Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара

В.А. Куземко, О.Г. Шевельов, І.В. Пешат

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2012

ВСТУП

Диференціальне числення – це розділ математики про похідні, диференціали та їх застосування під час дослідження властивостей функцій. Основою диференціального числення є такі важливі поняття математики, як дійсні числа (числова пряма), змінна, функція, границя, неперервність, що являють собою предмет вивчення розділу «Вступ до математичного аналізу».

Фізичний, механічний, економічний та будь-які інші процеси можна описати деякою функцією. Кількісне дослідження процесів полягає у вивченні властивостей цієї функції, найбільш просте та важливе питання якого є поводження функції в околі певної точки – зростає вона чи спадає, яка швидкість цього зростання чи спадання. Інструменти для дослідження функцій є похідна та диференціал.

Головний принцип диференціального числення − вивчення функцій «у малому», тобто в такому малому околі кожної точки x, що поводження функції $y = f(x)$ близьке до поводження лінійної функції, а її графік близький до відрізка прямої лінії.

Основи диференціального числення наприкінці XVII ст. незалежно один від одного розробили видатні вчені Ісак Ньютон (1643−1727) та Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 −1716). Ньютон дійшов до поняття похідної (флюксії), розв’язуючи задачу про миттєву швидкість руху , а Лейбніц – розглядаючи геометричну задачу проведення дотичної до кривої. Останній сформулював означення диференціала та інтеграла і запропонував символи d і $\int$ для їх позначення. Позначення y', $f'(x)$ похідної увів французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736 − 1813). Але в механіці та фізиці для похідної за часом досі застосовують символи $\dot{y}, \dot{x}, \dot{z}$, введені Ньютоном.

Строге математичне обґрунтування методів диференціального числення розробив лише в XIX ст. французький математик Огюстен Луї Коші (1789−1857) на основі теорії границь та неперервності функцій.

1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1.1. ОЗНАЧЕННЯ ПОХІДНОЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку $[a,b]$. Надамо аргументу x, який належить цьому проміжку $x \in [a,b]$, такого приросту Δx, що нове значення $x + \Delta x$ аргументу буде також належати цьому проміжку, тобто $x + \Delta x \in [a,b]$. Тоді функція $y = f(x)$ набуде приросту, який дорівнює $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (рис. 1.1.1).

Запишемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1.1.1)$$

Знайдемо границю цього відношення за умови, що Δx наближається до 0, тобто $\Delta x \to 0$.

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за змінною x називають границю відношення приросту Δy функції до приросту Δx аргументу за умови, що ця границя існує, а Δx довільним чином наближається до нуля:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (1.1.2)$$

Для позначення похідної функції $y = f(x)$ застосовують символи, які ввели Лагранж та Лейбніц:

$$y', \quad y'_x, \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}.$$

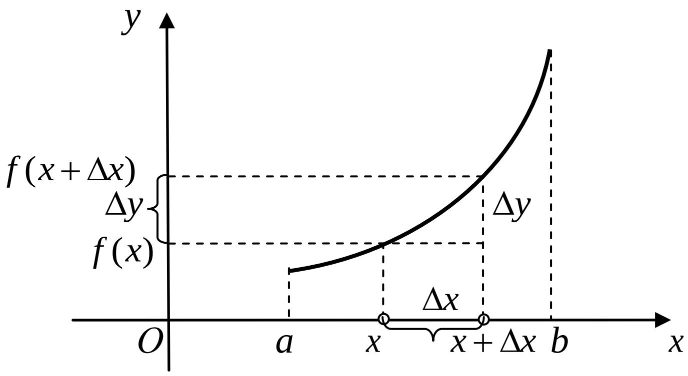

Рис.1.1.1. Приріст функції та аргументу

У загальному випадку похідна $f'(x)$ є функція аргументу x. Якщо зафіксувати деяке значення аргументу, тобто покласти $x = x_0$, то можна знайти число, яке буде **значенням похідної в точці** $x = x_0$. Його позначають одним із таких символів:

$$y'\Big|_{x=x_0}, \quad f'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}, \quad \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Якщо в деякій точці границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ не існує, то в цій точці не існує і похідна $f'(x)$. Якщо ця границя нескінченна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то похідну також називають нескінченною, а якщо скінченна – то скінченною.

Операцію знаходження похідної функції $y = f(x)$ називають **диференціюванням** цієї функції. Тому вирази «диференціювати функцію» і «знайти похідну функції» тотожні.

Із означення похідної випливає алгоритм її знаходження, який розглянемо на прикладах.

Приклад 1.1.1. Застосовуючи означення, знайти похідну функції $f(x) = C$, де $C = const,\ x \in (-\infty, \infty)$.

Розв'язання. Надамо змінній x приросту Δx. Отримаємо нове значення аргументу: $x + \Delta x$. Знайдемо нове значення функції: $f(x + \Delta x) = C$.
Обчислимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Визначимо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Відповідь: $(C)' = 0$.

Приклад 1.1.2. Застосовуючи означення, знайти похідну функції $f(x) = x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Розв'язання. Надамо змінній x приросту Δx. Функція набуде такого приросту:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Обчислимо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Знайдемо границю відношення:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Відповідь: $(x)' = 1$.

Приклад 1.1.3. Застосовуючи означення, знайти похідну функції $f(x) = x^2 + 5x + 6$ у точках x_0 та $x_0 = 1$.

Розв'язання. Надамо аргументу $x = x_0$ приросту Δx. Отримаємо $x_0 + \Delta x$.
Знайдемо нове значення функції:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 5 \cdot (x_0 + \Delta x) + 6 =$$

$$= {x_0}^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 + 5 \cdot x_0 + 5\Delta x + 6.$$

Обчислимо приріст функції:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\cdot x_0 + 5\Delta x + 6 - x_0^2 - 5\cdot x_0 - 6 =$$
$$= 2x_0\Delta x + 5\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + 5 + \Delta x).$$

Визначимо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + 5 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + 5 + \Delta x.$$

Знайдемо границю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 5 + \Delta x) = 2x_0 + 5.$$

Оскільки $f'(x_0) = 2x_0 + 5$, то $f'(x_0 = 1) = 2\cdot 1 + 5 = 7$.

Крім того, зазначимо, що $(x^2)' = 2x, \quad (5x)' = 5$.

Відповідь: $f'(x_0) = 2x_0 + 5$, $f'(1) = 7$.

1.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ, МЕХАНІЧНИЙ, ФІЗИЧНИЙ ТА ЕКОНОМІЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Розглянемо дві класичні задачі, розв'язання яких обумовило формування поняття похідної. Хоч ці задачі мають різний зміст, їх розв'язують за одним алгоритмом – знаходять границю відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

Задача про дотичну. Геометричний зміст похідної

Розглянемо задачу побудови дотичної до кривої в деякій точці. Нехай на проміжку $[a,b]$ задано функцію $y = f(x)$, $x_0 \in [a,b]$ − внутрішня точка цього проміжку. Графік функції $y = f(x)$ є деяка крива. Візьмемо на цій кривій довільну нерухому точку M_0 із координатами (x_0, y_0) та деяку рухому точку $M(x, y)$ із координатами $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, де $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Проведемо через ці точки січну M_0M, яка утворює кут φ з додатним напрямом осі Ox (рис.1.2.1).

Із трикутника M_0MA видно, що тангенс кута φ нахилу січної до осі Ox, тобто кутовий коефіцієнт січної $k_{січ}$, дорівнює

$$k_{січ} = \mathrm{tg}\varphi = \frac{AM}{AM_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

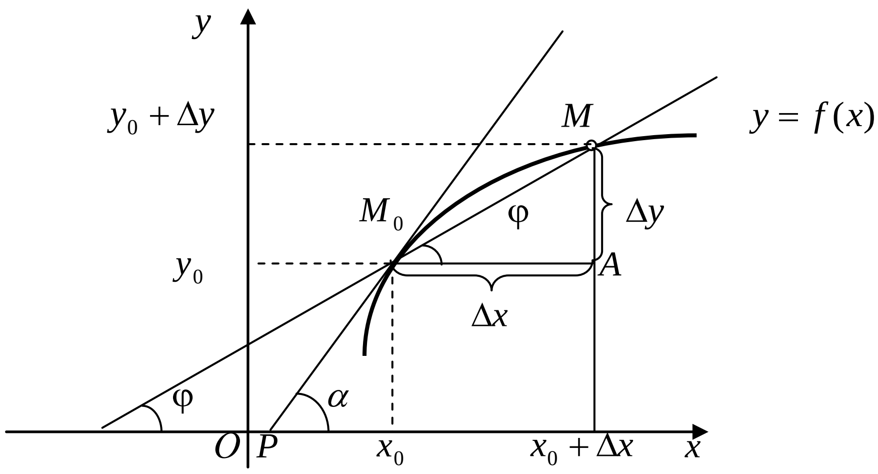

Рис. 1.2.1. Геометричний зміст похідної

Означення. Дотичною до кривої $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0,y_0)$ називають граничне положення січної M_0M, коли точка M прямує вздовж кривої до точки M_0.

