

Знайти функцію попиту для цільової функції споживання путівок на підприємстві в цілому й визначити оптимальний попит на путівки для варіантів а) і б).

Розподіл коштів на придбання путівок, очевидно, здійснюється відповідно до виразу:

$$Z = p_1 q_1 + p_2 q_2,$$

де Z – затрачувані кошти (дохід споживачів).

Щоб знайти найбільшу величину рівня споживання за цільовою функцією споживання при такому розподілі доходу, потрібно прирівняти до нуля повний диференціал функції споживання:

$$dU = (90 - 2q_1)dq_1 + (50 - 2q_2)dq_2 = 0$$

при приростах, що задовольняють умові:

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 = 0.$$

З цих рівнянь одержуємо: $q_2 - 25 = (p_2 / p_1)(q_1 - 45)$. Отримане рівняння являє собою рівняння прямої лінії переваги з нахилом:

$$\gamma = (p_2 / p_1).$$

Це рівняння розв'язується разом з рівнянням розподілу коштів на путівки, звідки утворюються *рівняння попиту:*

$$q_2 - 25 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)(q_1 - 45);$$

$$q_2 p_2 - 25 p_2 = \frac{p_2^2 (q_1 - 45)}{p_1};$$

$$q_2 p_1 p_2 - 25 p_1 p_2 = p_2{}^2 q_1 - 45 p_2{}^2;$$

Тому що $q_1 = (Z - p_1 q_1)/p_2$, то:

$$p_1(Z - p_1 q_1) - 25 p_1 p_2 = p_2{}^2 q_1 - 45 p_2{}^2;$$

$$p_1 Z - p_1{}^2 q_1 - 25 p_1 p_2 = p_2{}^2 q_1 - 45 p_2{}^2;$$

$$p_1 Z - 25 p_1 p_2 + 45 p_2{}^2 = \left(p_1{}^2 + p_2{}^2\right)/q_1;$$

у такий спосіб:

$$q_1 = \left(p_1 Z - 25 p_1 p_2 + 45 p_2{}^2\right) / \left(p_1{}^2 + p_2{}^2\right). \quad (9.2)$$

Аналогічно знаходимо q_2:

$$q_2 = \left(p_2 Z - 25 p_1 p_2 + 45 p_1{}^2\right) / \left(p_1{}^2 + p_2{}^2\right). \quad (9.3)$$

Тоді оптимальний попит на путівки:

• для варіанта а):

$$q_1 = \left(50 \cdot 10000 - 25 \cdot 50 \cdot 130 + 45 \cdot 130^2\right) / \left(50^2 + 130^2\right) = 56{,}6 \approx 57\,шт.$$

$$q_2 = \left(130 \cdot 10000 - 45 \cdot 50 \cdot 130 + 25 \cdot 50^2\right) / \left(50^2 + 130^2\right) = 55{,}22 \approx 55\,шт.$$

• для варіанта б):

$$q_1 = \left(50 \cdot 100000 - 25 \cdot 50 \cdot 130 + 45 \cdot 130^2\right) / \left(50^2 + 130^2\right) = 228{,}6 \approx 289\,шт.$$

$$q_2 = \left(130 \cdot 100000 - 45 \cdot 50 \cdot 130 + 25 \cdot 502\right) / \left(50^2 + 130^2\right) = 668{,}2 \approx 668\,шт.$$

5) Проводиться аналіз функцій попиту.

Щоб визначити характер розглянутих благ (путівок), необхідно розрахувати еластичності їх попиту за доходом й за ціною, а також часткові еластичності заміни.

