У роботі запропоновані математична модель і метод інформаційного управління транспортними потоками з метою мінімізації заторних ситуацій, що виникають на митних пунктах пропуску під час перетинання державного кордону

Ключові слова: інформаційне керування, заторні ситуації, митний пункт пропуску, транспортний потік, мережна модель

В работе предложена математическая модель и метод информационного управления транспортными потоками с целью минимизации заторных ситуаций возникающих на таможенных пунктах пропуска при пересечении государственной границы

Ключевые слова: информационное управление, заторные ситуации, таможенный пункт пропуска, транспортный поток, сетевая модель

The article is devoted to the mathematical model and method of information management of the traffic for minimizing traffic jam at the customs check-points through state border

Keywords: information management, traffic jam, customs check-points, traffic, network model

УДК 656.13

ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫМИ ПОТОКАМИ

Б.И. Мороз
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*
Контактный тел.: (0562) 46-95-13
А.В. Трофимов
Кандидат физико-математических наук, доцент
Кафедра транспортных систем и технологий**
Контактный тел.: (0562) 46-95-86
Л.В. Кабак
Кандидат технических наук, доцент*
Контактный тел.: 050-452-17-41
*Кафедра информационных систем и технологий**
**Академия таможенной службы Украины
ул. Рогалёва, 8, г. Днепропетровск, 49000

Вступление

В настоящее время в связи с развитием внешнеэкономической деятельности предприятий и организаций Украины, а также граничащих с ней государств постоянно увеличиваются потоки автотранспорта, как на дорогах, так и в таможенных пунктах пропуска, что приводит к образованию пробок, как в городах, так и на таможенных пунктах попуска. В работе рассматриваются информационные модели и метод управления поведением водителей, которые позволяют перенаправить транспортные средства на менее загруженные таможенные пункты пропуска для минимизации заторных ситуаций.

Проблема математического моделирования транспортных потоков рассматривалась, начиная с 1950 года. В это время появились первые макроскопические модели Лайтхилла–Уизема–Ричардса (LWR) транспортный поток уподобляется потоку сжимаемой жидкости, и описывается законом сохранения количества (погонной плотности) автомобилей.[1] При этом в модели постулируется существование функциональной зависимости (уравнения состояния) между величиной потока автомобилей (произведения его скорости на плотность) и плотностью. Эту зависимость называют фундаментальной диаграммой.

В последующие годы класс микро и макромоделей был значительно расширен. В современном макроскопическом подходе транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений (для плотности и скорости потока) с диффузией [Payne, 1971; Уизем, 1977]. [2] При этом уравнение состояния потока входит во второе уравнение этой системы как стремление водителей двигаться с желаемой скоростью. Хотя с момента публикации этих фундаментальных работ прошло более 60 лет на данный момент проблема образования предзаторных и заторных ситуаций еще не решена. Во многих современных работах математических работах предлагаются модели, основанные на трех фазах Кернера [3], которые наблюдаются в эмпирически полученных данных.

В современных методах решения задач управления транспортными потоками с целью минимизации заторов целесообразно использовать теоретико-игровую модель. В работе российского ученного Чхартишвили А. Г. представлены результаты исследований теоретических и прикладных теоретико-игровых моделей информационного управления. [4] Исходя из этого, можно сделать вывод, что задача управления транспортными потоками с применением моделей информационного управления для минимизации заторных ситуаций, которые возникают при прохождении таможенного досмотра автотранспорта в таможенных пунктах пропуска, является актуальной.

Постановка задачи

В таможенной службе Украины в настоящее время имеется система видеонаблюдения, которая имеет возможность отследить состояние очередей. Предлагается внедрить систему, которая будет иметь возможность обработать информацию о состоянии очередей и передать её через систему спутниковой навигации в GPS-навигаторы, установленные на транспорте, который будет пересекать границу, с целью ликвида-

Рис. 1. Схема передачи информации для системы GPS навигации

ции заторных ситуаций. Схема системы навигации представлена на рис. 1. Таким образом, для решения данной задачи необходимо разработать математическую модель и методы, позволяющие нужным образом влиять на стратегию принятия решений водителями, избирающими тот или иной маршрут, для ликвидации заторных ситуаций.

Результаты исследования

Рассмотрим следующую модель транспортной сети, предназначенную для исследования процессов информационного управления транспортными потоками через пункты таможенного контроля представленную на рис. 2.