Коли приріст аргументу наближається до нуля ($\Delta x \to 0$), точка M прямує вздовж кривої $y=f(x)$ до точки M_0 $(M \to M_0)$, а січна M_0M, повертаючись навколо точки M_0, займає деяке граничне положення, тобто переходить у дотичну PM_0. При цьому границя кута φ буде дорівнювати значенню кута α нахилу дотичної PM_0 до осі Ox, тобто $\lim\limits_{M\to M_0}\varphi=\alpha$. Як наслідок $\lim\limits_{M\to M_0}\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\lim\limits_{M\to M_0}\varphi)=\operatorname{tg}\alpha$. Тому кутовий коефіцієнт $k_{дот}$ дотичної визначатиме співвідношення

$$k_{дот}=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{M\to M_0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Із цього випливає геометричний зміст похідної.

Значення похідної $f'(x_0)$ функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою x_0 **дорівнює кутовому коефіцієнту** $k_{дот}$ **дотичної** до графіка функції в цій точці , або, що те саме, тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці $M_0(x_0, f(x_0))$.

Знайдемо **рівняння дотичної.** Застосуємо рівняння довільної прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ у заданому напрямку, який визначає кутовий коефіцієнт k, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (1.2.1)$$

Якщо ця довільна пряма є дотичною до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, то з геометричного змісту похідної випливає, що

$$k = k_{дот} = f'(x_0).$$

Тоді з формули (1.2.1) отримаємо рівняння дотичної до графіка функцій $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \qquad (1.2.2)$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Означення. Нормаллю до кривої $y = f(x)$ називають пряму, що проходить через точку дотику $M_0(x_0, y_0)$, перпендикулярно до дотичної.

Умовою перпендикулярності нормалі та дотичної є таке співвідношення між їх кутовими коефіцієнтами:

$$k_{дот} \cdot k_{норм} = -1, \text{ тобто } k_{норм} = -\frac{1}{k_{дот}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Якщо $k = k_{норм}$, із формули (1.2.1) одержимо **рівняння нормалі** до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (1.2.3)$$

Приклад 1.2.1. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^2$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Коли $x_0 = 1$, то $y_0 = (x_0)^2 = 1^2 = 1$, тобто $M_0(x_0, y_0) = M_0(1;1)$. Оскільки похідна $f'(x) = (x^2)' = 2x$ (див. прикл.1.1.3), то $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Застосовуючи формули (1.2.2) та (1.2.3), запишемо рівняння дотичної до кривої $y = x^2$ у точці $M_0(1;1)$

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 1 = 0$$

та нормалі

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Відповідь. $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$ – рівняння дотичної та нормалі відповідно.

Задача про миттєву швидкість. Механічний зміст похідної

Розглянемо задачу про миттєву швидкість нерівномірного прямолінійного руху матеріальної точки *M*. Шлях s, який ця точка пройде від свого початкового положення, залежить від часу t, тобто шлях є функція $s = s(t)$ від часу. Якщо за час $t = t_0$ точка M пройшла шлях $s(t_0)$ від початкового положення, то за час $t = t_0 + \Delta t$ буде пройдено шлях $s(t_0 + \Delta t)$. За проміжок часу Δt буде пройдено відрізок шляху $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.

Середню швидкість руху за проміжок часу Δt визначимо за виразом

$$v_c = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Чим менший проміжок часу Δt, тим точніше середня швидкість відповідатиме швидкості в даний момент часу, тобто миттєвій швидкості.

Миттєвою швидкістю $v_м$ або швидкістю у даний момент часу називають границю відношення приросту шляху Δs до приросту часу Δt, коли $\Delta t \to 0$, тобто

$$v_м = \lim_{\Delta t \to 0} v_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t)\Big|_{t=t_0}.$$

Похідна $s'(t)$ шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості $v_м$ нерівномірного прямолінійного руху.

У наведеному визначенні полягає механічний зміст похідної.

Фізичний зміст похідної

Який би фізичний процес або залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приросту функції до приросту аргументу буде середньою швидкістю зміни цього процесу, а значення похідної $y'(x_0)$ − його миттєвою швидкістю в точці $x = x_0$. **Це і є фізичний зміст похідної**. Наведемо деякі приклади.

1. Кутова швидкість ω оберту твердого тіла навколо осі є похідна від кута φ оберту тіла відносно цієї осі за часом t: $\omega = \varphi'(t)$.
2. Швидкість хімічної реакції $\nu = \nu(t)$ − похідна за часом t від кількості речовини $M(t)$, що вступила в реакцію: $\nu = M'(t)$.

3. Теплоємність c – похідна від кількості теплоти W за температурою T: $c = W'(T)$.
4. Сила струму I є похідна від кількості електрики Q за часом t: $I = Q'(t)$.

Економічний зміст похідної

Розглянемо задачу про визначення продуктивності праці в деякий момент часу. Нехай функція $y = f(t)$ виражає залежність кількості виробленої продукції за часом. Треба знайти продуктивність праці в момент часу $t = t_0$.

Кількість продукції, яку вироблено за час $t_0 + \Delta t$, дорівнює $f(t_0 + \Delta t)$, а приріст виробленої продукції − $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Тоді середня продуктивність праці за час Δt дорівнює $\Delta y / \Delta t$, а продуктивність праці в момент часу $t = t_0$ будемо визначати як границю середньої продуктивності за умови, що $\Delta t \to 0$:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} P_c = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t)\Big|_{t=t_0}.$$

Таким чином, продуктивність праці в момент часу $t = t_0$ є похідна за часом від кількості виробленої продукції.

1.3. ОДНОСТОРОННІ ПРАВА Й ЛІВА ПОХІДНІ

Поняття правої та лівої похідних визначають за допомогою односторонніх границь.

Означення. Правою похідною функції $y = f(x)$ у точці $x = x_0$ називають праву границю відношення приросту Δy функції до приросту Δx аргументу за умови, що ця границя існує, $\Delta x > 0$ і $\Delta x \to 0$:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1.3.1)$$

Аналогічно визначають **ліву похідну**:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1.3.2)$$

Праву та ліву похідні позначають також символами $f'_+(x)$ та $f'_-(x)$.

Якщо функцію $y = f(x)$ задано на відрізку $[a,b]$, то під похідною в точці a розуміють праву похідну, а в точці $b-$ ліву.

Якщо функція $y = f(x)$ **має в точці** $x = x_0$ **похідну** $y' = f'(x_0)$, то вона **має в цій точці однакові праву й ліву похідні**, і навпаки, якщо функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ однакові праву й ліву похідні, то вона має в цій точці похідну

$$f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0). \tag{1.3.3}$$

Існують функції, які мають у точці $x = x_0$ і праву, і ліву похідні, але вони не однакові, тому функція не має похідної в цій точці.

Приклад 1.3.1. Знайти похідну в точці $x_0 = 1$ функції $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 2x-1, & 1 < x \le 2. \end{cases}$ (рис.1.3.1).

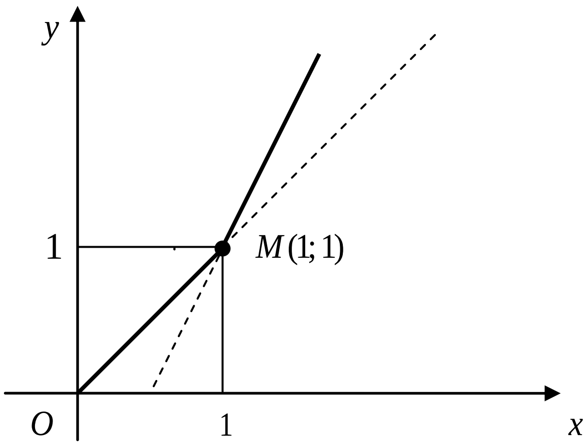

Рис. 1.3.1. Відсутність похідної в точці

Розв'язання. Обчислимо праву і ліву похідні функції в точці $x_0 = 1$:

$$f'(1+0) = \lim_{\Delta x \to 1+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{2(x+\Delta x)-1-2x+1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$$f'(1-0) = \lim_{\Delta x \to 1-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Оскільки $f'(1+0) \ne f'(1-0)$, то умова (1.3.3) порушена.

Відповідь. У точці $x_0 = 1$ функція не має похідної, а дотична − відсутня.

1.4. ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $X = [a,b]$, $x_0 \in [a,b]$ − точка з цього проміжку, а Δx − такий приріст аргументу x, що $x_0 + \Delta x \in [a,b]$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають **диференційовною в точці** $x = x_0$, якщо вона має в цій точці скінченну похідну, тобто коли існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) = A. \qquad (1.4.1)$$

Якщо функція диференційовна в кожній точці x проміжку X, то говорять, що функція диференційовна на проміжку X.

Наведена далі теорема встановлює зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції в точці.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ **диференційовна** в деякій точці $x = x_0$, то вона у цій точці **неперервна**.

Дійсно, якщо існує скінченна похідна $f'(x_0) = A$ (A −дійсне число), тобто скінченна границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = A,$$

то відношення $\Delta y / \Delta x$ приросту функції до приросту аргументу відрізняється від цієї границі A на нескінченно малу величину $\alpha(\Delta x)$, яка прямує до нуля, коли $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) = A + \alpha(\Delta x).$$

Тоді

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \to 0$$

за умови , що $\Delta x \to 0$. Тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

А це і означає, що функція $y = f(x)$ неперервна в точці $x = x_0$.

Обернене твердження неправильне. Якщо функція неперервна в деякій точці, то вона може не мати в цій точці похідної. Функція, наведена в прикл. 1.3.1, неперервна в точці $x_0 = 1$ (рис.1.3.1), але не має похідної в цій точці.