Еластичність попиту за доходом визначається за формулою:

$$E_i = \frac{\partial q_i}{\partial Z} : \frac{q_i}{Z}. \tag{9.4}$$

Еластичність попиту за ціною визначається за формулою:

$$E_{pij} = \frac{\partial q_i}{\partial p_j} : \frac{q_i}{p_j}. \tag{9.5}$$

Часткові еластичності заміни визначаються за формулою:

$$S_{ij} = \frac{E_{pj}}{k_j} - E_i, \tag{9.6}$$

де k – частка сумарного доходу, витраченого на благо q, величина якого визначається за формулою:

$$k_j = \frac{q_j p_j}{Z}.$$

При $i = j$ маємо *пряму еластичність за ціною,* при $i \neq j$ – *перехресну еластичність.*

Зауваження. При розрахунках еластичностей використовувати у формулах (9.4) – (9.6) вирази (9.2) і (9.3) для q_1 й q_2.

Для варіанта а) еластичність по попиту на блага першого виду буде дорівнювати 0,45, на блага другого виду – 1,21; еластичності для варіанта б) по першому благові – 0,89; по другому – 1,02.

Відповідно еластичності за ціною будуть дорівнювати:

- для варіанта а) E_{11}= 0,06; E_{22}= - 0,8; E_{12}= - 0,5; E_{21}= -0,41;
- для варіанта б) E_{11}= 0,61; E_{22} = - 0,76; E_{12}= - 1,5; E_{21} = -0,26.

Часткові еластичності заміни:

- для варіанта а) S_{12} = - 1,15; S_{21}= - 2,65;
- для варіанта б) S_{12}= - 2,64 S_{21} = - 2,82.

На основі вивчення величин еластичностей за доходом можна зробити висновок, що путівки туристичного виду є нееластичними за доходом й становлять для розглянутих варіантів необхідні блага. Путівки санаторно-курортного лікування еластичні за доходом і, отже, мають характер предмета відносної розкоші. Обидва види благ для варіанта а) не є еластичними за ціною. Еластичними за перехресною ціною є лише туристичні путівки по другому варіанту, тому що всі часткові еластичності заміни від'ємні. Отже, можна стверджувати, що туристичні путівки й путівки санаторно-курортного лікування є неконкуруючими взаємодоповнюючими благами.

9.2. Оптимізація виробництва і розподілу товарів по ринках збуту

Задача оптимального виробництва товарів

Нехай x_1, x_2, ..., x_n – обсяги випуску різних товарів фірмою, а p_1, p_2, ..., p_n – відповідно їхні ціни (всі p_i – сталі величини).

Нехай витрати виробництва цих товарів задаються функцією витрат $C = C(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тоді *функція прибутку* має вигляд:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n - C(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (9.7)$$

Максимум прибутку природно шукати як локальний екстремум функції багатьох змінних $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ (за відсутності інших обмежень).

Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму $\frac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, які приводять до системи алгебричних рівнянь відносно змінних x_1: $p_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1,n}$ тобто:

$$p_i = \frac{\partial C}{\partial x_i}, \; i = \overline{1,n} \qquad (9.8)$$

Ця система реалізує відоме ***правило економіки***: *гранична ціна товару дорівнює граничним витратам на виробництво цього товару*.

Розв'язком системи (9.8) є набори значень (x_1^*; x_2^*, ...; x_n^*).

Слід зазначити, що сам процес пошуку розв'язку системи рівнянь (9.8) залежить від вигляду функції витрат і може бути достатньо складним.

Для знайдених наборів значень (x_1^*; x_2^*, ...; x_n^*) потрібно перевірити достатні умови локального екстремуму. Для цього запишемо визначник (гессіан) для функції прибутку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 P}{\partial_1^2} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 P}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 P}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

У задачі, що розглядається, це буде визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_1} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n \partial x_1} & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & -\frac{\partial^2 C}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо знаки головних мінорів цього визначника чергуються, починаючи зі знака «-», то розв'язок системи (x_1^*; x_2^*, ...; x_n^*), що переміряється, є n-вимірною точкою локального максимуму функції прибутку (9.7).

