

О. В. Трофимов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры транспортных систем и технологий Университета таможенного дела и финансов
Ю. В. Петрова, магистр компьютерных технологий, заместитель директора бизнес-инкубатора Национального горного университета

МНОГОСЕТОЧНЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК ДЛЯ УПРУГИХ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ ПАКЕТОВ

Проанализирована практическая эффективность многосеточного алгоритма коррекции приближённого решения средствами грубых сеток (CGC-алгоритма) для решения задач генерации сеток для упругих и упругопластических граничных задач для слоистых пакетов с криволинейными границами раздела между слоями. Задача построения сеток основана на модели Бельтрами. Рассмотрена формулировка на основе контрольных функций в правых частях уравнений. Для линеаризации задачи предложен итерационный процесс ньютоновского типа; подтверждена его квадратичная скорость сходимости. Установлены факторы, влияющие на скорость сходимости CGC-алгоритма для различных конфигураций поверхностей слоя и числа делений сетки.

Ключевые слова: многосеточные методы; алгоритмы генерации сеток; слоистые основания.

The main purpose of the paper is to investigate the practical efficiency of Coarse Grid Correction Multigrid Algorithm for solving the Grid Generation Problem for elastic or elasto-plastic layered package with curvilinear boundaries between the layers. The Grid Generation Problem used for building the regular grid for the layer is based on the Beltrami's model. The formulation based on Control Functions on the right-hand side of Beltrami's equations is considered. Newton-type process for linearization of the nonlinear Beltrami's problem is proposed. Quadratic speed of convergence for such process is confirmed. Factors affecting convergence rate of the CGC-algorithm are analyzed.

Key words: multigrid methods; grid generation algorithms; layered basis.

Постановка проблемы. Обратные задачи для упругих и упругопластических слоистых пакетов [1] относятся к категории задач с распределёнными параметрами, где неизвестными являются конфигурации границ раздела между слоями, а также упругие (упругопластические) характеристики слоёв. В качестве инструментария при решении этих задач используются в основном методы двух классов: градиентные методы, позволяющие находить “точки максимального правдоподобия” целевого функционала, а также методы Монте-Карло, которые облегчают “дисперсионный анализ” вблизи указан-

© О. В. Трофимов, Ю. В. Петрова, 2015

ных точек. В обоих случаях базой для построения алгоритмов служат эффективные методы решения “прямой задачи” для пакета с криволинейными границами раздела между слоями. Подобные методы для эффективной реализации требуют, в свою очередь, быстрого и качественного построения сеток в расчётной области, каковой в данном случае является совокупность слоёв пакета.

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросами построения сеток для решения граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных в областях сложной формы начали интересоваться на заре развития компьютерной техники (в начале второй половины XX в.), когда уже были достаточно развиты методы дискретизации дифференциальных граничных задач. С самого начала развитие методов построения сеток разделилось на два направления: построение регулярных и нерегулярных сеток. *Регулярными* называются сетки определённой (сравнительно простой) структуры, построенные в так называемой *расчётной области* $\Xi \in R^n$, которые затем отображаются в *физическую область* $D \in R^n$ с помощью некоторого отображения

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, \quad \boldsymbol{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \Xi. \quad (1)$$

Таким образом, задача построения регулярной сетки при заданной структуре сетки в расчётной области Ξ состоит в нахождении приемлемого отображения (1). Для того чтобы построенная сетка была пригодной для решения дифференциальных граничных задач, необходимо выполнение определённых условий.

1. Сетка не должна иметь самопересечений.

2. Не должно быть вырождения сетки при её измельчении (в более общем случае налагаются определённые ограничения на параметры ячеек сетки: аспектный коэффициент, минимальный и максимальный угол между смежными сторонами ячейки и т. д.).

3. Приемлемая топология сетки и её элементов. Не должно быть сингулярных (вырождающихся) элементов, узлы одного элемента не должны находиться на сторонах другого элемента (за исключением случаев совпадения узлов обоих элементов).

4. Согласованность сетки с геометрией области и особенностями получаемого приближённого решения дифференциальной задачи. Сетка должна иметь достаточное число узлов для приемлемой аппроксимации границ области, а также необходимые сгущения в местах высоких градиентов получаемого решения.