Таким чином, **неперервність функції** в точці **є лише необхідна**, **але не достатня** умова диференційовності функції в цій точці.

Взагалі, якщо функція неперервна, але не має похідної в точці $x = x_0$, то або немає дотичної до графіка функції в цій точці, або є вертикальна дотична.

У точках розриву функція не має похідної.

Приклад 1.4.1. Установити існування дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $x = 0$: а) $y = |x|$; б) $y = \sqrt[3]{x}$.

Розв'язання. а) Функція $y = |x|$ (рис.1.4.1,*а*) у точці $x = 0$ неперервна, але недиференційовна, тому що права та ліва похідні не однакові, що порушує умову (1.3.3):

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \qquad f'(0+0) \neq f'(0-0).$$

б) Функція $y = \sqrt[3]{x}$ (рис.1.4.1,*б*) у точці $x = 0$ неперервна, але недиференційовна, тому що порушується умова (1.4.1) існування скінченної похідної:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = \infty.$$

Відповідь. У точці $x = 0$: а) дотична не існує; б) існує вертикальна дотична.

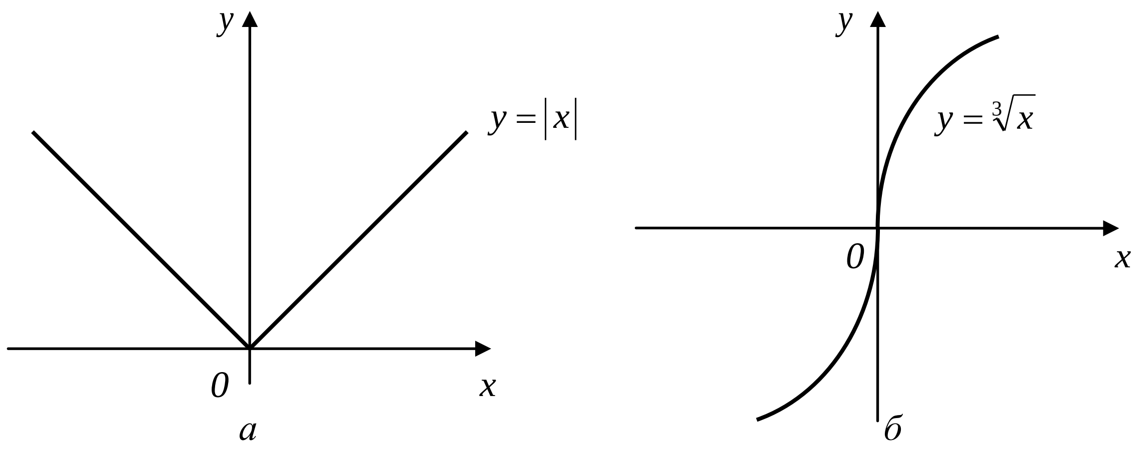

Рис. 1.4.1. Випадки недиференційовності неперервних функції в точці $x = 0$:
а − дотична відсутня; *б* − існує вертикальна дотична $x = 0$

Питання та завдання для самоконтролю

1. У чому полягає основний принцип диференціального числення?
2. Дайте означення похідної функції та похідної функції в точці.
3. У чому полягає геометричний та механічний зміст похідної?
4. Сформулюйте фізичний та економічний зміст похідної. Наведіть приклади.
5. Наведіть алгоритм обчислення похідної виходячи з її означення.
6. Дайте означення правої та лівої похідних.
7. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції.
8. Яку функцію називають диференційовною в точці та на відрізку?
9. Сформулюйте теорему про зв'язок між диференційовністю та неперервністю функції в точці.
10. Доведіть, застосовуючи означення похідної, що

а) $(3x^2)' = 6x$; б) $(x^2+1)' = 2x$; в) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$.

11. Складіть рівняння дотичної до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.
12. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = x^3$ у точці $x_0 = 1$.

2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

У попередньому розділі було знайдено деякі похідні функцій, на основі означення похідної (прикл. 1.1.1 −1.1.3). На практиці диференціювання здійснюють за допомогою узагальнених правил і формул, які дозволяють знаходити похідні функцій без застосування означення похідної.

2.1. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці *x*. Надамо аргументу x приросту Δx. Функції набудуть приросту $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$ і $\Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$. Сформулюємо правила диференціювання, під час доведення яких будемо застосовувати означення похідної і властивості границь.

Правило. Сталий множник $C = const$ можна виносити за знак похідної, тобто

$$(Cu)' = Cu' . \qquad (2.1.1)$$

Дійсно,

$$y' = (Cu)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{C \cdot u(x+\Delta x) - C \cdot u(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu' .$$

Правило. Похідна $y' = (u \pm v)'$ **алгебричної суми** двох функцій дорівнює алгебричній сумі похідних цих функцій, тобто

$$(u \pm v)' = u' \pm v'. \qquad (2.1.2)$$

Дійсно,

$$y' = (u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Це правило поширюється на будь-яку скінченну кількість диференційовних функцій:

$$(u \pm v \pm w \pm \cdots \pm q)' = u' \pm v' \pm w' \pm \cdots \pm q'. \qquad (2.1.3)$$

Правило. Похідну $(u \cdot v)'$ **добутку** двох функцій знаходять за формулою

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \qquad (2.1.4)$$

Дійсно,

$$y' = (u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u v + u \Delta v + \Delta u \Delta v - u \cdot v}{\Delta x} =$$

$$= v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'v + uv' + 0 \cdot u' = u'v + uv'.$$

Ми застосували теорему про зв'язок диференційовності й неперервності функцій. Оскільки функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то вони в цій точці неперервні, тобто $\Delta u \to 0$ і $\Delta v \to 0$ за умови, що $\Delta x \to 0$. Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Це правило поширюється на будь-яку скінченну кількість диференційовних функцій. Наприклад, у випадку трьох функцій маємо

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'. \qquad (2.1.5)$$

Правило. Похідну $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ **частки** двох функцій за умови, що $v \neq 0$, знаходять за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v \neq 0). \qquad (2.1.6)$$

Дійсно,

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\Delta x\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)} = \frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)} = \frac{u'v - uv'}{v(v+0\cdot v')} = \frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Правило. Нехай $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ диференційовні функції своїх аргументів. Тоді існує **похідна** y'_x **складеної функції** $y = f[\varphi(x)]$ за незалежною змінною x, яка дорівнює добутку похідної y'_u функції $y = f(u)$ за проміжним аргументом u та похідної u'_x функції $u = \varphi(x)$ за незалежною змінною x, тобто

$$y'_x = \left(f[\varphi(x)]\right)' = y'_u \cdot u'_x. \tag{2.1.7}$$

Дійсно,

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u\cdot u'_x.$$

У ході доведення ми застосували неперервність диференційовної функції $u = \varphi(x)$. Тому коли $\Delta x \to 0$, і $\Delta u \to 0$.

Зауваження. Складена функція може залежати від будь-якої скінченної кількості проміжних змінних, але правило її диференціювання не змінюється. Наприклад, якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(t)$, $t = \gamma(x)$ − диференційовні функції своїх аргументів, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x. \tag{2.1.8}$$

Правило. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна та строго монотонна (зростає чи спадає) на деякому інтервалі (a,b) і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ у довільній точці цього інтервалу. Тоді на відповідному інтервалі (c,d) існує неперервна і строго монотонна **обернена функція** $x = \varphi(y)$, похідну якої знаходять за формулою

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{або} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{2.1.9}$$

Дійсно, для функції $y = f(x)$ справджуються умови існування оберненої функції $x = \varphi(y)$. Оскільки ці функції неперервні, то за умови, що $\Delta x \to 0$, і $\Delta y \to 0$ та навпаки. Крім того, за умови строгої монотонності прирости $\Delta x \neq 0$ і $\Delta y \neq 0$. Тому

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Якщо аргумент оберненої функції у формулі (2.1.9) позначити через x, а саму функцію – через y, тобто змінити позначення аргументу і функції, то одержимо формулу для похідної оберненої функції, якщо вона подана у вигляді $y = \varphi(x)$, а пряма функція – у вигляді $x = f(y)$:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}. \tag{2.1.10}$$

Правило. Якщо функціональна залежність між змінними y та x **задана неявно**, тобто рівнянням

$$F[x, y(x)] = 0, \tag{2.1.11}$$

то для знаходження похідної функції y за змінною x треба продиференціювати рівняння (2.1.11) за змінною x, враховуючи, що $y = y(x)$, і одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Правило. Якщо функціональна залежність між змінними y та x **задана параметрично**, тобто

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t_0 \le t \le T, \tag{2.1.12}$$

функції $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$ диференційовні і функція $x = \varphi(t)$ має диференційовну обернену функцію $t = \Phi(x)$, то похідну параметрично заданої функції знаходять за формулою

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}. \tag{2.1.13}$$

Дійсно, параметрично задану функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(t) = \psi[\Phi(x)]$ із проміжним аргументом $t = \Phi(x)$. Тому за формулами (2.1.7) і (2.1.10) обчислення похідних складеної та оберненої функцій маємо вираз

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}.$$

2.2. ПОХІДНІ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Застосовуючи означення похідної та наведені вище правила диференціювання функцій, знайдемо формули визначення похідних основних елементарних функцій.