Виберемо серед цих точок локального максимуму ту, в якій функція набуває найбільшого значення. Добуті таким чином значення (x_1^*; x_2^*, ...; x_n^*) визначають набір обсягів товарів x_1, які потрібні, аби за даної функції витрат на їх виробництво в спектрі цін, що склалися, забезпечити максимальний прибуток.

Приклад. Фірма випускає два види товарів з обсягами x і y. Ціни на ці товари становлять відповідно $p_x = 8$, $p_y = 10$ умов. грош. од., а функція витрат $C(x, y) = x^2 + \frac{1}{2} gxy + y^2$, де $g = 2$. Скласти виробничу програму за якої фірма отримає максимальний прибуток; обчислити цей прибуток.

Розв'язок. Функція прибутку фірми є:

$$P(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Використовуємо необхідні умови локального екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y. \end{cases}$$

Розв'язком системи є критична точка $M(2;4)$. Перевіримо достатні умови локального екстремуму. Знайдемо значення частинних похідних другого порядку в точці $M(2;4)$:

$$A = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -2, \quad B = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = -1, \quad C = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -2.$$

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0, \quad A = -2 < 0.$$

Отже, $M(2;4)$ - точка локального максимуму. Максимальний прибуток, який отримає цех №3, $P_{\max} = P(2;4) = 28$.

Задачі реалізації товарів

Розглянемо криву попиту деякого товару у вигляді $p = f(q)$ (рис. 9.1). Якщо p – ціна одиниці товару, то загальна сума витрат на придбання товару обсягом q становить pq.

На рис. 9.1 через p_0 позначено рівноважну ціну, а через q_0 – обсяг товару, який реалізується за ціною p_0. Точка рівноваги – це точка A перетину кривих попиту й пропозиції.

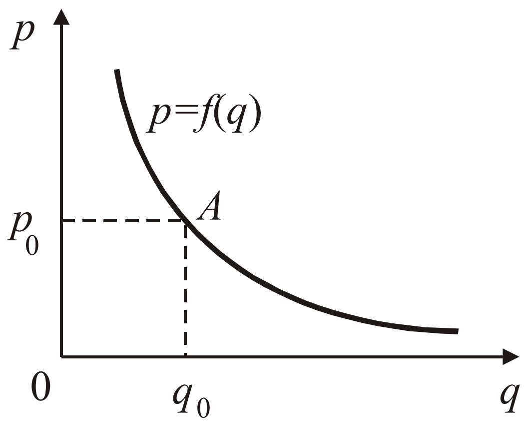


Рис. 9.1

Припустимо, що товар обсягом q_0 не відразу весь потрапляє на ринок, а надходить невеликими партіями, рівними Δq. Це поширена тактика реалізації товару. Мета продавця зрозуміла: підтримувати ціну товару, вищу за рівноважну. Після надходження першої партії товару його обсяг на ринку становить $q_1 = \Delta q$. Ціна, що відповідає цьому обсягові, знаходиться з кривої попиту й становить $p_1 = f(q_1)$.

Якщо величина Δq мала, то можна вважати, що вся партія реалізується за ціною p_1, а витрати споживача на цю партію товару становлять $q_1 \Delta q$.

Після надходження на ринок другої партії товару обсягом Δq загальний обсяг його на ринку становить $q_2 = q_1 + \Delta q = 2\Delta q$, а відповідна ціна також визначається з кривої попиту й становить $p_2 = f(q_2)$.

Можна вважати, що друга партія товару обсягом Δq реалізується за ціною p_2, а витрати споживача на цю партію товару становлять $p_2 \Delta q$.

Цей процес триває доти, доки дістанемо $q_n = q_0 = n\Delta q$. Для того, щоб потрапити в точку $q_0 = n\Delta q$, потрібно вибрати $\Delta q = q_0 / n$.

Товар останньої n-і партії реалізується за ціною $p_n = f(q_n) = f(q_0) = p_0$, тобто за рівноважною. Витрати споживачів на цю партію становлять $p_n \Delta q = p_0 \Delta q$.