5. Удобство численной реализации алгоритмов генерации сетки и их совместимость с алгоритмами численного решения дифференциальной граничной задачи на сформированной сетке.

Для генерации регулярных сеток используются преимущественно два основных подхода.

I. Алгебраические методы, использующие интерполяционные формулы для вычисления координат внутренних узлов сетки при заданном распределении граничных узлов.

II. Дифференциальные методы, которые используют модели, основанные на решении граничных задач для определённых классов уравнений в частных производных (или эквивалентных этим задачам соответствующих оптимизационных задач на базе “слабых” и вариационных формулировок).

Методы первой группы обычно хорошо подходят для областей, близких в “гомеоморфном” смысле к прямоугольному параллелепипеду. Для более сложных областей используются методы второй группы. Для этих методов выбор модели построения сетки определяется в основном классом решаемой дифференциальной задачи. Для уравнений эллиптического типа наибольшее распространение получили сеточные модели на основе уравнений Бельтрами [2]. Эти уравнения также имеют эллиптический тип, что даёт возможность как для построения сетки, так и для решения дифференциальной задачи эффективно использовать многосеточные итерационные методы [3].

Целью статьи является исследование эффективности многосеточного CGC-алгоритма для решения задачи построения качественных сеток для каждого из слоёв упругого (упругопластического) пакета.

Изложение основного материала. При использовании модели Бельтрами обычно вводят вспомогательное отображение

$$s=s(\xi), \quad s=(s_1, s_2, \dots, s_n) \in S, \quad (2)$$

называемое *контрольным отображением* некоторой промежуточной области S в расчётную область Ξ . Область S , называемая *контрольной*, или *параметрической*, обычно близка по топологии к расчётной области Ξ , а выбор отображения (2) производится с целью придания сетке упомянутых выше свойств. Таким образом, задача построения сетки сводится к нахождению отображения $x=x(s)$, а результирующее отображение (1) физической области D в расчётную Ξ получается композицией $x=x(s(\xi))$.

Оператором Бельтрами называют оператор Лапласа для функций, определённых в области D , но записанный в произвольных обобщённых координатах, которыми, например, могут являться координаты s и ξ . В координатах ξ для функции $v(x)$ этот оператор записывается так

$$\Delta_B[v(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sqrt{g^\xi} g_\xi^{jk} \frac{\partial v(x)}{\partial \xi_k} \right). \quad (3)$$

Здесь g_ξ^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора обобщённых координат ξ – коэффициенты матрицы, обратной матрице ковариантных компонент (g_{ij}^ξ) ; $g_{ij}^\xi = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$, $g^\xi = \det(g_{ij}^\xi)$. Как обычно в тензорном анализе подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n .

В модели Бельтрами полагают, что компоненты отображения $s=s(x)$, обратного отображению $x=x(s)$, являются гармоническими функциями в области D , то есть имеют место равенства

$$\Delta_B[s_i(x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\sqrt{g^\xi} g_\xi^{jk} \frac{\partial s_i}{\partial \xi_k} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4)$$

С помощью несложных преобразований соотношения (4) приводятся к виду

$$\frac{1}{\sqrt{g^\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\sqrt{g^\xi} g_{ij}^\xi) = P_i(\xi), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

где так называемые *контрольные функции* $P_i(\xi)$ выражаются так

$$P_i(\xi) = g_{ij}^{jk} P_{jk}^i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

а вектор-столбцы $P_{jk} = (P_{jk}^1, P_{jk}^2, \dots, P_{jk}^n)^T$ определяются как произведения

$$P_{jk} = -T^{-1} S_{jk}, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad (7)$$

причём коэффициенты матрицы $T = (T_{ij})$ и компоненты вектор-столбцов $S_{jk} = (S_{jk}^1, S_{jk}^2, \dots, S_{jk}^n)^T$ выражаются формулами

$$T_{ij} = \frac{\partial s_i}{\partial \xi_j}, \quad S_{jk}^i = \frac{\partial^2 s_i}{\partial \xi_j \partial \xi_k}, \quad i, j, k = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Таким образом, в модели Бельтрами правые части соотношений (5) выражаются через компоненты контрольного отображения $s = s(\xi)$, которое считается известным. В частном случае $s \equiv \xi$ контрольные функции $P_i(\xi)$ тождественно равны нулю, и сетка, построенная на базе модели (5), называется Лапласовой.