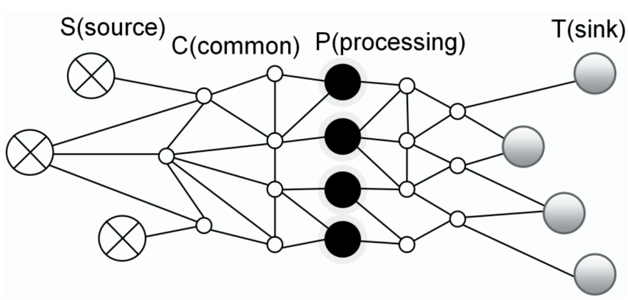

Рис. 2. Модель транспортной сети

Пусть G = (V,E) – граф транспортной сети, в которой выделяются четыре группы узлов:

- S_i – источники транспортного потока;
- T_j – стоки транспортного потока;
- P_k – пункты обработки (таможенного контроля);
- C_l – обычные узлы (пункты выбора направления движения).

Рассматриваемая транспортная сеть обладает тем свойством, что удаление из графа G всех узлов P_k вызывает его деление на подграфы в каждом из которых могут находится либо узлы из набора S_i либо узлы из набора T_j , но никогда не может быть одновременно источника и стока.

Пропускную способность каждого ребра графа G как и узлов из набора C_l, считаем не ограниченной. Ограничение пропускной способности будем рассматривать только в узлах P_k . Каждое ребро графа транспортной сети $(u,v)\in E$ характеризуется средним временем $\tau(u,v)$ прохождения по нему транспортного потока.

В качестве постоянных, определяющих параметры сетевой модели, будем рассматривать следующие:

$\tau(u,v)$ – время прохождения потоком транспорта ребра (u,v) графа транспортной сети (считаем эту величину постоянной, пренебрегая возможным уменьшением пропускной способности ребра).

В качестве функций, определяющих параметры сетевой модели, определим следующие:

$h_k(t)$ – значение пропускной способности узла обработки P_k в момет времени t.

В качестве граничных условий примем следующие функции, определенные в узлах-источниках транспортно потока:

$q_{ij}(t)$ – значение величины транспортного потока из источника с номером i в сток с номером j в момент времени t.

В качестве расчетных параметров модели примем ассоциированную с каждым ребром графа $(u,v)\in E$ набор функций x(u,v)j (t) которые означают величину транспортного потока в пункт назначения с номером j, который в момент времени t выходит из узла u по направлению к узлу v вдоль ребра (u,v).

В каждый момент времени t в узлах графа транспортной сети должны выполняться следующие балансные соотношения.

1. В узлах- источниках:

$$x_j^{(u,v)} = \alpha_j^{(u,v)} q_{uj}(t). \quad (1)$$

Здесь

$$\alpha_j^{(u,v)} = \alpha_j^{(u,v)}(t,G,I).$$

– функция, отражающая предпочтения водителей транспортных средств при выборе маршрута движения. В общем случае эта функция зависит от времени, структуры графа G транспортной сети (в особенности, от расстояний между узлами графа), а также от информации I, сообщаемой водителю информационной системой о степени загруженности пунктов обработки.

Для выполнения баланса входящих и выходящих потоков необходимо в каждый момент времени выполнение равенства

$$\sum_v \alpha_j^{(u,v)} = 1 \qquad (2)$$

2. В общих узлах

$$x_j^{(u,v)} = \alpha_j^{(u,v)} \sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)}). \qquad (3)$$

Функции $\alpha_u^{(u,v)}$ имеют такой же смысл, как и в узлах – источниках

3. В узлах u обработки определим функцию очереди $p_{uj}(t)$ транспортного потока имеющего цель сток сети с номером j. Тогда общая очередь в пункте обработки u будет определяться суммой

$$P_u(t) = \sum_j p_{uj}(t) \qquad (4)$$

Будем считать, что система обслуживания не делает предпочтений в обработке потоков следующих в различные пункты назначения. Тогда общая пропускная способность $h_u(t)$ будет делиться пропорционально количеству автотранспорта в очереди, следующего в пункт j.