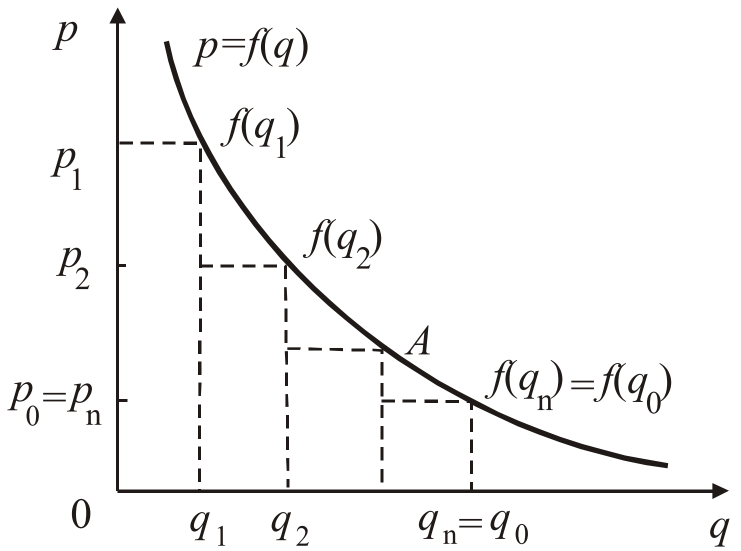


Рис. 9.2

Загальні витрати споживачів на загальний обсяг товару q_0:

$$p_1\Delta q + p_2\Delta q + ... + p_n\Delta q = p_1(q_1)\Delta q + p_2(q_2)\Delta q + p_n(q_n)\Delta q = \sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q$$

З рис. 9.2 видно, що загальні витрати споживачів дорівнюють сумі площ прямокутників, яка, у свою чергу, наближено дорівнює визначеному інтегралу:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(q_k)\Delta q \approx \int_0^{q_0} f(q)dq\,. \tag{9.9}$$

Зі збільшенням n величина Δq відповідно як завгодно мала. Тоді наближена рівність перетвориться на точну. Отже, сумарні витрати споживачів $S_в$ обчислюються за формулою:

$$S_в = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0q_0. \tag{9.10}$$

Надлишок споживача $S_н$ *– це різниця між можливими й реальними витратами споживача в умовах ринку*:

$$S_н = \int_0^{q_0} f(q)dq - p_0q_0\,. \tag{9.11}$$

Геометричну інтерпретацію цього означення наведено на рис. 9.3, де $p = f(q)$ – крива попиту; A – точка рівноваги. Площина $S_н$ показана заштрихованою областю.

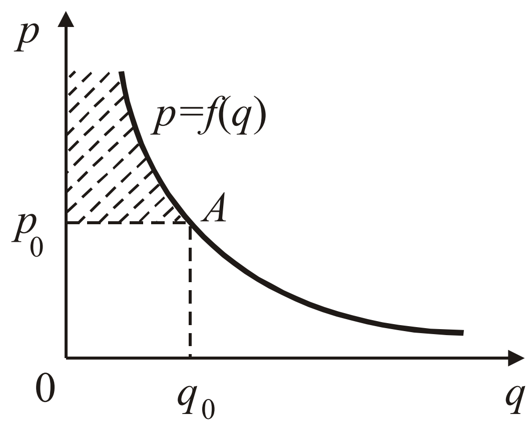


Рис. 9.3

Приклад 1. *Знайдемо надлишок споживана, якщо крива попиту визначається функцією* $p = f(q) = 29 - 3q^2$*, а рівноважний обсяг товару* $q = 2$.