Очевидно, что распределение узлов формируемой сетки определяется не только контрольными функциями, но и заданием распределения узлов на границе физической области D . В простейшем случае задаётся отображение точек границы ∂E расчётной области на множество ∂D граничных точек физической области:

$$x_i|_{\partial E} = \sigma_i(\xi), \quad i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

Задача (5), (9) нахождения неизвестной функции $x(\xi)$ является граничной задачей с краевыми условиями Дирихле. Однако в некоторых случаях строго фиксированное распределение граничных узлов не так существенно, а более важным является поведение отображения $x(\xi)$ вблизи границы (например, перпендикулярность линий сетки на границе). В таких ситуациях на соответствующей части границы ∂E задаются краевые условия Неймана или даже определённые смешанные граничные условия [4] и соответствующая библиография.

Слабая формулировка дифференциальной граничной задачи (5), (9) определяется следующим образом: найти вектор-функцию $x(\xi)$, удовлетворяющую соотношению

$$L(x, v) = \mathcal{F}(v; x) \quad \forall v \in H \quad (10)$$

и граничные условия (9). Здесь $L(x, v)$ – форма, линейная по второму аргументу, определяемая формулой

$$L(x, v) = \int_{\Xi} \sqrt{g^{\xi}} g_{\xi}^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} d\xi, \quad (11)$$

$f(v; x)$ – линейный по первому аргументу функционал, зависящий от второго аргумента как от параметра и определяемый как

$$f(v; x) = - \int_{\Xi} \sqrt{g^{\xi}} P_i v_i d\xi. \quad (12)$$

H – пространство вектор-функций $v(\xi)$, удовлетворяющих нулевым граничным условиям на $\partial\Xi$.

Для галеркинской дискретизации задачи (10) зададимся наборами пробных и поверочных функций $u^{(k)}(\xi)$, $v^{(k)}(\xi)$, $k=1, \dots, N$, где N – число внутренних узлов сетки (не являющихся узлами Дирихле). Представляя компоненты искомой вектор-функции $x(\xi)$ в виде линейных комбинаций базисных функций $u^{(k)}$

$$x_i(\xi, \alpha) = \sum_{k=1}^N \alpha_i^{(k)} \cdot u^{(k)}(\xi), \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

в силу (10) придём к системе $N \times n$ нелинейных алгебраических уравнений

$$L_i^{(k)}(\alpha) = f_i^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (14)$$

относительно неизвестных коэффициентов $\alpha_i^{(k)}$, где

$$L_i^{(k)}(\alpha) = L(x, 0, 0, \dots, 0, v^{(k)}, 0, \dots, 0),$$

$$f_i^{(k)} = f(0, 0, \dots, 0, v^{(k)}, 0, \dots, 0; \mathbf{x}),$$

(поверочная функция $v^{(k)}(\xi)$ стоит в этих выражениях на i -й позиции), $\alpha = (\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(N)})^T$. Для решения нелинейной системы (14) используем ньютоновский итерационный процесс

$$\alpha^{(l+1)} = \alpha^{(l)} - A^{-1}(\alpha^{(l)})\beta^{(l)}, \quad - \quad (15)$$

где матрица $A(\alpha^{(l)}) = \text{grad}(L_i^{(k)}(\alpha^{(l)}))$, $\beta^{(l)} = (\beta_1^{(1)(1)}, \beta_2^{(1)(1)}, \dots, \beta_n^{(1)(1)}, \dots, \beta_n^{(1)(N)})^T$ – вектор невязки, компоненты которого определяются по формуле

$$\beta_i^{(l)(k)} = L_i^{(k)}(\alpha^{(l)}) - f_i^{(k)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Отметим, что решение системы уравнений

$$A(\alpha^{(l)})u = \beta^{(l)}, \quad (17)$$

которое необходимо для реализации процесса (15), эквивалентно решению в галеркинской постановке следующей задачи

$$\mathfrak{Z}(u, v; x^{(l)}) = \wp(v; x^{(l)}), \quad \forall v \in H, \quad (18)$$