Якщо $y = f(x) = C$, де $C = const, x \in (-\infty, \infty)$, то

$$y' = (C)' = 0. \tag{2.2.1}$$

Якщо $y = x$, $x \in (-\infty, \infty)$, то

$$y' = (x)' = 1. \tag{2.2.2}$$

Наведені формули було отримано в прикл. 1.1.1 і 1.1.2.

Якщо $y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$ − **логарифмічна функція**, то

$$y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \tag{2.2.3}$$

Дійсно, застосовуючи властивості логарифмічної функції та другу чудову границю, одержимо вираз

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a \dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{x \cdot \dfrac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a}.$$

Зокрема, коли $a = e$, отримаємо формулу

$$y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Якщо $y = x^{\alpha}$ – **степенева функція**, де α – довільне дійсне число, то

$$y' = (x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}. \qquad (2.2.4)$$

Зокрема,

$$\text{коли } \alpha = -1,\ y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \qquad \text{коли } \alpha = \frac{1}{2},\ y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (2.2.5)$$

Дійсно, за довільних α степенева функція $y = x^{\alpha}$ визначена лише для $x > 0$, тобто вона додатна і її можна прологарифмувати: $\ln y = \alpha \ln x$. Застосовуючи до цієї рівності формули (2.1.7) і (2.1.11) правил диференціювання складеної і неявної функцій, одержимо вираз

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\alpha}{x} y = \frac{\alpha}{x} x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Якщо $y = a^x$ – **показникова функція**, де $0 < a \neq 1,\ x \in (-\infty, \infty)$, то

$$y' = \left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a. \qquad (2.2.6)$$

Зокрема,

$$y' = \left(e^x\right)' = e^x. \qquad (2.2.7)$$

Ці формули мають доведення, аналогічне до попереднього для степеневої функції.

Якщо на інтервалі $x \in (-\infty, \infty)$ задано **тригонометричні функції** $y = \sin x$ і $y = \cos x$, то

$$y' = (\sin x)' = \cos x, \qquad (2.2.8)$$

$$y' = (\cos x)' = -\sin x. \qquad (2.2.9)$$

Доведемо першу з цих формул, друга має аналогічне доведення. Застосовуючи формулу $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$ різниці синусів двох кутів, властивості границь і першу чудову границю, одержимо такий вираз:

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin[(x+\Delta x - x)/2]\cos[(x+\Delta x + x)/2]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)\cos(x+\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x/2) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Якщо задано **тригонометричні функції** $y=\mathrm{tg}\,x$, де $x\neq \pi/2+n\pi$, і $y=\mathrm{ctg}\,x$, де $x\neq n\pi$ (n − ціле число), то

$$y'=(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{2.2.10}$$

$$y'=(\mathrm{ctg}\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{2.2.11}$$

Доведемо першу з цих формул, друга має аналогічне доведення. Застосовуючи формулу (2.1.6) правила диференціювання частки, одержимо вираз

$$y'=(\mathrm{tg}\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Якщо на інтервалі $x\in(-1;1)$ задано **обернені тригонометричні функції** $y=\arcsin x$, $y\in\left(-\pi/2;\pi/2\right)$ і $y=\arccos x$, $y\in\left(0,\pi\right)$, то

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.2.12}$$

$$y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.2.13}$$

Доведемо першу з цих формул, друга має аналогічне доведення. Функція $y=\arcsin x$, $x\in(-1;1)$ є обернена до функції $x=\sin y$, $y\in\left(-\pi/2;\pi/2\right)$. Оскільки на інтервалі $y\in\left(-\pi/2;\pi/2\right)$ функція $x=\sin y$ строго монотонна (зростає), то похідна $x'_y=(\sin y)'_y=\cos y\neq 0$, тобто справджуються умови правила про існування диференційовної оберненої функції, похідну якої знайдемо за формулою (2.1.10):

$$(\arcsin x)'=y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Якщо на інтервалі $x\in(-\infty,\infty)$ задано **обернені тригонометричні функції** $y=\mathrm{arctg}\,x$, $y\in\left(-\pi/2;\pi/2\right)$ і $y=\mathrm{arcctg}\,x$, $y\in\left(0,\pi\right)$, то

$$y'=(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}, \tag{2.2.14}$$

$$y'=(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{2.2.15}$$

Доведемо другу з цих формул, перша має аналогічне доведення. Функція $y=\mathrm{arcctg}\,x$, $x\in(-\infty,\infty)$ є обернена до функції $x=\mathrm{ctg}\,y$, $y\in\left(0,\pi\right)$. Оскільки на інтервалі $y \in (0, \pi)$ функція $x = \operatorname{ctg} y$ строго монотонна (спадає), то похідна $x'_y = (\operatorname{ctg} y)'_y = -\dfrac{1}{\sin^2 y} \neq 0$, тобто справджуються умови правила про існування диференційовної оберненої функції, похідну якої знайдемо за формулою (2.1.10):

$$(\operatorname{arcctg} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{\dfrac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\sin^2 y}} = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Якщо $y = u(x)^{v(x)}$ − **степенево-показникова функція**, $u(x) > 0$, $u(x)$ і $v(x)$ − диференційовні в точці x функції, то

$$y' = \left[u(x)^{v(x)}\right]' = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'. \qquad (2.2.16)$$

Дійсно, оскільки $u(x)$ − додатна, то можна прологарифмувати функцію $y = u^v$:

$$\ln y = \ln u^v = v \ln u.$$

Продиференціюємо цю рівність за змінною x, враховуючи формули (2.1.4) і (2.1.7) диференціювання добутку функцій і складеної функції:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u' \quad \Rightarrow \quad y' = y\left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u'\right).$$

Оскільки $y = u^v$, отримаємо вираз

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{1}{u} u'\right) = u^v v' \ln u + v u^{v-1} u'.$$

Такий прийом, коли спочатку знаходять похідну від логарифма функції, називають **логарифмічним диференціюванням**. Його застосовують для обчислення похідних від степенево-показникових функцій та функцій, які складаються з добутків та часток різних функцій.

Похідну від додатної в точці x функції $y = f(x)$, тобто

$$\left[\ln f(x)\right]' = \frac{y'}{y},$$

називають **логарифмічною похідною**.

2.3. ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ТА ПРАВИЛ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Зведемо отримані в попередніх розділах формули обчислення похідних у таблицю, яку треба запам’ятати.

№	Похідна	№	Похідна
1	$(C)'=0$	14	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$(x)'=1$	15	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	16	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
4	$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	17	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
5	$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	18	$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=u^v v'\ln u+vu^{v-1}u'$, $u(x)>0$
6	$\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$, $0<a\neq 1$	19	$[\ln f(x)]'=\dfrac{y'}{y}$
7	$\left(e^x\right)'=e^x$	20	$(Cu)'=Cu'$, $C=const$
8	$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x}\log_a e=\dfrac{1}{x\ln a}$, $0<a\neq 1$	21	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
9	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	22	$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
10	$(\sin x)'=\cos x$	23	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ $(v\neq 0)$
11	$(\cos x)'=-\sin x$	24	$y'_x=\left(f[\varphi(x)]\right)'=y'_u\cdot u'_x$
12	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	25	$y_x{}'=\dfrac{1}{x'_y}$, $x'_y\neq 0$
13	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	26	$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$, $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $t_0\leq t\leq T$

У прикладах (2.3.1)−(2.3.5) знайти похідні функцій, застосовуючи наведену таблицю та правила диференціювання функцій.

Приклад 2.3.1. а) $y=3x+\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[3]{x}$; б) $y=x^2\cdot\sin x+4^x\cdot\operatorname{tg}x$; в) $y=\dfrac{x\cdot\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)}$.

Розв'язання. а) Застосовуючи правило обчислення похідної алгебричної суми функцій, формули 3 і 20 таблиці і переходячи до дробових показників, знайдемо вираз

$$y' = \left(3x + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{x}\right)' = (3x)' + \left(x^{-2}\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 3 \cdot 1 - 2 \cdot x^{-2-1} - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = 3 - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

б) Застосовуючи правило обчислення похідної алгебричної суми та добутку функцій, формули 3, 6, 10 і 12 таблиці, знайдемо вираз

$$y' = \left(x^2 \cdot \sin x + 4^x \cdot \operatorname{tg} x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' + \left(4^x\right)' \cdot \operatorname{tg} x + 4^x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2x \cdot \sin x +$$

$$+ x^2 \cdot \cos x + 4^x \ln 4 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{4^x}{\cos^2 x}.$$

в) Застосовуючи правила обчислення похідної алгебричної суми, добутку та частки функцій, формули 2, 3 і 16 таблиці, знайдемо вираз

$$y' = \left(\frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)}\right)' = \frac{(x \operatorname{arctg} x)'(1+x^2) - x \operatorname{arctg} x \cdot \left(1+x^2\right)'}{(1+x^2)^2} = \frac{\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2}\right)(1+x^2) - 2x^2 \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x + x - 2x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} = \frac{x + (1-x^2) \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}.$$

Відповідь. а) $y' = 3 - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; б) $y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x + 4^x \ln 4 \cdot \operatorname{tg} x + \dfrac{4^x}{\cos^2 x}$;

в) $y' = \dfrac{x + (1-x^2) \cdot \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$.

Приклад 2.3.2. а) $y = \sin(2x+3)$, б) $y = \cos(4x-1)^5$.