Підставивши значення $q_0 = 2$ у функцію попиту, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 29 - 3 \cdot 2^2 = 17.$$

Використовуючи формулу (9.11), матимемо:

$$S_н = \int_0^q f(q)dq - p_0 q_0 = \int_0^2 (29 - 3q^2)dg - 17 \cdot 2 = (29q - q^3)\Big|_0^2 - 34 =$$

$$= 29 \cdot 2 - 8 - 34.$$

Розглянемо ще одне поняття ринкової економіки – ***додаткову вартість***, або ***надлишок виробника***. Для цього візьмемо криву пропозиції деякого товару $p = f(q)$. Графік цієї кривої й точку рівноваги A (перетину з кривою попиту) показано на рис. 9.4.

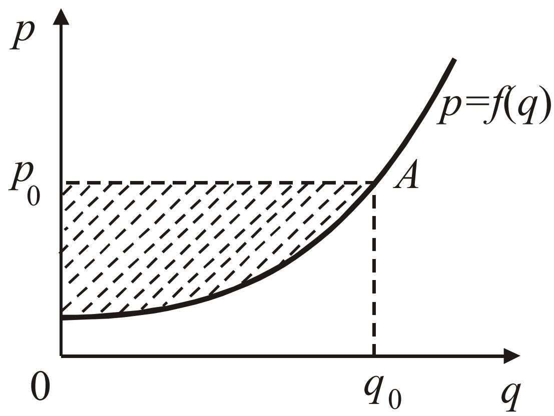


Рис. 9.4

Завдяки ринковим відносинам як деякі споживачі мають змогу придбати товар за ціною, нижчою ніж та, яку вони готові були заплатити, так і виробники іноді можуть продати товар за вигіднішого ціною, ніж та, з якою вони погоджувалися. Припускаючи, що весь товар обсягом q_0 буде реалізовано на ринку за ціною p_0, обчислимо дохід споживачів: $R = p_0 q_0$.

Нехай водночас обсяг товару, менший за q_0, виробники реалізують за ціною, нижчою, ніж p_0. Тоді додаткова вартість виробника обчислюється за формулою:

$$S_{дод.\ вар.} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq. \qquad (9.12)$$

На рис. 9.4 ця площа показана заштрихованою областю.

Приклад 2. *Знайдемо додаткову вартість виробників, якщо крива пропозиції визначається функцією* $p = f(q) = 7 + 4q^3$, *а рівноважний обсяг товару* $q_0 = 3$.

Підставивши значення $q_0 = 3$ у функцію пропозиції, дістанемо рівноважну ціну:

$$p_0 = f(q_0) = 7 + 4 \cdot 3^3 = 115.$$

Використовуючи формулу (9.12), матимемо:

$$S_{дод.\ вар.} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} f(q)dq =$$

$$= 115 \cdot 3 - \int_0^3 (7 + 4q^3)dq = 345 - (7q + q^4)\Big|_0^3 = 243$$

Задача цінової дискримінації

Ця задача пов'язана з розподілом товару одного виду по різних ринках із різними попитами для максимізації загального прибутку фірми. Оскільки еластичність попиту на ринках різна, то на товар установлюють різні ціни, що призводить до так званої цінової дискримінації.

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – обсяги одного й того самого товару, що продається на ринках за цінами $p_i(x_i)$, тобто ціна на кожному ринку залежить від обсягу товару, який продається. Припустимо, що функція витрат залежить від загального обсягу товару, який продає фірма на всіх ринках, тобто $C = C(x_1, x_2, ..., x_n)$. Тоді функція прибутку фірми має вигляд:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n - C(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Необхідні умови екстремуму $\dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0$, $i = \overline{1, n}$ приводять до системи рівнянь для визначення стаціонарних точок функції прибутку в області $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, …, $x_n \geq 0$:

$$p_i(x_i) + x_i p'_{x_i}(x_i) - C'_{x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{9.13}$$

Проаналізуємо дохід R_i на *i*-му ринку залежно від ціни на товар обсягом x_i. Оскільки $R_i = x_i p_i$, то граничний дохід дорівнює сумі перших двох доданків у рівності (9.13):

$$R_i' = p_i + x_i p_i' = p_i\left(1 + \frac{x_i}{p_i} p_i'\right) = p_i\left(1 + \frac{1}{E_i}\right),$$

