DOI: https://doi.org/10.32836/2521-6643-2021.2-62.5
УДК 532.5;536.24

Бразалук О. К., аспірант Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
Гоман О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
Бразалук Ю. В., кандидат фізико-математичних наук Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ

Складність постановки та розв'язання задач, що формулюються в областях з рухомими або невідомими межами полягає в наявності рухомої межі області розв'язку, що називається вільною поверхнею. З математичної точки зору, особливість цього класу задач полягає в специфічній нелінійності: залежній від розв'язку зміні за часом форми області розв'язку. Рухливість межі області розв'язку породжує специфічну нелінійність крайової задачі, що вносить додаткові труднощі в процес її чисельного розв'язання. Для чисельного розв'язання задачі застосовувався регулярний варіант методу граничних елементів. У запропонованій статті аналізуються і порівнюються різні функціональні представлення форми рухомої межі, а також різні схеми її розрахунку. Обговорюваний матеріал проілюстровано декількома прикладами чисельного моделювання потенціальної течії з вільною межею та чисельного розв'язання задачі Стефана.

Ключові слова: *рухома межа; задача Стефана; наближення Лейбензона; регулярний алгоритм методу граничних елементів; метод граничних елементів.*

The motion of a fluid with a free surface is the subject of a separate section of theoretical hydromechanics. The development of this direction is stimulated by numerous applications to modern technologies, especially for the design and operation of hydraulic structures, shipbuilding and navigation, the study of ebbs and flows, tsunamis and other natural phenomena. The complexity of setting and *solving this class of problems lies in the presence of a moving boundary of the solution area, called the free surface. From a mathematical point of view, the peculiarity of the considered class of problems lies in a specific non-linearity: a solution-dependent change in time of the shape of the solution area.*

Assuming the fluid to be incompressible and in viscid, under the conditions of the potentiality of the field of body forces and the potentiality of the flow at the initial moment of time, we obtain that the flow is described by the Laplace equation for the velocity potential with the traditional boundary conditions of non-flow at the solid boundaries of the flow region, as well as special boundary conditions at the free boundary, one of which, the Cauchy-Lagrange integral, contains a quadratic nonlinearity in the flow velocity. The assumption made about the potentiality of the alternating field of body forces greatly simplifies the formulation of the problem and allows us to consider the problem formulated above as a model one for a wide class of fluid flows with a free surface. For the numerical solution of the problem described above, a regular version of the boundary element method was used. The use of regular algorithms of the boundary element method makes it possible to bypass numerous computational limitations and improve in one way or another the approximations of the shape of the moving boundary, known and unknown functions on it. To do this, the Laplace equation was transformed into a boundary integral equation of potential theory, and the time interval in which the flow field is studied was divided into the corresponding number of sufficiently small intervals. At each time step, the resulting boundary integral equation was solved using the standard algorithm of the boundary element method. The calculation of the new position of the free boundary of the flow was carried out using the Euler scheme.

Key words: *moving boundary; Stefan problem; Leibenson approximation; regular algorithm of the boundary element method; boundary element method.*