Розв'язання. а) Позначимо $u = 2x+3$. Тоді $y = \sin[u(x)]$ − складена функція. Застосовуючи формули 1, 2, 10 таблиці та правила диференціювання складеної функції, знайдемо вираз

$$y' = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (2x+3)'_x = \cos u \cdot (2 \cdot 1 + 0) = 2\cos(2x+3) .$$

б) Позначимо $v = 4x-1, u = v^5$. Тоді $y = \cos\{u[v(x)]\}$ − складена функція. Застосовуючи формули 1, 2, 3, 11 таблиці та правило диференціювання складеної функції, знайдемо вираз

$$y' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\cos u)'_u \cdot (v^5)'_v \cdot (4x-1)'_x = -\sin u \cdot 5v^4 \cdot (4 \cdot 1 - 0) = -20(4x-1)^4 \cdot \sin(4x-1) .$$

Відповідь. а) $y' = 2\cos(2x+3)$; б) $y' = -20(4x-1)^4 \cdot \sin(4x-1)$.

Приклад 2.3.3. $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$.

Розв'язання. Маємо неявну функцію $F(x,y) = 0$. Застосовуючи правило диференціювання неявної функції і наведену таблицю, знайдемо вираз

$$\left(x^2 + 3xy + y^2 + 1\right)' = (x^2)' + (3x)' \cdot y + 3x \cdot y' + (y^2)' \cdot y' + 0 = 2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0 .$$

Визначимо з цього рівняння вираз для похідної y'.

Відповідь. $y' = -\dfrac{2x+3y}{3x+2y}$.

Приклад 2.3.4. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

Розв'язання. Функціональна залежність між змінними y та x задана параметрично. Застосовуючи формули 10, 11 та 26 таблиці, знайдемо вираз

$$y'_x = \frac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t .$$

Відповідь. $y'_x = -\operatorname{ctg} t$.

Приклад 2.3.5. а) $y = x^{\sin x}$; б) $y = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$.

Розв'язання. а) Маємо степенево-показникову функцію. Прологарифмуємо обидві частини цієї рівності, а потім продиференціюємо їх:

$$\ln y = \ln(x^{\sin x}) = \sin x \cdot \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

Враховуючи, що $y = x^{\sin x}$, знайдемо вираз для похідної y':

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

б) Функція $y = f(x)$ складається з добутків і часток різних функцій. Тому доцільно застосувати логарифмічне диференціювання. Прологарифмуємо обидві частини поданої рівності, а потім продиференціюємо їх:

$$\ln y = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1.$$

Враховуючи вигляд залежності $y = f(x)$, знайдемо вираз для похідної

$$y' = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right].$$

Відповідь. а) $y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$;

б) $y' = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left[\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{3}{x+4} - 1\right]$.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте правила диференціювання алгебричної суми, добутку і частки двох функцій. Наведіть приклади.

2. Сформулюйте правила диференціювання складеної функції.

3. Як знайти похідну неявної функції? Наведіть приклади.

4. Запишіть умови існування та формулу похідної оберненої функції.

5. Що являє собою похідна параметрично заданої функції?

6. У чому полягає логарифмічне диференціювання? Коли його застосовують?

7. Запишіть формули похідних основних елементарних функцій.

8. Доведіть, що:

а) $\left(\cos x + e^x - x\right)' = \sin x + e^x - 1$; д) $\left[(2x+3)(x^2+3x-1)\right]' = 6x^2 + 18x + 7$;

б) $\left(\dfrac{x^3}{4-x}\right)' = \dfrac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2}$; е) $\left[\ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}\right]' = -\dfrac{2x}{1-x^4}$;

в) $\left(\sqrt[3]{x}\cdot 3^x\right)' = 3^{x-1}\cdot\left(\dfrac{1+3x\ln 3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$; є) $\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

г) $\left(a^{\sin x}\right)' = a^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln a$; ж) $\left(x^x\right)' = x^x\cdot(1+\ln x)$.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Із поняттям похідної тісно пов’язане також друге фундаментальне поняття математичного аналізу − диференціал. Від терміна «диференціал» (латин. *differentia* − різниця), який увів Лейбніц, походить і сама назва розділу вищої математики «Диференціальне числення».

3.1. ОЗНАЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛА

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в деякій точці $x \in [a,b]$. Тоді вона буде мати в цій точці скінченну похідну $f'(x) = A$, яку визначають за формулою (1.4.1), а приріст функції можна записати у такому вигляді:

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x, \tag{3.1.1}$$

де $\alpha(\Delta x)$ − нескінченно мала величина, яка прямує до нуля, коли $\Delta x \to 0$.

З наведеного виразу видно, що приріст функції складається з двох доданків. Головна частина $f'(x)\cdot\Delta x = A\cdot\Delta x$ приросту лінійна відносно Δx, друга частина $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ приросту нелінійна відносно Δx (містить Δx у степені, більшому за одиницю).

Нелінійна частина є нескінченно малою величиною вищого порядку порівняно з Δx, тому що границя відношення цих величин дорівнює нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0\,.$$

Головна частина $f'(x)\cdot\Delta x$ є нескінченно мала одного порядку з Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\cdot\Delta x}{\Delta x} = A\,.$$

Означення. Диференціалом dy **функції** $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці

$$dy = f'(x)\Delta x\,. \tag{3.1.2}$$

Розглянемо диференціал функції $y = x$. За формулою (3.1.2)

$$dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x\,,$$

тобто

$$dx = \Delta x\,. \tag{3.1.3}$$

Таким чином, диференціал dx незалежної змінної x дорівнює приросту Δx цієї змінної. Тому формулу (3.1.2) можна записати у вигляді

$$dy = f'(x)dx\,, \tag{3.1.4}$$

звідки

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\,. \tag{3.1.5}$$

Отже, остання формула дозволяє означити похідну $f'(x)$ як **відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної**. Тобто, запис $\dfrac{dy}{dx}$ є не просто символічне позначення похідної, а звичайний дріб, у чисельнику якого стоїть диференціал функції (3.1.2), а в знаменнику – диференціал незалежної змінної (3.1.3).

3.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ДИФЕРЕНЦІАЛА

Проведемо дотичну до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис.3.2.1).

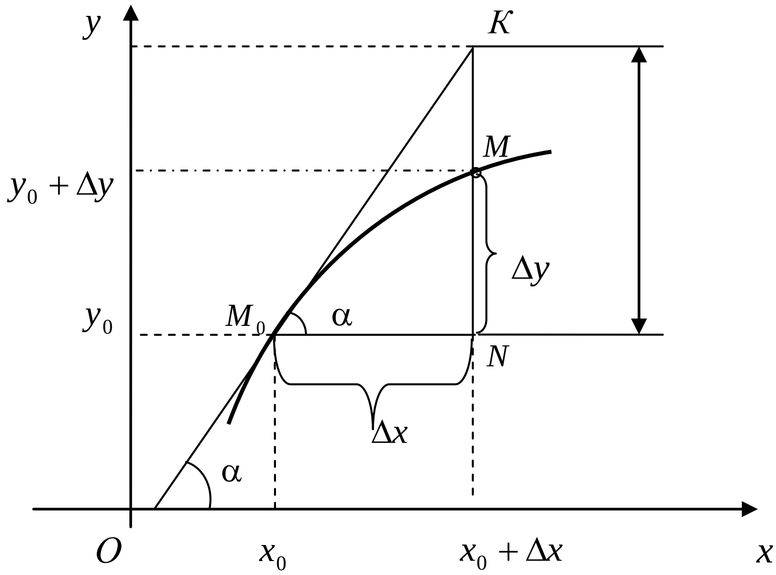

Рис. 3.2.1. Геометричний зміст диференціала

Нехай α − кут нахилу дотичної до осі Ox. Візьмемо на цій кривій другу точку $M(x, y)$ з координатами $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Тоді приросту $\Delta x = M_0N$ аргументу буде відповідати приріст $\Delta y = MN$ функції $y = f(x)$. Із трикутника M_0NK, враховуючи формулу (3.1.4) для диференціала функції , знайдемо

$$KN = M_0N \cdot \mathrm{tg}\alpha = \Delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx = dy,$$

тобто

$$dy = KN.$$

Отже, геометричний зміст диференціала такий. **Диференціал функції** $y = f(x)$ у точці x_0 **є приріст** KN **ординати дотичної** до кривої $y = f(x)$ у цій точці, який відповідає приросту абсциси Δx.

3.3. ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛА ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ

Нехай функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в деякій точці $x \in X$. Оскільки за формулою (3.4.1) диференціал функції дорівнює добутку її похідної на диференціал незалежної змінної, то властивості диференціала здебільшого аналогічні до правил диференціювання.

$$dC = 0, (C = const); \quad d(Cu) = Cdu; \quad d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$d(uv) = udv + vdu; \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Найбільш важлива властивість випливає з правила знаходження диференціала складеної функції. Нехай $y = f(x)$ та $x = \varphi(t)$ − диференційовні функції своїх аргументів і існує складена функція $y = f[\varphi(t)]$. Враховуючи формулу (2.1.7) похідної складеної функції, отримаємо

$$dy = y'_t dt = y'_x \cdot x'_t \cdot dt = y'_x \cdot dx. \qquad (3.3.1)$$

Формула (3.3.1) для диференціала складеної функції має той же вигляд, що і формула (3.1.4) для диференціала функції $y = f(x)$, коли x – незалежна змінна. Цю властивість називають **інваріантністю (незмінністю) форми диференціала**.