де E_i – еластичність попиту на і-му ринку. Оскільки E_i – зазвичай від'ємна величина, то останнє рівняння можна переписати в зручнішій формі:

$$R_i' = p_i\left(1 - \frac{1}{|E_i|}\right). \qquad (9.14)$$

Якщо $|E_i| < 1$, то $R_i' < 0$, тобто ринок нееластичний. Якщо $C'_{x_i} > 0$, то умова (9.13) потребує вибору ринку з додатним доходом або з еластичним попитом, тобто з умовою $|E_i| > 1$. З рівності (9.13) дістанемо:

$$p_1\left(1 - \frac{1}{|E_i|}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{|E_i|}\right) = \ldots = p_n\left(1 - \frac{1}{|E_i|}\right) = C'_{x_i}, \qquad (9.15)$$

звідки виводиться умова «цінової дискримінації»: чим менша за абсолютним значенням еластичність даного ринку за даного обсягу товару, який продається на ринку, тим вищою має бути ціна на товар на цьому ринку за умови максимального прибутку фірми.

Гессіан для функції прибутку в скороченій формі має вигляд:

$$\det H = \|a_{ij}\|, \text{ де } |a_{ij}| = \begin{cases} p_i'' \cdot x_i + 2p_i'' - C''_{x_i^2}, & i = j, \\ -C''_{x_i x_j}, & i \neq j. \end{cases}$$

Приклад. Нехай фірма продає товар на трьох ринках і x_1, x_2, x_3 – обсяги товару, а $p_i = a_i - b_i x_i$ – відповідні ціни на ці товари. Тоді дохід на *i*-му ринку $R_i = x_i(a_i - b_i x_i)$, *i* = 1, 2, 3. Нехай функція витрат фірми має вигляд $C = A + B(x_1 + x_2 + x_3)$. Знайдемо максимальний прибуток фірми (у наведених співвідношеннях всі сталі додатні.)

Функція прибутку фірми виражається формулою

$$P = x_1(a_1 - b_1 x_1) + x_2(a_2 - b_2 x_2) + x_3(a_3 - b_3 x_3) - A - B(x_1 + x_2 + x_3).$$

Необхідні умови локального екстремуму приводять до такої системи рівнянь:

$$a_i - b_i x_i - B = 0, \ i = 1, 2, 3.$$

Отже, $x_i = \dfrac{a_i - B}{2b_i}$, $i = 1, 2, 3$ – єдина стаціонарна точка.

Обчислимо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_3 \end{vmatrix}.$$

За критерієм Сільвестра маємо точку максимуму, оскільки знаки головних мінорів чергуються і $b_1 > 0$.

Завдання

Нехай фірма продає товар на трьох ринках і x_1, x_2, x_3 – обсяги товару, а $p_i = a_i - b_i x_i$ – відповідні ціни на ці товари. Тоді дохід на *i*-му ринку $R_i = x_i(a_i - b_i x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Нехай функція витрат фірми має вигляд $C = A + B(x_1 + x_2 + x_3)$. Знайти максимальний прибуток фірми для таких числових значень параметрів: $a_1 = 23 + N/10$, $b_1 = 5$, $a_2 = 43 + N/10$, $b_2 = 4$, $a_3 = 80 + N/5$, $b_3 = 10$, $A = 10$, $B = 5$ (*N* - порядковий номер студента у групі). Зробити висновки.

Питання для самоконтролю

1. Дати означення еластичності попиту на ринках.
2. У чому сутність цінової дискримінації?
3. Сформулювати задачу цінової дискримінації.
4. Сформулювати умову цінової дискримінації.

Задачі для самостійної роботи

Задача 1

1.1. Знайти функцию попиту $y(p)$, якщо еластичність попиту відносно ціни $E_p(y) = -2$.