Постановка проблеми. В останні роки в обчислювальній механіці суцільних середовищ та в обчислювальному тепломасообміні простежується стійка тенденція збільшення частки задач, що формулюються в областях з рухомими або невідомими межами. Враховуючи, що переважна більшість таких задач добре відома протягом досить довгого часу, зазначена тенденція може бути пояснена насамперед успіхами методів чисельного розрахунку та зростання інсталяційної бази обчислювальної техніки, які надають суттєві додаткові можливості для розв’язання складних та ресурсоємких задач аналізованих областей. Найчастіше крайові задачі в областях змінної геометричної форми і близькі до них за математичними особливостями крайові задачі в областях з невідомою межею виникають у гідромеханіці – це так звані течії з вільною поверхнею та спільні течії рідин, що не змішуються, а також в теорії тепломасообміну – так звані задачі тепломасообміну з фазовими переходами, наприклад, найпростіші задачі про фазовий перехід у нерухомих середовищах – задача Стефана (у різних дослідженнях задачею Стефана називають різні за фізичною природою задачі тепломасообміну з фазовими переходами, але тут і далі розумітимемо задачу Стефана в означеному вище сенсі). Область застосування задач з рухомими межами не вичерпується двома зазначеними прикладами; досить, наприклад, згадати задачу М. М. Веригіна з теорії фільтрації, але переважна більшість задач класу, що розглядається, припадає саме на вищеназвані випадки. Актуальність даної статті як частини великих та інтенсивних досліджень, що проводяться в зазначених галузях, визначається, з одного боку, необхідністю розвитку математичної фізики як науки в одному з найскладніших її розділів, а з іншого – прикладним значенням задач, які належать до розглядуваних класів, що робить розробку методів їх чисельного розв'язку дуже важливою.

Щоб підтвердити останню тезу, досить згадати, яку важливу роль відіграє вивчення течій рідини з вільною поверхнею для проектування та експлуатації гідротехнічних споруд, суднобудування та мореплавання, дослідження припливів та відливів, цунамі та інших природних явищ. Водночас задачі тепломасообміну з фазовими переходами описують ключові процеси під час виробництва численних матеріалів, насамперед, у металургійної промисловості. Крім того, процеси тепломасообміну з фазовими переходами визначають перебіг багатьох гідрометеорологічних явищ, таких як утворення сніжинок, градин чи дощових крапель у хмарах, випадання роси, утворення інію та зледеніння. Наведений далеко не повний список прикладних проблем, що моделюються крайовими задачами в областях з рухомими межами, наочно демонструє прикладне значення розвитку відповідних методів моделювання. Існує очевидна аналогія між розглянутими задачами течії з вільною поверхнею та задачею Стефана. Ця аналогія використовуватиметься в цій статті, хоча основна увага приділятиметься течії з вільною поверхнею, як більш складному випадку. Метод граничних елементів найпоширеніший, найпотужніший і найбільш універсальний серед альтернативних методів. Основна ідея методу граничних елементів полягає у переході від вихідної диференціальної постановки крайової задачі до граничних інтегральних рівнянь теорії потенціалу з їх подальшим розв'язуванням за допомогою процедур, близьких до методу скінчених елементів. Для лінійних однорідних диференціальних рівнянь у частинних похідних метод граничних елементів зменшує на одиницю розмірність області розв'язання задачі, локалізуючи процедуру розв'язання лише на межі області. Оскільки в цьому дослідженні розглядаються лише крайові задачі еліптичного типу з лінійним диференціальним оператором, а саме для таких задач метод граничних елементів ефективніший, ніж традиційні методи скінчених різниць та скінчених елементів, то доцільність застосування в даному випадку саме методу граничних елементів не викликає жодного сумніву.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі про течії рідини з вільною поверхнею добре відомі і вивчені, вони описані в численних публікаціях як у лінеаризованій постановці [1], так і в повністю нелінійних формулюваннях [2]. Значна кількість літератури повністю або частково присвячена методам розв'язання подібних задач. На жаль, обмежені рамки даної статті не дають можливості навести повний огляд і відповідний аналіз напряму, який розглядається, тому обмежимося посиланням на монографію Н. В. Полякова [3] та колективну монографію [10], що присвячені застосуванню методів обчислювальної теорії потенціалу для розв'язання задач течії рідини з вільною поверхнею. Не вдаючись у подробиці, зазначимо, що переважна більшість праць щодо течій рідини з вільною поверхнею пов'язана з мореплаванням, гідротехнічними спорудами, хвилями на поверхні рідини, що трапляються під час течій з великими числами Рейнольдса, для яких з достатнім ступенем точності можна використовувати модель потенційної течії ідеальної нестисливої рідини. Проблематика тепломасообміну з фазовими переходами висвітлена у фундаментальних монографіях [4–5], які присвячені задачі Стефана. Історично склалося так, що серед усіляких методів розв'язання задачі Стефана найпопулярнішими були аналітичні підходи та метод скінчених різниць, що легко можна з'ясувати, звернувшись до оглядової монографії [6]. Число застосувань методу граничних елементів до задач Стефана відносно невелике, хоча для квазістаціонарного наближення, відомого також як наближення Лейбензона, метод граничних елементів дуже ефективний. У даній статті використовується не традиційний метод граничних елементів [7–8], а його регулярний варіант, описаний у праці [9]. Використання регулярних алгоритмів методу граничних елементів уможливлює обійти численні обчислювальні обмеження та вдосконалити таким чином апроксимацію форми рухомої межі та відомих і невідомих функцій на ній.