где $\mathfrak{Z}(u, v; x^{(l)})$ – билинейная форма, зависящая от $x^{(l)}$ как от параметра ($x^{(l)}$ определяется по формуле (13) при $\alpha = \alpha^{(l)}$), $\wp(v; x^{(l)})$ – линейный по v параметрический по $x^{(l)}$ функционал, которые определяются по формулам

$$\mathfrak{Z}(u, v; x^{(l)}) = \int_{\Xi} \left(A_{ijkm} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial v_m}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ijklm} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} v_m \right) d\xi, \quad (19)$$

$$\wp(v; x^{(l)}) = \int_{\Xi} \sqrt{g_\xi} \left(g_\xi^{ij} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} + P_i v_i \right) d\xi, \quad (20)$$

причем коэффициенты A_{ijkm} и B_{ijklm} равны

$$A_{ijkm} = \frac{\partial(\sqrt{g_\xi} g_\xi^{mj})}{\partial(\partial x_k / \partial \xi_i)}, \quad B_{ijklm} = \frac{\partial(\sqrt{g_\xi} g_\xi^{lj})}{\partial(\partial x_k / \partial \xi_i)} P_{lj}^m. \quad (21)$$

Эквивалентность дискретизованной задачи (18) системе линейных уравнений (17) дает возможность эффективно использовать для решения этой системы много-сеточные итерационные методы.

Для успешного применения многосеточных итерационных методов к задаче построения сетки для слоистых пакетов необходимо решить следующие вопросы.

1. Определение начального приближения для осуществления итерационного процесса (15).
2. Выбор подходящих контрольных функций (6), то есть выбор контрольного отображения (2).
3. Выяснение скорости сходимости итерационного процесса (15).
4. Установление необходимых значений параметров многосеточного алгоритма коррекции приближенного решения с использованием грубых сеток (CGC-алгоритма) для наиболее эффективного его применения к решению сеточной задачи (17).

Рассмотрим один из слоёв двумерного пакета, ограниченный слева и справа прямыми $x_1=0$ и $x_1=L$, а снизу и сверху кривыми $x_2=S_1(x_1)$ и $x_2=H+S_2(x_1)$ ($H=\text{const}$ – толщина слоя пакета). Начальное приближение к решению задачи (5) строится с помощью линейного отображения

$$\begin{cases} x_1 = Ls_1, \\ x_2 = S_1(x_1) + s_2(H+S_2(x_1)-S_1(x_1)), \end{cases} \quad (22)$$

канонической контрольной области S – единичного квадрата $(0,1) \times (0,1)$ в пространстве координат (s_1, s_2) – в физическую область D (рис. 1 (а)).

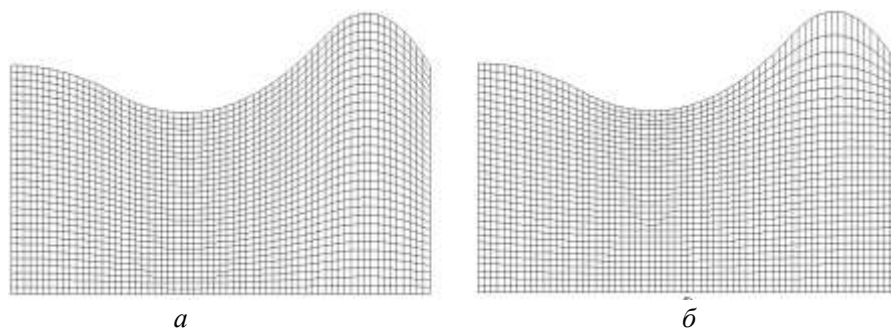


Рис. 1. Сетка, полученная при помощи линейного отображения (а); лапласова сетка (б) (22)

Лапласова сетка, построенная на основе начального приближения (22), изображена на рис. 1 (б). Видно ухудшение качества параметров сетки в некоторых подобластях, связанное с чрезмерным увеличением высоты ячейки сетки. Для устранения указанного недостатка целесообразно использовать контрольное отображение $s=s(\xi)$ $(0,1) \times (0,1) \rightarrow (0,1) \times (0,1)$ вида

$$\begin{cases} s_1 = \xi_1, \\ s_2 = K \int_0^{\xi_2} \frac{d\xi_2}{\partial x_2 / \partial \xi_2}, \end{cases} \quad K = 1 / \int_0^1 \frac{d\xi_2}{\partial x_2 / \partial \xi_2} - \text{нормирующий множитель.} \quad (23)$$

Отображение (23) имеет смысл в случае монотонности функции $x_2=x_2(\xi_2)$ ($\partial x_2/\partial \xi_2 \neq 0$), полученной как решение задачи построения лапласовой сетки, и позволяет эффективно регулировать расстояние между x_2 -линиями сетки. Сетка, построенная на основе контрольных функций (23), представлена на рис. 2.