1.2. Знайти функцию попиту $d = d(p)$, якщо еластичність попиту відносно ціни $E_p(d) = -1$ і задано значення ціни $p = 10$ при $d = 2$.

Відповідь: $d(p) = \dfrac{20}{p}$.

1.3. Знайти функцію, що має постійну еластичність, яка дорівнює k.

Відповідь: $y = Cx^k$.

1.4. Знайти функцію попиту $d = d(p)$, якщо еластичність попиту має вид $E_p(d) = \dfrac{d-100}{d}$ і $p = 10$ при $d = 90$, $0 < d < 100$.

Відповідь: $d(p) = 100 - \dfrac{100}{p}$.

Задача 2

При розробці плану замовлення путівок для оздоровчих заходів колективу фірми проведені дослідження потреб співробітників фірми в путівках по туристичних маршрутах (q_1) і путівках санаторно-курортного лікування (q_2). У результаті регресійного аналізу отримана залежність коштів (*U*), внесених співробітниками за путівки, від кількості путівок зазначених видів.

Потрібно зробити наступне:

1) з'ясувати чи може ця залежність служити цільовою функцією споживання;

2) якщо так, то побудувати карти байдужності й споживання;

3) виконати імітаційні розрахунки варіантів споживання путівок при умовах: а) пропозиція залишається на попередньому рівні; б) зростає на 10 одиниць;

4) побудувати загальну функцію попиту на путівки й функції попиту за їхніми видами, використовуючи середні ціни путівок p_1 і p_2 й задані значення загальної функції попиту Z по варіантах:

а) $Z = 10000$;

б) $Z = 100000$.

5) провести аналіз функцій попиту, використовуючи показники еластичності по доходу, ціні й заміщенню.

№	**Функція споживання** $U(q_1, q_2)$	**Середні ціни**	
		P_1	P_2
1	**2**	**3**	**4**
1.	$U = 50q_1 - q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$	50	120
2.	$U = 20 - q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$	40	100
3.	$U = 50q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	35	80
4.	$U = 15q_1 + 20q_2 - q_2^2 - q_1^2$	60	170

Продовж.табл.

1	2	3	4
5.	$U = 40q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	40	200
6.	$U = 3q_1 - q_1^2 + 8q_2 - q_2^2$	70	250
7.	$U = 20q_1 - q_1^2 - q_2^2$	50	300
8.	$U = -q_1^2 + 6q_2 - q_2^2$	30	400
9.	$U = 2q_1 - q_1^2 + 2q_2 - q_2^2$	40	200
10.	$U = 70q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$	50	150
11.	$U = 25q_1 - q_1^2 + 18q_2 - q_2^2$	80	120
12.	$U = 5q_1 - q_1^2 - q_2^2$	40	140
13.	$U = 40q_2 - q_1^2 - q_2^2$	90	200
14.	$U = q_1 - q_1^2 - q_2^2$	30	250
15.	$U = 70q_1 - q_1^2 + 60q_2 - q_2^2$	40	100
16.	$U = 13q_1 - q_1^2 + q_2 - q_2^2$	60	140
17.	$U = -q_1^2 + 24q_2 - q_2^2$	70	160
18.	$U = 7q_1 - q_1^2 + 6q_2 - q_2^2$	50	170
19.	$U = 5q_1 - q_1^2 - q_2^2$	80	120
20.	$U = 80q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	90	130
21.	$U = 16q_1 - q_1^2 + 45q_2 - q_2^2$	100	110
22.	$U = -q_1^2 + q_2 - q_2^2$	80	160
23.	$U = q_1 - q_1^2 + q_2 - q_2^2$	65	200
24.	$U = 3q_1 - q_1^2 + 7q_2 - q_2^2$	75	160
25.	$U = 60q_1 - q_1^2 + 20q_2 - q_2^2$	70	300
26.	$U = 30q_1 - q_1^2 + 40q_2 - q_2^2$	80	450
27.	$U = 60q_2 - q_1^2 - q_2^2$	70	180
28.	$U = 14q_1 - q_1^2 + 22q_2 - q_2^2$	60	250
29.	$U = 60q_1 - q_1^2 + 50q_2 - q_2^2$	100	430
30.	$U = 16q_1 + 10q_2 - q_2^2 - q_1^2$	30	260

Рекомендована література

1. Грисенко М.В. Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.

2. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: Навч. посібник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 304 с.

3. Вітлінскій В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 2005. – 408 с.

4. Кутковецький В.Я. Дослідження операцій: Навч. посібник. – К.: ВД «Професіонал», 2005. – 264 с.

5. Жлуктенко В.І., Наконечній С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.

6. Урубков А.Р. Курс МВА по оптимизации управленческих решений. Практическое руководство по использованию моделей линейного программирования. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2006. – 176 с.

7. Бронштейн Е.М., Черняк Д.А. Сравнительный анализ показателей эффективности инвестиционных проектов // Экономика и математические методы. – 2005. – № 2. – С. 21-28.

8. Федоренко В., Мажуга О. Інвестиційне кредитування та кількісна оцінка ризику реалізації проекту // Економіка України. – 2005. – № 12. – С. 34-40.

9. Смоляк С.А. Оптимальное поведение фирмы на финансовом рынке и ставка дисконта // Экономика и математические методы. – 2004. – № 2. – С. 72-87.

10. Шерстенников Ю.В. Моделювання економічної динаміки малого підприємства . – Дніпропетровськ: ДДФА, 2009. – 224 с.

11. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навчальний посібник. – К.: Знання, 2008. – 368 с.

12. Лугінін О.Є., Білоусова С.В., Білоусов О.М. Економетрія: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2005. – 252 с.

13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – С. 432.

14. Вітлінський В.В., Верченко П.І. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2000. — 292 с.

15. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и современная теория управления.- М.: Наука, 1969. – 458 с.

16. Мочерний С.В. Основи підприємницької діяльності: Навчальний посібник / С.В. Мочерний, О.А. Устенко, С.І. Чеботар. – К.: Видавничий центр «Академія», 2005. – 280 с.

17. Стеблій Г.Я. Мікроекономіка: Навчальний посібник / Г.Я. Стеблій. – Київ: “Фірма “ІНКОС”, Центр навчальної літератури, 2007. – 221 с.

Н а в ч а л ь н е в и д а н н я

Рядно *Олександр Андрійович*

Шерстенников *Юрій Всеволодович*

Математичне моделювання підприємницької діяльності

Навчальний посібник

Рядно О.А., Шерстенников Ю.В.

Р 97 Математичне моделювання підприємницької діяльності : навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів економічних спеціальностей. – Дніпропетровськ: ДДФА, 2011. – 352 с.

ISBN 978-966-8866-60-9

У навчальному посібнику викладено процедури вибору оптимальних варіантів виробничої програми підприємства на етапі стратегічного управління виробничо-фінансовою діяльністю. Особливе значення приділено дослідженню моделей управління фірмою.

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, приклади, питання для самоконтролю, задачі для самостійного розв'язку.

Призначено для студентів, аспірантів, викладачів та всіх, кто цікавиться проблемами екноміко-математичного моделювання підприємницької діяльності.

УДК 334.75:519.876.5
ББК 65в6

Редактор: *А.А. Майна*
Коректор: *А.О. Островська*
Технічний редактор *Л.В. Кебал*
Дизайн обкладинки *Т.Г. Пунтус*

Підп. до друку 12.07.2011р.Формат 84х $108^{1}/_{32}$ Папір друк.

Ум.друк.арк. 18,5 Облік.-видав.арк. 25,3 Тираж 300 Замовлення № 151

РВВ ДДФА Дільниця оперативного друку. Св. Держкомітету інформ. політики, телебачення та радіомовлення сер. ДК 2126 від 17.03.2005 р.