Мета статті – зробити аналіз можливостей удосконалення граничноелементних алгоритмів для розв'язання еліптичних крайових задач в областях з рухомою межею.

Виклад основного матеріалу. Постановка крайових задач в областях з рухомими межами. Опишемо потенційну течію ідеальної нестисливої рідини в термінах потенціалу швидкостей φ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\,; \tag{1}$$

з граничними умовами на вільній поверхні у вигляді інтеграла Коші–Лагранжа [1–3] із заданим тиском P

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=q(\tau) \tag{2}$$

та кінематичними умовами у вигляді

$$\dot{x}=V_x\,,\dot{y}=V_y\,,\,\dot{z}=V_z\,, \tag{3}$$

які фізично означають, що рідинна частинка, котра була в певний час на вільній поверхні, на ній під час руху і залишається. Усі позначення в (1)–(3) розуміються у традиційному сенсі, граничні умови на інших межах також ставляться традиційним чином і стислості заради наводити їх не будемо.

Аналогічним є формулювання задачі Стефана в наближенні Лейбензона (задача (1)–(3) є аналогом однофазної задачі Стефана, нижче наведено двофазну задачу):

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2}=0\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}=0\,, \tag{5}$$

$$T_1\Big|_{\Gamma p.t}=T_2\Big|_{\Gamma p.t}=T_{p.t}\,, \tag{6}$$

умова Стефана

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma p.t}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma p.t}=\sigma\rho V_n\,, \tag{7}$$

де $\Gamma_{p.t}$ – межа фазового переходу;

$T_{p.t}$ – температура фазового переходу;

V_n – швидкість просування межі фазового переходу у бік нормалі до цієї межі. Всі інші позначення розуміються у традиційному сенсі [5–6]; умови на інших межах ставляться традиційним чином і тут опущені.

Застосування методу граничних елементів. Застосуємо до рівнянь Лапласа (1), (4), (5) метод теорії потенціалу [7–8] та перетворимо їх на граничні інтегральні співвідношення згідно зі схемою:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\int_{\Gamma}\varphi_0(x,y,z,x_0,y_0,z_0)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial n(x,y,z)}dS(x,y,z)-$$
$$-\int_{\Gamma}u(x,y,z)\frac{\partial\varphi_0(x,y,z,x_0,y_0,z_0)}{\partial n(x,y,z)}dS(x,y,z), \tag{8}$$

де φ_0 – фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа:

$$\varphi_0=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}; \tag{9}$$

Г – повна межа області розв'язування. У праці [9] було запропоновано розташовувати точки коллокації не на межі області, як у монографіях [7, 8, 10], а в середині області. Це дає змогу після стандартної розбивки межі Г на граничні елементи використовувати широкий спектр апроксимацій як самої межі області розв'язування, так і відомих, а також і невідомих функцій на ній. Оскільки за такого підходу всі інтеграли (8) є регулярними, вони можуть бути визначені за допомогою будь-яких квадратурних формул.