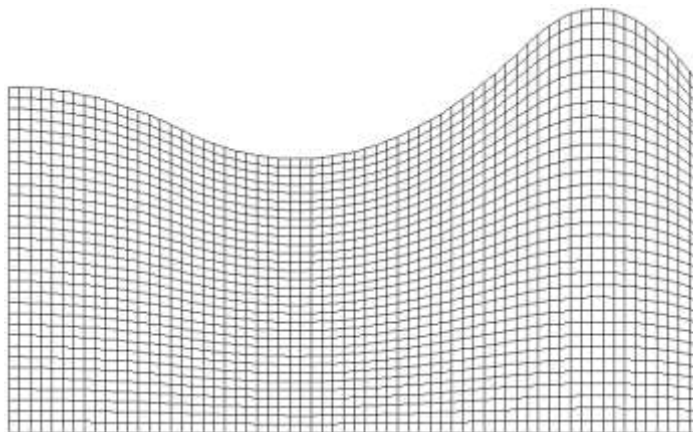


Рис. 2. Сетка, построенная на основе контрольного отображения (23)

В табл. 1 представлена евклидова норма невязки (16) после выполнения каждой итерации процесса (15) на сетке 64×32 .

Таблица 1

Скорость сходимости итерационного процесса (15)

№ итерации	Норма невязки
0	$3,56 \times 10^{-4}$
1	$5,89 \times 10^{-5}$
2	$2,94 \times 10^{-6}$
3	$6,73 \times 10^{-9}$
4	$2,38 \times 10^{-14}$

Из таблицы видно, что итерационный процесс (15) при выбранном начальном приближении действительно обеспечивает квадратичную скорость сходимости, характерную для ньютоновских методов.

Как уже говорилось, эквивалентность системы уравнений (17) дискретизованной дифференциальной задаче (18) в “слабой” формулировке позволяет эффективно использовать для решения этой системы итерационные методы на последовательности сеток.

Как известно, основой многосеточных методов является цикл коррекции приближенного решения системы (17) путем решения дискретизованной задачи (18) на грубых сетках (Coarse Grid Correction Cycle, или CGC-алгоритм (цикл) [3]. Этот алгоритм формулируется следующим образом.

Алгоритм CGC_CYCLE($k, u_k^{(0)}, \gamma$)

// k – уровень сетки Ω_{hk} , $u_k^{(0)}$ – начальное приближение, γ - параметр цикла

Begin

1. Если $k=0$, уравнение (6) решается прямым методом. В результате решения получается величина $u_k^{(1)}$. Перейти к пункту 9.

2. (Пререлаксация). Провести ν_1 сглаживающих итераций по формуле

$$\tilde{u}_k^{(0)} \leftarrow S_k^{\nu_1} u_k^{(0)},$$

где S_k – оператор релаксационной схемы.

3. Вычисление невязки по формуле

$$r^k \leftarrow A^k \tilde{u}_k^{(0)} - \beta^k.$$

4. Проектирование невязки на грубую сетку (уровня на единицу ниже)

$$r^{k-1} \leftarrow R_k^{k-1} r^k,$$

где R_k^{k-1} – оператор проектирования с мелкой сетки на более грубую.

5. Вычисление и уточнение вектора поправки e^{k-1} на грубой сетке, то есть приближенного решения уравнения

$$A^{k-1} e^{k-1} = r^{k-1}, \quad (24)$$

рекурсивно с помощью этого же алгоритма, начиная с нулевого начального приближения

$$\tilde{e}_k^{(0)} \leftarrow 0.$$

$$\text{For } i \leftarrow 1 \text{ to } \gamma \text{ do } \tilde{e}_{k-1}^{(i)} \leftarrow \text{CGC_CYCLE}(k-1, \tilde{e}_{k-1}^{(i-1)}, \gamma).$$

6. Интерполяция полученной поправки $\tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)}$ на мелкую сетку (уровня на единицу выше)

$$e^k \leftarrow P_{k-1}^k \tilde{e}_{k-1}^{(\gamma)},$$

где P_{k-1}^k – оператор интерполяции с грубой сетки на более мелкую.