Приклад 3.3.1. Обчислити диференціал функції $y = \mathrm{tg}\sqrt[3]{x}$.

Розв'язання. Нехай $u = \sqrt[3]{x}$. Тоді $y = \mathrm{tg}u$. Із формули (3.3.1) отримаємо

$$dy = (\mathrm{tg}u)'_u du = \frac{1}{\cos^2 u} du = \frac{1}{\cos^2(\sqrt[3]{x})}(\sqrt[3]{x})'_x dx = \frac{1}{\cos^2(\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3\cos^2(\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Відповідь. $dy = \frac{1}{3\cos^2(\sqrt[3]{x})} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Із формули (3.1.1) та означення (3.1.2) диференціала випливає, що $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, тобто $\Delta y \approx dy$. Підставивши в дану формулу вирази приросту Δy функції $y = f(x)$ та її диференціала dy, одержимо

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (3.3.2)$$

Приклад 3.3.2. Обчислити наближене значення $\sqrt{17}$.

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подамо число під коренем як суму $17 = 16 + 1$, тобто $x = x_0 + \Delta x$: $\; x_0 = 16, \Delta x = 1$.

Застосовуючи формулу (3.3.2), отримаємо

$$\sqrt{17} \approx f(16) + f'(16) \cdot \Delta x = \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 1 = 4 + \frac{1}{8} = 4{,}125.$$

Відповідь. $\sqrt{17} \approx 4{,}125$.

Якщо розглядати точку $x_0 = 0$, то $\Delta x = x - x_0 = x$. Тому з формули (3.3.2) випливає вираз

$$f(x) \approx f(0) + x \cdot f'(0). \tag{3.3.3}$$

Цю формулу застосовують під час наближеного обчислення значення функції $y = f(x)$ в околі точки $x_0 = 0$.

Приклад 3.3.3. Обчислити в околі точки $x_0 = 0$ значення функції $y = \ln(1 + x)$.

Розв'язання. Похідна складеної функції $y = f[u(x)]$, де $f(u) = \ln u, u = 1 + x$, дорівнює $y'_x = f'[u(x)] = f'_u \cdot u'_x = \dfrac{1}{1+x}(1+x)' = \dfrac{1}{1+x}$. Тоді $f(0) = \ln(1+0) = 0,\ f'(0) = 1$. Застосовуючи формулу (3.3.3), отримаємо $\ln(1+x) \approx 0 + x \cdot 1 = x$.

Відповідь. $\ln(1+x) \approx x$.

3.4. ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ *n*-го ПОРЯДКУ

Диференційовна на проміжку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ має в точках цього проміжку скінченну першу похідну $f'(x)$ (похідну першого порядку), яка в загальному випадку являє собою нову функцію аргументу x (див. табл. похідних). Якщо ця нова функція $f'(x)$ диференційовна в деякій точці $x \in [a,b]$, то вона також має в цій точці скінченну похідну $y''(x) = \left(f'(x)\right)' = f''(x)$, яку називають **другою (похідною другого порядку)** та позначають одним із таких символів:

$$y''(x), \quad y''_{x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

У розд. 1.2.2 було з'ясовано, що перша похідна $s'(t)$ шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості $v_м$ нерівномірного прямолінійного руху. Тому **механічний зміст** похідної $s''(t)$ другого порядку полягає в тому, що **друга похідна шляху за часом дорівнює прискоренню *a* рухомої точки в певний момент часу *t*:**

$$s''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv_м}{dt} = a.$$

Похідні третього й більш високих порядків визначають аналогічно.

Означення. Похідною *n*-го порядку *функції* $y = f(x)$ *називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної* $(n-1)$*-го порядку:*

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x). \tag{3.4.1}$$

Таким чином, щоб обчислити похідну вищого порядку треба послідовно знайти похідні всіх попередніх порядків, застосовуючи правила та формули щодо першої похідної, подані в роз. 2.

Приклад 3.4.1. Знайти четверту похідну функції $y = x^6 - 5x^2 + x - 1$.

Розв'язання. Застосовуючи таблицю похідних та формулу (3.4.1), знайдемо

$$y' = 6x^5 - 10x + 1; \quad y'' = 30x^4 - 10; \quad y''' = 120x^3; \quad y^{(4)} = 360x^2.$$

Відповідь. $y^{(4)} = 360x^2$.

Приклад 3.4.2. Знайти другу похідну неявної функції $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання. Продиференціюємо задане рівняння та знайдемо похідну y':

$$2x + 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Знайдемо другу похідну. Для цього продиференціюємо обидві частини виразу для першої похідної та в одержане співвідношення підставимо вираз для y':

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' \quad \Rightarrow \quad y'' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}.$$

Відповідь. $y'' = -\dfrac{y^2 + x^2}{y^3}$.

3.5. ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на проміжку X. Тоді за формулою (3.1.4) перший диференціал $dy = f'(x)dx$ (диференціал першого порядку) цієї функції дорівнює добутку двох множників: $f'(x)$ і dx. Похідна $f'(x)$ у загальному випаду є диференційовна функція від незалежної змінної x, а множник $dx = \Delta x$ є приріст незалежної змінної x і від значення цієї змінної не залежить. Тому перший диференціал dy також є функція змінної x і можна говорити про диференціал від першого диференціала, тобто про другий диференціал.

Означення. **Другим диференціалом** d^2y функції $y = f(x)$ або диференціалом другого порядку називають диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy). \tag{3.4.2}$$

Застосовуючи формулу (3.1.4), запишемо вираз для другого диференціала. Оскільки $dx = \Delta x$ не залежить від змінної x, то під час диференціювання його можна розглядати як сталий множник і виносити за знак похідної. Тому

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big) = \big(f'(x)dx\big)' dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \tag{3.4.3}$$

Символ dx − це не добуток, а єдиний символ, яким позначають диференціал незалежної змінної . Тому степінь диференціала записують без дужок: замість $(dx)^2$ − dx^2, розуміючи під цим другий степінь диференціала dx.

Диференціали третього і більш високих порядків визначають аналогічно.

Означення. Диференціалом $d^n y$ ***n*-го порядку** функції $y = f(x)$ (n-м диференціалом) називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку, який дорівнює

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^n(x)dx^n. \tag{3.4.4}$$

Зауважимо, що формули (3.4.3) і (3.4.4) правдиві лише для випадку, коли x − незалежна змінна.

Дійсно, нехай $x = \varphi(t)$ − проміжна змінна, а t − незалежна змінна, тобто задана складена функція $y = f[\varphi(t)]$. За формулою (3.3.1) її перший диференціал − функція від незалежної змінної t − має інваріантну форму відносно проміжної змінної x та дорівнює

$$dy = y'_x dx = y'_x \cdot x'_t \cdot dt .$$

Знайдемо другий диференціал, застосовуючи правило диференціювання добутку та враховуючи, що $dt = \Delta t$ не залежить від t (її можна виносити за знак похідної), y'_x і x'_t − диференційовні функції своїх аргументів, а y'_x − складена функція. Отримаємо вираз

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(y'_x \cdot x'_t \cdot dt) = \left(y'_x \cdot x'_t \cdot dt\right)' dt = \left(y'_x \cdot x'_t\right)' \cdot dt^2 = (y'_x)' \cdot x'_t \cdot dt^2 + y'_x \cdot x''_{t^2} \cdot dt^2 = \\ &= y''_{x^2}\left(x'_t\right)^2 dt^2 + y'_x x''_{t^2} dt^2 = y''_{x^2} dx^2 + y'_x x''_{t^2} dt^2 . \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

У правій частині формули (3.4.5) з’явився доданок, відсутній у формулі (3.4.3). Тобто **диференціали другого та більш високих порядків не мають властивості інваріантності форми диференціала**.

Якщо x − незалежна змінна ($x = t$), то формула (3.4.5) переходить у формулу (3.4.3), оскільки $x''_{t^2} = (t')' = (1)' = 0$ і другий доданок буде дорівнювати нулю.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Що називають диференціалом функції та як його визначають через похідну?
2. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
3. Сформулюйте властивість інваріантності форми першого диференціала.
4. У яких задачах застосовують диференціал для наближених обчислень?
5. У чому полягає механічний зміст похідної другого порядку?

6. Сформулюйте означення похідної n-го порядку.
7. Сформулювати означення диференціала n-го порядку.
8. Доведіть, що другий диференціал не має властивості інваріантності форми.
9. Доведіть, що наближене значення $\mathrm{tg}\,44^0 56'$ дорівнює 0,9976.
10. Доведіть, що друга похідна функції $x^2 + y^3 = 1$ дорівнює $-2(3+x^2)/9y^5$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

4.1. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ РОЗКРИТТЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ $\frac{0}{0}$ ТА $\frac{\infty}{\infty}$

Правило Лопіталя. Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$, а також їх похідні неперервні в точці x_0 і нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Тоді **границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення похідних цих функцій** (скінченній або нескінченній), якщо остання існує в зазначеному сенсі, тобто

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{4.1.1}$$

Це правило є слушне і у випадку нескінченно віддаленої точки $x_0 = \pm\infty$, тобто за $x \to \infty$.

Зауваження. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g'(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g'(x) = \infty$ і похідні неперервні в точці x_0, то правдива формула

$$\lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0(\infty)} \frac{f''(x)}{g''(x)}. \tag{4.1.2}$$

Взагалі, якщо внаслідок застосування правила Лопіталя маємо невизначеність $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то це правило можна застосовувати доти, поки не буде одержано дріб, для якого не виконуватимуться умови цього правила.