Якщо для задачі Стефана формулювання крайової задачі на кожному з кроків за часом є природним, то для течії з вільною поверхнею виникає певна проблема під час використання інтеграла Коші–Лагранжа (2) при переході від заданого тиску до значення потенціалу або його нормальної похідної на межі. Наведемо один із прийомів [3] переходу з попереднього часового шару на наступний. Нехай у певний момент часу τ задачу про течію з вільною межею вже розв'язано, тобто відомо $\varphi(\tau)$, $\Gamma(\tau)$, $V_x(\tau)$, $V_y(\tau)$, $V_z(\tau)$, і для рідинної частинки, що міститься на вільній межі, з координатами ($x(\tau)$, $x(\tau)$, $x(\tau)$), можна за схемою Ейлера визначити нове положення:

$$\begin{aligned}x(\tau+\Delta\tau)&=x(\tau)+V_x(\tau)\Delta\tau,\\ y(\tau+\Delta\tau)&=y(\tau)+V_y(\tau)\Delta\tau,\\ z(\tau+\Delta\tau)&=z(\tau)+V_z(\tau)\Delta\tau.\end{aligned} \tag{10}$$

Щоб сформулювати крайову задачу в момент часу $\tau+\Delta\tau$, необхідно визначити в точці ($x(\tau+\Delta\tau), y(\tau+\Delta\tau), z(\tau+\Delta\tau)$) потенціал швидкостей або його нормальну похідну. Розкладемо потенціал швидкостей у ряд Тейлора в околі моменту часу τ і точки ($x(\tau), x(\tau), x(\tau)$). Тоді:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\tau+\Delta\tau, x(\tau+\Delta\tau), y(\tau+\Delta\tau), z(\tau+\Delta\tau)) = \varphi(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau)\delta\tau + \\
&+ V_x{}^2(\tau)\Delta\tau + V_y{}^2(\tau)\Delta\tau + V_z{}^2(\tau)\Delta\tau + O((\Delta\tau)^2) = \varphi(\tau, x(\tau), y(\tau), z(\tau)) + q(\tau) - \\
&- \frac{P}{\rho} - gz(\tau) + \frac{1}{2}(V_x{}^2(\tau) + V_y{}^2(\tau) + V_z{}^2(\tau)) + O((\Delta\tau)^2).
\end{aligned} \tag{11}
$$

Зазначимо, що всі величини у правій частині співвідношень (11) є відомими та належать до моменту часу τ, тобто співвідношення (11) визначають граничні умови Дирихле для крайової задачі, що описує потенціал швидкостей на новому тимчасовому шарі.

Результати розрахунків. Наведемо результати розрахунку обтікання одно- та двоколових профілів шаром рідини з невідомою заздалегідь стаціонарною вільною поверхнею.

Глибина шару рідини на нескінченності приймалась $h_0 = 1$, швидкість потоку умовно бралась $V_\infty = 1$; коловий контур мав радіус $R = 0{,}25$, центр кола був розташований на глибині $h = 0{,}5$ від поверхні дна шару. Досліджувалась форма вільної поверхні залежно від величини циркуляції по одному чи двох колах.

Значення визначальних параметрів для рис. 1а) наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Визначальні параметри для випадку одного контуру в шарі рідини

Випадок	Відстань від центра до дна	Значення функції струму на контурі	Циркуляція по контуру
а)	0,62	–0,30	– 0,488 779
б)	0,62	–0,15	– 0,076 936
в)	0,3	0,00	0,472 590
г)	0,5	0,15	1,028 989
д)	0,5	0,30	1,572 495
е)	0,5	0,40	1,915 717