7. Коррекция

$$\hat{u}_k^{(1)} \leftarrow \tilde{u}_k^{(0)} + e^k.$$

8. (Пострелаксация). Проведение дополнительных v_2 сглаживающих итераций по формуле

$$u_k^{(1)} \leftarrow S_k^{v_2} \hat{u}_k^{(1)}.$$

9. Возвратить результат $u_k^{(1)}$.

End

В этом алгоритме $\Omega_{hk} \subset \Xi$, $k=0,1,\dots,K$ – совокупность сеточных множеств, образующих вложенные подпространства пробных и поверочных функций, необходимых для дискретизации задачи (18).

Известно, что эффективное применение CGC-алгоритма зависит от его тщательной настройки. В число настраиваемых параметров входят способ укрупнения сетки при переходе к нижним уровням, тип операторов релаксации S_k , проектирования R_k^{k-1} и интерполяции P_{k-1}^k , способ построения дискретизованного оператора A^{k-1} на более грубой сетке, а также значения v_1, v_2 числа сглаживающих пре- и поститераций и числа γ применений этого же алгоритма для приближенного решения системы (24) на нижних уровнях. Для решения задачи настройки CGC-алгоритма к настоящему времени разработаны достаточно мощные теоретические инструменты, такие как локальный анализ Фурье [5]. Однако, как уже указывалось в упомянутой работе, при наличии разработанного программного инструментария для реализации много-сеточных алгоритмов более практичной может оказаться непосредственная проверка эффективности многосеточного алгоритма при помощи подобного “конструктора”.

В большинстве случаев выбор операторов R_k^{k-1} , P_{k-1}^k и A^{k-1} носит стандартный характер [6], поэтому уделим внимание выбору операторов релаксации и параметров v_1, v_2, γ для случая стандартного укрупнения сетки (Standard Coarsening). Рассмотрим следующие возможные релаксационные схемы (подробное описание см. в работе [7]).

1. Точечная релаксация Якоби.
2. Точечная релаксация Гаусса–Зейделя (упорядочение неизвестных в направлении “восток–запад”, то есть вдоль оси ξ_1).
3. Точечная релаксация Гаусса–Зейделя (упорядочение неизвестных в направлении “юг–север”, то есть вдоль оси ξ_2).
4. “Шахматка” Якоби (сначала релаксация “четных” узлов, а потом “нечетных”, используя обновленные “четные” значения).
5. “Шахматка” Гаусса–Зейделя “восток–запад”.
6. “Шахматка” Гаусса–Зейделя “юг–север”.
7. Релаксация Якоби с одновременным обновлением значений переменных на ξ_1 -линии (ξ_1 -линия Якоби).

8. Релаксация Якоби с одновременным обновлением значений переменных на ξ_2 -линии (ξ_2 -линия Якоби).
9. ξ_1 -линия Гаусса–Зейделя.
10. ξ_2 -линия Гаусса–Зейделя.
11. ξ_1 -“зебра” (сначала обновляются “четные” ξ_1 -линии, а потом – “нечетные”).
12. ξ_2 -“зебра” (аналогично для ξ_2 -линий).

Таблица 2

Множитель уменьшения нормы ошибки

Релаксационная схема	Сетка		
	128×64	256×32	32×256
Точечная Якоби *	0,6022	0,9027	0,9893
Точечная Гаусса–Зейделя “восток–запад”	0,4415	0,8040	0,9752
Точечная Гаусса–Зейделя “юг–север”	0,4335	0,8007	0,9729
“Шахматка” Якоби	0,4565	0,8425	0,9792
“Шахматка” Гаусса–Зейделя “восток–запад”	0,4408	0,8372	0,9790
“Шахматка” Гаусса–Зейделя “юг–север”	0,4304	0,8400	0,9793
ξ_1 -линия Якоби *	0,6221	0,5351	0,9884
ξ_2 -линия Якоби *	0,4871	0,8990	0,4535
ξ_1 -линия Гаусса–Зейделя	0,4439	0,2583	0,9712
ξ_2 -линия Гаусса–Зейделя	0,3439	0,8057	0,3567
ξ_1 -“зебра”	0,4182	0,3172	0,9774
ξ_2 -“зебра”	0,2706	0,8499	0,3693