Если функция $P_u(t)>0$, то величина потока автотранспорта, выехавшего из пункта обработки u, не будет превосходить части

$$\beta_{uj}(t) = \frac{p_{uj}(t)}{p_u(t)} \qquad (5)$$

величины пропускной способности пункта u.

$$x_j^{(u,v)}(t) = \alpha_j^{(u,v)} \beta_{uj}(t) h_u(t), \qquad (6)$$

где коэффициенты $\alpha_j^{(u,v)}$ удовлетворяют условию (2).

Изменение длины очереди в этом случае будет удовлетворять дифференциальному соотношению

$$\frac{dp_{uj}(t)}{dt} = \sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)}) - \sum_w x_j^{(u,w)}(t) \qquad (7)$$

Если функция $P_u(t)=0$ (очереди на обработку нет), то величина выходящих из пункта обработки u потоков транспорта будет определяться тем, достаточно ли пропускной способности узла обработать все входящие в него потоки. Иными словами, если выполняется соотношение

$$\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)}) \le h_u(t), \qquad (8)$$

то величины выходящих потоков определяются формулой (3). Прирост очереди в этом случае будет равен 0.

Если сумма входящих потоков превышает пропускную способность узла, то есть выполняется соотношение

$$\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)}) > h_u(t), \qquad (9)$$

то образуется очередь, и пропускная способность узла определяется выражением

$$x_j^{(u,v)} = \alpha_j^{(u,v)} \gamma_{uj}(t) h_u(t), \qquad (10)$$

где коэффициенты $\gamma_{uj}(t)$ играют роль делителей пропускной способности $h_u(t)$ между потоками, аналогичных коэффициентам $\beta_{uj}(t)$ из формулы (6):

$$\gamma_{uj}(t) = \frac{\sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)})}{\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}(t-\tau_{(w,u)})}. \qquad (11)$$

Прирост очереди в этом случае будет определяться соотношением (7).

Для корректной постановки сформулированной дифференциальной задачи на сетевом графе должны быть сформулированы также начальные условия. В качестве этих условий необходимо задать значения функций $x_j^{(u,v)}(t)$ и функций $q_{ij}(t)$ в некоторые отрицательные моменты времени, а именно в моменты времени $t \in [-\tau_{(w,u)};0]$:

$$x_j^{(u,v)}(t-\tau_{(w,u)}) = \varphi^{(u,v,w)}(t), t \in [0;\tau_{(w,u)}] \qquad (12)$$

$$q_j^{(u,v)}(t-\tau_{(w,u)}) = \psi_{ij}(t), t \in [0;\tau_i], \tau_i = \max_v \tau_{(i,u)} \qquad (13)$$

Кроме того в качестве начальных условий должны быть также заданы размеры очередей в пунктах обработки в начальный момент времени:

$$p_{uj}(0) = p_{uj}^0 \qquad (14)$$

Таким образом, имеем задачу нахождения функции $x_j^{(u,v)}(t)$, удовлетворяющих на отрезке $t \in [0;T]$ соотношениям (1) – (11) и начальным условиям (12) – (13). Указанная задача аналогична задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, но задана на сетевом графе.

Для ее решения будем использовать разностный метод дискретизации дифференциальной задачи. Для этого разобьем отрезок $[0;T]$ на частичные отрезки точками $t_0 = 0,\ t_1 = \Delta t,\ t_2 = 2\Delta t,\ \ldots, t_N = N\Delta t = T$, где N – число интервалов деления отрезка. В качестве приближения к значению функции $x_j^{(u,v)}(t_n),\ n = 0,1,\ldots,N$, будем рассматривать разностное приближение $x_j^{(u,v)}[t_n]$, удовлетворяющее системе разностных соотношений, аппроксимирующих исходную дифференциальную задачу (1) – (13). В силу начальных условий (12) – (13) разностные величины $x_j^{(u,v)}[t_n]$ должны быть определены и для некоторых отрицательных значений $t \in [-\tau_{(w,u)};0]$, для таких значений t_n имеем:

$$x_j^{(u,v)}[t_n] = x_j^{(u,v)}(t_n) \qquad (15)$$

а $x_j^{(u,v)}(t_n)$ определяется соотношениями (12) – (13).

Таким образом, будем рассматривать задачу нахождения сеточных функций на $x_j^{(u,v)}[t_n]$ сетке значений

$$\ldots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N. \qquad (16)$$

Будем предполагать, что все интервалы $\tau_{(w,u)}$ кратны величине шага сетки Δt, и, следовательно, все значения $t_n - \tau_{(w,u)}$ принадлежат рассматриваемой сетке.