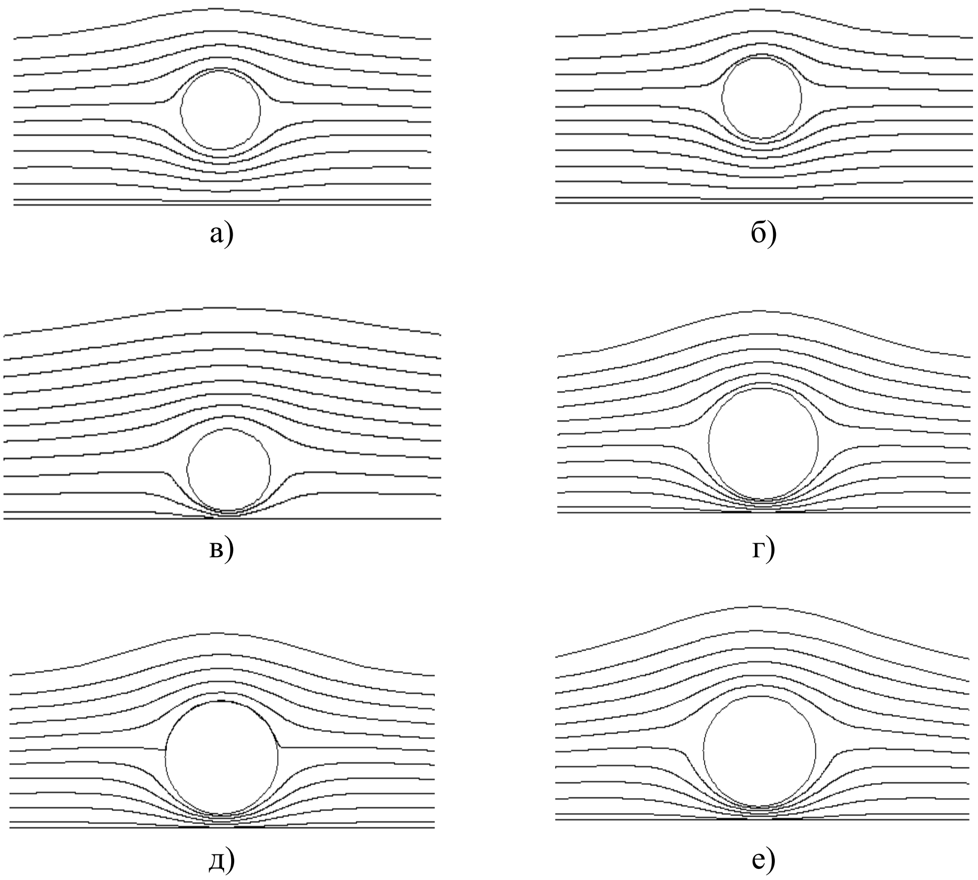
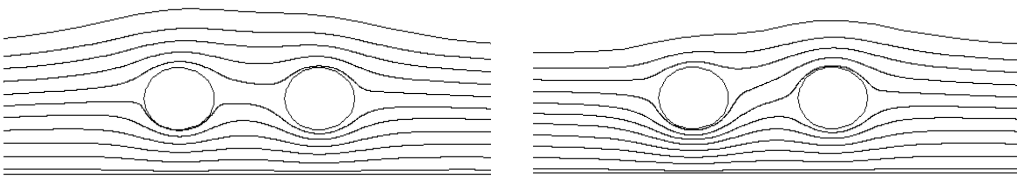


Рис. 1. Форма вільної поверхні

Таблиця 2

Параметри гідродинамічної взаємодії двох колових контурів з вільною поверхнею у шарі рідини скінченної глибини (рис. 2)

№	Параметри гідродинамічної взаємодії					
	γ_1	F_{x1}	F_{y1}	γ_2	F_{x2}	F_{y2}
а)	0,3210	0,6865E–01	–0,7272	0,3210	–0,6865E–01	–0,7272
б)	0,5664	0,4926E–01	–1,1875	0,7303E–01	–0,4917E–01	–0,2888



а)   б)

Рис. 2. Взаємодія двох колових контурів з вільною поверхнею у шарі скінченної глибини