В табл. 2 приведены значения фактора сходимости (множителя уменьшения евклидовой нормы ошибки для одной итерации алгоритма) приближённого решения системы (17) для случая Лапласовой сетки с помощью CGC-алгоритма с нулевым начальным приближением для слоя пакета, изображенного на рис. 1, со значениями параметров $\gamma=1$ (так называемый V-цикл), $\nu_1=1$, $\nu_2=0$. Звёздочкой отмечены релаксационные схемы, для которых выбиралось оптимальное значение параметра релаксации ω ; для остальных схем использовалось значение $\omega=1$.

Выводы из данного исследования и перспективы дальнейших исследований в данном направлении. Анализ результатов применения CGC-алгоритма для различных областей D (слоёв пакета) показал, что его скорость сходимости определяется в основном значениями двух факторов, а именно минимальным и максимальным значением аспектного коэффициента $A=h_x/h_y$ ячеек получающейся сетки в физической области $A_{min} = \min(A)$, $A_{max} = \max(A)$. Когда $A_{min} \cong A_{max} \cong 1$, хорошо работают все схемы последовательной (поточечной) релаксации (Якоби, Гаусса–Зейделя, “шахматки”), что продемонстрировано для сетки 128×64 в табл. 2. В случае ячеек, вытянутых в ширину или в высоту, последовательные релаксационные схемы перестают работать, и необходимо применение блочных релаксаций на ξ_1 - или ξ_2 -линиях. В случае, когда $A_{min} < 1$ и $A_{max} < 1$ (или $A_{max} \cong 1$) соответствует сетке, ячейки которой вытянуты в высоту, и нужно применять релаксационные схемы на ξ_1 -линиях (см. данные для сетки 256×32 в табл. 2). Если $A_{max} > 1$ и $A_{min} > 1$ (или $A_{min} \cong 1$) ячейки сетки в основном вытянуты в ширину, следует использовать релаксационные схемы на ξ_2 -линиях (см. данные для сетки 32×256 в табл. 2). Наихудший случай для реализации многосеточного алгоритма соответствует значениям $A_{min} < 1$ и $A_{max} > 1$ (сетка содержит ячейки, вытянутые как в длину, так и в высоту). Это может иметь место в случае значительной вариабельности функций $S_i(x_j)$, определяющих верхнюю и нижнюю границы слоя. Тут рекомендуется выбирать значение длины слоя пакета $L \gg H$ и устанавливать число разбиений сетки на нулевом уровне таким, чтобы обеспечить значение аспектного коэффициента, большее единицы для всех ячеек сетки. Поскольку нагрузка на слоистые пакеты предполагается преимущественно вертикальной, то градиент упругих (упругопластических) перемещений вдоль координаты x_2 будет намного больше, чем в направлении x_1 , поэтому аккуратный выбор числа разбиений сетки не повлияет на точность получаемого приближённого решения.

Список использованных источников:

1. Трофімов О. В. Багатосіткові методи у зворотних задачах для систем із розподіленими параметрами / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2014. – № 1 (51). – С. 140–147.
2. Liseikin V. D. A Computational Differential Geometry Approach to Grid Generation / Liseikin V. D. – N.-Y. : Springer, 2007. – 293 p.
3. Trottenberg U. Multigrid / Trottenberg U., Oosterlee C. W., Schuller A. – N.-Y. : Academic Press, 2001. – 644 p.
4. Thompson J. F. Handbook of Grid Generation / Thompson J. F., Soni B., Weatherill N. – N.-Y. : CRC Press, 1999. – 1096 p.
5. Wienands R. Extended local Fourier analysis for multigrid: Optimal smoothing, coarse grid correction, and preconditioning / Wienands R.
6. Трофімов О. В. Застосування локального аналізу Фур’є для конструювання багатосіткових ітераційних методів розв’язання пружних та пружнопластичних задач для шаруватих основ / О. В. Трофімов // Вісник Академії митної служби України. Серія: “Технічні науки”. – 2015. – № 1 (53). – С. 140–155.
7. Wienands R. Practical Fourier Analysis for multigrid methods / R. Wienands, W. Joppich. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC Press, 2005. – 212 p.