Приклад. Знайти границі: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^k}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{\left(x^2\right)'}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=$

$=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{x'}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=\dfrac{1}{6}\cdot 1=\dfrac{1}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\log_a x)'}{\left(x^k\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x\cdot\ln a}}{kx^{k-1}}=\dfrac{1}{k\ln a}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$.

Відповідь. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x}{x^2}=1$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log_a x}{x^k}=0$.

Застосування правила Лопіталя дає змогу порівнювати нескінченно великі та малі функції. Останній приклад показує, що степенева функція x^k є нескінченно велика порівняно з логарифмічною функцією $\log_a x$.

4.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ

Для дослідження будь-якого процесу або залежності, відображених аналітично заданою функцією $y=f(x)$, важливо визначити інтервали її зростання або спадання, опуклості або увігнутості, знайти точки перегину та екстремальних (найбільших або найменших) значень функції. Вирішення цих питань буде значно спрощено, якщо застосувати диференціальне числення, тобто похідну.

Загальна схема дослідження функцій, побудови їх графіків та доведення відповідних теорем не входять до матеріалу даного посібника, а подані у рекомендованій літературі.

Монотонність. Інтервали монотонності функції

Означення. Функція $y=f(x)$ **зростаюча (спадна)** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких $x_1,x_2\in(a,b)$ з нерівності $x_1<x_2$ випливає нерівність $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.

Функція $y=f(x)$ **незростаюча (неспадна)** на інтервалі (a,b), якщо для будь-яких $x_1,x_2\in(a,b)$ із нерівності $x_1<x_2$ випливає нерівність $f(x_1)\ge f(x_2)$ $(f(x_1)\le f(x_2))$.

Зростаючі та спадні функції називають **строго монотонними** або монотонними в строгому значенні, а незростаючі та неспадні – монотонними або монотонними у широкому значенні. Інтервали, у яких функція спадає чи зростає, називають **інтервалами монотонності**.

Теорема (достатні умови строгої монотонності). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна на інтервалі (a,b) і похідна $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), за винятком, можливо, скінченного числа точок, у яких $f'(x) = 0$, то функція $y = f(x)$ зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними**, а ті, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, − **критичними точками**.

Із наведеної теореми випливає, що на двох сусідніх інтервалах монотонності похідна функції має різні знаки. Тобто інтервали монотонності відділяються один від одного або стаціонарною точкою, де похідна дорівнює нулю, або критичною точкою, де похідна не існує. Наприклад, у точках з абсцисами $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ (рис.4.2.1) дотичні до графіка функції паралельні осі Ox і похідні дорівнюють нулю, тобто це стаціонарні точки. Вони відділяють інтервали монотонності функції.

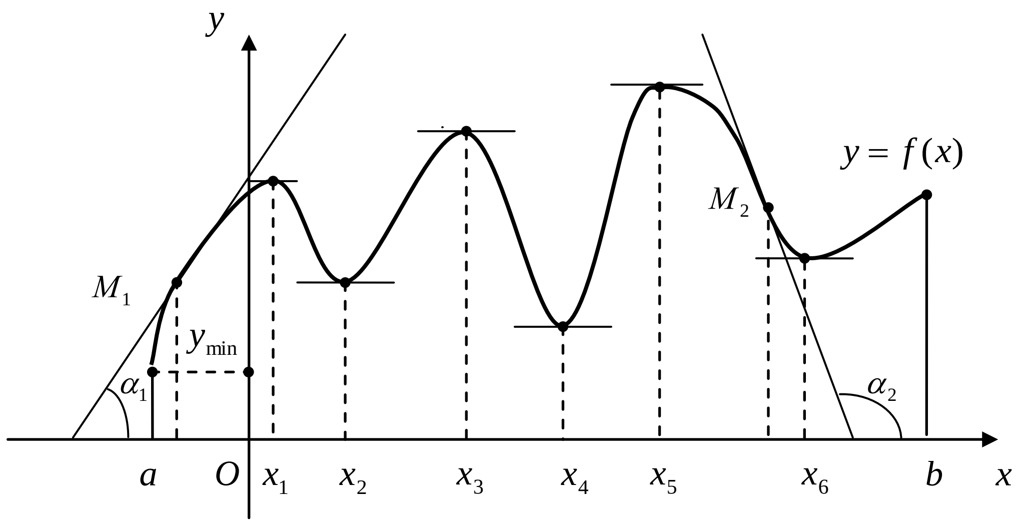

Рис.4.2.1. Критичні точки та інтервали монотонності функції

Похідна функції $y = |x|$ у точці $x = 0$ не існує (рис.1.4.1,*а*). Ця точка критична і відокремлює інтервал монотонності $(-\infty, 0)$, де $f'(x) = -1 < 0$ і функція спадає, від інтервалу $(0, +\infty)$, де $f'(x) = 1 > 0$ і функція зростає.

Необхідно зазначити, що не кожна критична точка відділяє інтервали монотонності. Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на всій числовій осі і хоча її похідна $y' = 3x^2$ у точці $x = 0$ дорівнює нулю, ця точка не відокремлює жодних інтервалів монотонності.

Геометричний зміст наведеної теореми такий. Якщо на деякому інтервалі функція $y = f(x)$ зростає, то кут α нахилу дотичної гострий $\alpha < \pi/2$ або (в окремих точках) $\alpha = \pi/2$ (дотична горизонтальна). Тангенс цього кута невід'ємний $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x) \ge 0$. Якщо функція спадає, то кут нахилу дотичної тупий $\alpha > \pi/2$ або (в окремих точках) $\alpha = \pi/2$ (дотична горизонтальна). Тангенс кута недодатний $\mathrm{tg}\,\alpha \le 0$. Наприклад, для всіх $x \in (a, x_1)$: $\mathrm{tg}\,\alpha_1 > 0$ − функція зростає, а для всіх $x \in (x_6, b)$: $\mathrm{tg}\,\alpha_2 < 0$ – функція спадає (рис.4.2.1).

Отже, для визначення інтервалів монотонності функції $y = f(x)$ необхідно дотримуватись такого алгоритму (порядку дій):

1) знайти область існування функції;

2) знайти похідну $f'(x)$ функції;

3) знайти критичні точки як корені рівняння $f'(x) = 0$, а також з умови, що $f'(x)$ не існує;

4) розділити критичними точками область існування на інтервали і в кожному з них з'ясувати знак похідної;

5) за одержаними знаками похідної зробити висновки: якщо на інтервалі $f'(x) > 0$ – інтервал зростання функції, якщо $f'(x) < 0$ – інтервал спадання.

Приклад 4.2.1. Знайти інтервали монотонності функцій:

а) $y = x(1+\sqrt{x})$; б) $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$.

Розв'язання.

а) Область існування функції − проміжок $[0, +\infty)$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(x(1+\sqrt{x}\right)' = \left(x + x^{3/2}\right)' = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Для будь-якого x із проміжку $[0, +\infty)$, тобто для $\forall x \in [0, +\infty)$, виконуються умови $y' \ne 0$ і $y' > 0$.

Відповідь. Критичних точок немає, функція зростає на всій області існування.

б) Область існування функції − вся числова вісь $(-\infty, +\infty)$. Знайдемо похідну:

$$y' = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x^2 - 4x - 5).$$

Знайдемо критичні точки з рівняння

$$y' = 3(x^2 - 4x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 5.$$

Область існування розіб'ємо критичними точками на три інтервали:

$$(-\infty, -1),\ (-1, 5),\ (5, +\infty).$$

З'ясуємо знаки похідної на кожному інтервалі. Для цього досить установити знак похідної в довільній внутрішній точці кожного з них:

$$y'(-2) = 21 > 0,\ y'(0) = -15 < 0,\ y'(6) = 21 > 0.$$

Відповідь. $\forall x \in (-\infty,-1):\ y' > 0$ – функція зростає;

$\forall x \in (-1, 5):\ y' < 0$ – функція спадає;

$\forall x \in (5,+\infty):\ y' > 0$ – функція зростає.

Екстремуми функцій

Означення. Точку x_0 називають **точкою локального максимуму (або мінімуму)** функції $y = f(x)$, якщо в області визначення функції існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ цієї точки, що для всіх x із цього околу правдива буде нерівність $f(x) < f(x_0)$ (або $f(x) > f(x_0)$).

Точки локального (місцевого) максимуму та локального мінімуму називають **точками локального екстремуму**, а значення функції в цих точках – **локальним екстремумом**. Наприклад, точки з абсцисами x_1, x_3, x_5 (рис.4.2.1) є точки локальних максимумів, а точки з абсцисами x_2, x_4 та x_6 – локальних мінімумів.

Згідно з означенням локальних екстремумів функція може досягати лише у внутрішніх точках проміжку, оскільки розглядаємо деякий окіл точки. Наприклад, свого мінімального значення $y_{\min}$, тобто **абсолютного мінімуму**, функція $y = f(x)$ досягає на лівому кінці проміжку $[a,b]$ (рис.4.2.1). Точка $x = a$ гранична, а не внутрішня, тому не є точкою локального екстремуму.