У табл. 2 γ_1, γ_2 – циркуляції по контурах; F_{x1}, F_{x2}, F_{y1}, F_{y2} – горизонтальна та вертикальна сили взаємодії відповідно.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Відсутність придатних для порівняння аналітичних розв'язків змусило авторів оцінювати похибку тестових розрахунків непрямим шляхом, удаючись до порівняння з розрахунками на подрібнених сітках. За всієї обмеженості можливостей такого підходу він чітко показує переваги підвищення точності та ефективності завдяки застосуванню регулярного методу граничних елементів. Основний висновок, зроблений у цій статті – позитивна оцінка перспектив застосування регулярних алгоритмів методу граничних елементів для розв'язання крайових задач в областях з рухомими межами. Застосування методу МГЕ для задачі з вільною поверхнею рідини з одним чи двома контурами у шарі рідини засвідчимо його працездатність, що уможливлює рекомендувати його як робочий метод для розрахунку таких та подібних задач.

Список використаних джерел:

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. Москва, 1936. 304 с.

2. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами: монография. Киев: Наукова думка, 1969. 208 с.

3. *Поляков Н. В.* Методы решения нелинейных краевых задач. Задачи проникания: монография. Днепропетровск: Изд-во ДНУ, 2005. 356 с.

4. *Рубинштейн Д. И.* Проблема Стефана: монография. Рига: Звайгзне, 1967. 457 с.

5. *Мейрманов А. М.* Задача Стефана: монография. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.

6. *Рядно А. А., Миносян Я. П.* Сопряженные задачи теплопереноса в системах тел с подвижными границами: монография. Днепропетровск: ДГУ, 1983. 116 с.

7. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. Москва: Мир, 1987. 524 с.

8. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. Москва: Мир, 1984. 494 с.

9. *Евдокимов Д. В.* Разработка прямых регулярных алгоритмов вычислительной теории потенциала с точками коллокации внутри области решения // Восточноевропейский журнал передовых технологий. 2015. № 2/7 (74). С. 16–25.

10. *Бразалук Ю. В., Гоман О. Г., Євдокимов Д. В., Кочубей О. О., Поляков М. В.* Метод граничних елементів в задачах гідродинаміки та теплопровідності: монографія. Дніпро: Ліра, 2019. 228 с.

References:

1. Sretenskij L. N. Teorija volnovyh dvizhenij zhidkosti. M. : 1936. 304 s.

2. Logvinovich G. V. Gidrodinamika techenij so svobodnymi granicami : monografija. K. : Naukova dumka, 1969. 208 s.

3. Poljakov N. V. Metody reshenija nelinejnyh kraevyh zadach. Zadachi pronikanija : monografija. D. : Izd-vo DNU, 2005. 356 s.

4. Rubinshtejn D. I. Problema Stefana: Monografija. Riga : izd. Zvajgzne, 1967. 457 s.

5. Mejrmanov A. M. Zadacha Stefana : monografija. Novosibirsk : Nauka, 1986. 239 s.

6. Rjadno A. A., Minosjan Ja. P. Soprjazhennye zadachi teploperenosa v sistemah tel s podvizhnymi granicami: monografija. Dnepropetrovsk : Izd-vo DGU, 1983. 116 s.

7. Brebbija K., Telles Zh., Vroubel L. Metody granichnyh jelementov. M. : Mir, 1987. 524 s.

8. Benerdzhi P., Batterfild R. Metod granichnyh jelementov v prikladnyh naukah. M. : Mir, 1984. 494 s.

9. Evdokimov D. V. Razrabotka prjamyh reguljarnyh algoritmov vychislitel'noj teorii potenciala s tochkami kollokacii vnutri oblasti reshenija Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. 2015. № 2/7 (74). S. 16–25.

10. Brazaluk Ju. V., Goman O. G., Evdokimov D. V., Kochubej O. O., Poliakov M. V. Metod granychnyh elementiv v zadachah gidrodynamiky ta teploprovidnosti : monografija. Dnipro : Lira, 2019. 228 s.