Рассмотрим разностные соотношения, аппроксимирующие исходную дифференциальную задачу, во всех типах сеточных узлов.

1. В узлах-источниках:

$$x_j^{(u,v)}[t_n] = \alpha_j^{(u,v)} q_{(uj)}(t_n). \qquad (17)$$

В общих узлах

$$x_j^{(u,v)}[t_n] = \alpha_j^{(u,v)} \sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}] \qquad (18)$$

2. В узлах u обработки определим разностный аналог $p_u[t_n]$ функции очереди $p_{uj}(t)$, причем согласно начальному условию (14)

$$p_{uj}[0] = p_{uj}^0 \ .$$

Разностный аналог общей очереди $P_u[t_n]$ определится соотношением

$$P_u[t_n] = \sum_j p_{uj}[t_n].$$

Если $P_u[t_n] > 0$, то разностные аналоги выходящих потоков определятся соотношением

$$x_j^{(u,v)}[t_n] = \alpha_j^{(u,v)} \beta_{uj}[t_n] h_u(t_n), \qquad (19)$$

где

$$\beta_{uj}[t_n] = \frac{p_{uj}[t_n]}{p_u[t_n]} \qquad (20)$$

Для определения длины очереди в момент времени t_{n+1} дифференциальное соотношение (7) заменим разностным, аппроксимируя значение производной $\frac{dp_{uj}(t_n)}{dt}$ правой конечной разностью

$$\frac{dp_{uj}(t_n)}{dt} \approx \frac{p_{uj}[t_{n+1}] - p_{uj}[t_n]}{\Delta t} \qquad (21)$$

В итоге вместо соотношения (7) будем иметь

$$p_{uj}[t_{n+1}] = p_{uj}[t_n] + (\sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}] - \sum_w x_j^{(u,v)}[t_n]) \cdot \Delta t \quad (22)$$

В случае, когда $P_u[t_n] = 0$, соотношение для величин, выходящих из u потоков, определяется разностным аналогом соотношения (8). Иными словами, если выполняется неравенство

$$\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}] \le h_u(t_n), \qquad (23)$$

то величины выходящих потоков определяются формулой (18). Длина очереди в следующий дискретный момент времени будет оставаться нулевой:

$$p_{uj}[t_{n+1}] = 0.$$

Если же выполняется неравенство

$$\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}] > h_u(t_n), \qquad (24)$$

то величины выходящих потоков определяются соотношениями

$$x_j^{(u,v)}[t_n] = \alpha_j^{(u,v)} \gamma_{uj}[t_n] h_u(t_n), \qquad (25)$$

где сеточные функции $\gamma_{uj}[t_n]$ определяются выражением

$$\gamma_{uj}[t_n] = \frac{\sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}]}{\sum_j \sum_w x_j^{(w,u)}[t_n - \tau_{(w,u)}]}. \qquad (26)$$

Значение длины очереди в последующий момент времени t_{n+1} по-прежнему будет определяться соотношением (22). В силу того, что мы заменили производную в соотношении (21) конечной разностью, которая имеет первый порядок аппроксимации, следует ожидать, что для достаточно гладких исходных данных исходной задачи (1)-(14) и ее разностный аналог (15)-(26) также будет иметь первый порядок аппроксимации (и сходимости).

Для решения разностной задачи (15)-(26) используем явный метод. Решение начинается с вычисления величин $x_j^{(u,v)}[t_0]$ $(t_0 = 0)$ для всех ребер сетевого графа по формулам (17)-(19), (25). После этого производится пересчет длин очередей $p_{uj}[t_1]$ в пунктах обработки в момент времени t_1 по формулам (22), (24). Далее вычисления $x_j^{(u,v)}[t_n]$ повторяются для моментов времени t_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, а значение длин очередей вычисляются для момента времени t_{n+1}.

Сделаем некоторые замечания относительно выбора коэффициентов $\alpha_j^{(u,v)}$, входящих в соотношение (1), (3), (6), (10). Эти коэффициенты выражают долю водителей транспортных средств, реализующих ту или иную стратегию оптимального достижения конечной цели (вероятно, быстрейшего достижения конечного пункта j, хотя возможны и другие критерии «оптимальности») при получении информации I о состоянии очередей в таможенных пунктах пропуска. Как уже говорилось выше, подобные вопросы о предпочтениях водителей достаточно сложны и мало исследованы.

Математические модели, подобные предложенной в данной статье, предоставляют удобный инструментарий для таких исследований.

Рассмотрим некоторые частные случаи выбора функций разделения потоков.

1. Водители не имеют никакой информации о состоянии очередей. Тогда наиболее вероятная стратегия водителей – выбор кратчайшего маршрута в сетевом графе от источника i до стока j. В этом случае значение коэффициента $\alpha_j^{(u,v)}$ определяется выражением

$$\alpha_j^{(u,v)} = \begin{cases} 1, \text{если ребро } (u,v) \text{ принадлежит кратчайшему пути из } u \text{ в } j, \\ 0, \quad \text{в противном случае}. \end{cases} \quad (27)$$

2. Водители имеют полную информацию о состоянии очередей в таможенных пунктах пропуска (информацию о длинах очередей и скорости обработки). Тогда вероятная стратегия водителей будет заключаться в сопоставлении сумм времен движения по транспортной сети через пункты пропуска и времени стояния в очереди в этих пунктах. Иными словами, если $\Pi_j^{(u),(k)}$ – кратчайший путь в сетевом графе от вершины u в сток j, проходящий через пункт обработки k, а $T_j^{(u),(k)}$ – время движения по этому пути, то выбор коэффициентов $\alpha_j^{(u,v)}$ будет производиться по формуле

$$\alpha_j^{(u,v)} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } (u,v) \text{ принадлежит пути } \tilde{\Pi}_j^{(u)}, \\ 0, \quad \text{в противном случае}. \end{cases} \quad (28)$$

Здесь $\tilde{\Pi}_j^{(u)} = \Pi_j^{(u),(k_{min})}$ - путь от вершины u до стока j через пункт обработки k_{min}, на котором будет достигаться минимум по переменной k величины

$$T_j^{(u),(k_{min})} + P_{k_{min}}(t) = \min_k \{T_j^{(u),(k)} + P_k(t)\}. \quad (29)$$

В рассмотренных частных случаях лишь один коэффициент $\alpha_j^{(u,v)}$ для каждого узла u будет не равен 0. Это связано с тем, что водители имеют одинаковый целевой критерий (добраться до пункта назначения за минимальное время) и одинаковые стратегии достижения указанной цели. В реальных случаях как целевые критерии, так и стратегии разных водителей различаются, поэтому в таких случаях отличны от 0 более одного коэффициента $\alpha_j^{(u,v)}$.

Выводы

В результате проведенных исследований была построена математическая модель процессов прохождения транспортных потоков через транспортную сеть с определенными выделенными узлами обслуживания. Указанная модель может быть использована для моделирования сложного поведения водителей транспортных средств в условиях предоставления им определенной информации о наличии и состоянии очередей в пунктах обслуживания. В отличие от имеющихся моделей, разработанная система отслеживает состояние очередей на таможенных пунктах пропуска и передает информацию в систему управления, которая определяет, что необходимо сообщить водителям для желательного перераспределения транспортных потоков.

Предложен метод дискретизации получающейся дифференциальной задачи на графе, пригодный для создания численных алгоритмов приближенного решения задачи.

Направлением дальнейшего исследований могут быть более сложные модели, в которых будут учитываться качество и пропускную способность транспортных путей, планируемую загрузку таможенных пунктов пропуска и другие факторы, определяющие эффективность использования транспортной инфраструктуры.

Литература

1. Lighthill M. J.On kinematic waves: II. A theory of tract on long crowded roads/ Lighthill M. J., Whitham G. B. // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. 1955. V. 229. P. 317-345.
2. Payne H. J. Models of freeway tract and control / Payne H. J. //Mathematical Models of Public Systems. Ed. Bekey G. A. V. 1. La Jolla, CA: Simulation Council, 1971. P. 51-61.
3. Kerner B. S. Experimental Features of Self-Organization in Traffic Flow. / Kerner B. S. //Phys. Rev. Let. 17. No 20. – 1998 – V. 81.
4. Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели информационного управления. / Чхартишвили А.Г. // М.: ЗАО «ПМСОФТ», 2004. – 227 с.