Свого екстремуму функція може досягати або в точках, де дотична горизонтальна і похідна $f'(x)$ дорівнює нулю (рис.4.2.1), або в точках, де похідна не існує (рис.1.4.1,*а*), тобто в критичних точках. Однак не кожна критична точка є екстремальна. Тому рівність $f'(x) = 0$ разом із умовою відсутності похідної є тільки **необхідною умовою** існування екстремуму функції в точці.

Точки, у яких необхідна умова виконується, називають **підозрілими на екстремум** або **критичними точками першого роду**.

Для визначення екстремальних точок із множини критичних застосовують достатні умови існування екстремуму.

Перша достатня умова існування екстремуму. Нехай функція $f(x)$ диференційовна в околі $0 < |x - x_0| < \delta$ критичної точки $x = x_0$. Тоді

– якщо зліва від точки x_0 за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ похідна $f'(x) > 0$, а справа за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) < 0$, то x_0 **є точкою локального максимуму функції;**

– якщо зліва від точки x_0 за $x \in (x_0 - \delta\,; x_0)$ похідна $f'(x) < 0$, а справа за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ похідна $f'(x) > 0$, то x_0 **є точкою локального мінімуму функції;**

– якщо зліва і справа від точки x_0 в означених інтервалах похідна має однаковий знак, то **точка** $x = x_0$ **не є екстремальна.**

Отже, для дослідження функції на екстремум необхідно: 1) знайти похідну $f'(x)$ функції; 2) знайти критичні точки як корені рівняння $f'(x)=0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує (якщо внутрішні критичні точки відсутні, то екстремумів немає); 3) встановити знак похідної $f'(x)$ в околі кожної критичної точки; 4) за одержаними знаками зробити висновки щодо типу екстремуму – максимум або мінімум; 5) обчислити екстремальні значення в точках екстремуму.

Дослідження знака першої похідної в околі критичної точки може викликати деякі труднощі. Тоді застосовують другу достатню умову.

Друга достатня умова існування екстремуму. Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, а сама функція двічі диференційовна в цій точці, причому $f''(x_0)\neq 0$. Тоді

– якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 – **точка локального максимуму;**

– якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 – **точка локального мінімуму.**

Приклад 4.2.2. Дослідити на екстремум функцію $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5}{2}x^2+6x+3$ за допомогою першої і другої достатніх умов.

Розв'язання. Знайдемо першу похідну: $f'(x)=x^2-5x+6$.
Знайдемо критичні точки з рівняння:

$$f'(x)=x^2-5x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2, x_2=3; \quad \Rightarrow \quad f'(x)=(x-2)(x-3).$$

Інші критичні точки відсутні, оскільки похідна визначена на всій числовій осі. Критичні точки поділяють область визначення функції на інтервали знакосталості похідної. Ці точки та інтервали зручно занести в таблицю. Знак похідної та її значення в критичних точках запишемо у другий рядок таблиці. Якщо $x<2$, то $f'(x<2)$ дорівнює добутку двох від'ємних множників, тобто додатна. На інших інтервалах $f'(2<x<3)<0$ та $f'(x>3)>0$. У третьому рядку відобразимо екстремальні значення функції та її поведінку на інтервалах ($\uparrow$ – зростає, $\downarrow$ – спадає).

x	$(-\infty, 2)$	$x=2$	$(2, 3)$	$x=3$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\uparrow$	$f_{\max}(2)=\dfrac{23}{3}$	$\downarrow$	$f_{\min}(3)=\dfrac{15}{2}$	$\uparrow$

Знайдемо другу похідну в критичних точках.

$f''(2)=(2x-5)\big|_{x=2}=-1<0$ – функція досягає локального максимуму;

$f''(3)=(2x-5)\big|_{x=2}=1>0$ – функція досягає локального мінімуму.

Відповідь. Згідно з першою та другою достатніми умовами функція досягає локального максимуму $f_{\max}(2)=23/3$ і локального мінімуму $f_{\min}(3)=15/2$.

Опуклість та увігнутість графіка функції. Точка перегину

Означення. Криву $y = f(x)$ називають **опуклою (увігнутою)** на інтервалі, якщо всі точки графіка функції, крім точки дотику, лежать нижче (вище) за її довільну дотичну на цьому інтервалі.

Точкою перегину називають таку точку кривої, яка відділяє опуклу частину графіка функції від увігнутої.

У точці перегину дотична перетинає криву, оскільки з одного боку околу цієї точки графік функції знаходиться під дотичною, а з другого – над дотичною.

Достатня умова опуклості графіка функції. Якщо в усіх точках інтервалу (a,b) $f''(x) < 0$, то крива опукла на (a,b), якщо $f''(x) > 0$, то крива увігнута на (a,b).

З наведеної теореми випливає, що в точці перегину друга похідна, якщо вона існує, дорівнює нулю $f''(x) = 0$. Однак точками перегину можуть бути і точки, у яких друга похідна не існує (наприклад, точка $x = 0$ функції $y = \sqrt[3]{x}$).

Точки, у яких друга похідна $f''(x) = 0$ дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками другого роду**.

Достатня умова існування точки перегину. Якщо $x = x_0$ критична точка другого роду, а під час переходу через неї друга похідна змінює знак на протилежний, то точка з абсцисою $x = x_0$ є точкою перегину .

Отже, щоб знайти точки перегину кривої, треба знайти критичні точки другого роду і дослідити зміну знака другої похідної під час переходу через ці точки.

Приклад 4.2.3. Знайти інтервали опуклості й точки перегину кривої $y = (x-5)^{\frac{5}{3}} + 2$.

Розв'язання. Область визначення функції $(-\infty,+\infty)$. Знайдемо другу похідну. Маємо

$$f'(x) = \frac{5}{3}(x-5)^{\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-5}} \neq 0.$$

Друга похідна не дорівнює нулю в області існування функції, а в точці $x = 5$ – не існує, тобто точка $x = 5$ – критична точка другого роду. Тоді маємо

$$f''(x) < 0 \text{ за } x \in (-\infty, 5) \text{ та } f''(x) > 0 \text{ за } x \in (5,+\infty).$$

Відповідь. На інтервалі $x \in (-\infty, 5)$ крива опукла, на інтервалі $x \in (5,+\infty)$ – увігнута, точка $(5; 2)$ є точка перегину.

Питання та завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте правило Лопіталя. У чому полягає його суть?
2. Сформулюйте означення строгої монотонності функції на інтервалі.
3. Що таке стаціонарна та критична точки? У чому полягає їх різниця?
4. Сформулюйте достатні умови строгої монотонності функції.
5. Що таке локальний екстремум функції? У яких точках функція його досягає? Чим відрізняються локальний і абсолютний максимум або мінімум?
6. Сформулюйте необхідну умову та першу й другу достатні умови існування екстремуму функції в точці.
7. Наведіть означення опуклості, увігнутості й точки перегину графіка функції.
8. Сформулюйте достатні умови опуклості та існування точки перегину графіка функції.
9. Знайдіть границі за правилом Лопіталя: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$.
10. Знайдіть інтервали монотонності функцій: а) $y=2-3x+x^3$; б) $y=x\cdot e^{-x}$.
11. Знайдіть екстремуми функцій: а) $y=(x-1)^4$; б) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.
12. Знайдіть інтервали опуклості й точки перегину кривої: а) $y=x^5+5x-6$; б) $y=x^4+x^2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Барковський, В.В. Вища математика для економістів [Текст]/ В.В Барковський, Н.В Барковська .– К.: ЦУЛ, 2002. – 400 с.

Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст]/ Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Высшая математика для экономистов [Текст]: учеб. для вузов /Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. – 480 с.

Дубовик, В.П. Вища математика [Текст]: в 3ч./ В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Х.: Веста, 2008. – Ч.2. – 240 с.

Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах [Текст]/ В.П.Лавренчук, Т.І.Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – Чернівці: Рута, 2007. – Ч.1. – 440 с.

Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики [Текст]/ В.А.Кудрявцев, Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике [Текст]/В.П. Минорский. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов [Текст]: в 3т./Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985.

ЗМІСТ

1. Похідна функції.. 3
1.1.Означення похідної... 3
1.2. Геометричний, механічний, фізичний та економічний зміст похідної.. 6
Задача про дотичну. Геометричний зміст похідної……………..…..... 6
Задача про миттєву швидкість. Механічний зміст похідної……......... 9
Фізичний зміст похідної……………………………………........... 9
Економічний зміст похідної……………………………........….. 10
1.3. Односторонні права й ліва похідні……………………………... 10
1.4. Диференційовність функцій……………………………………….. 12
2. Диференціювання функцій………………………………………………… 14
2.1. Правила диференціювання функцій………………………………… 14
2.2. Похідні основних елементарних функцій…………………………… 18
2.3. Таблиця похідних та правил диференціювання функцій………....... 22
3. Диференціал функції. Похідні та диференціали вищих порядків……. 25
3.1. Означення диференціала………………………………………………… 25
3.2. Геометричний зміст диференціала……………………………... 27
3.3. Властивості диференціала та його застосування в наближених обчисленнях…………………………………………………… 27
3.4. Поняття похідної n-го порядку……………………………………… 29
3.5. Диференціали вищих порядків…………………………………….. 30
4. Застосування похідної………………………………………………………. 32
4.1. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ …………….. 32
4.2. Застосування похідних для дослідження деяких властивостей функцій………………………………………………………………………… 33
Монотонність та інтервали монотонності функції………................ 33
Екстремуми функцій……………………………………........……… 36
Опуклість та увгнутість графіка функції. Точка перегину……........... 38
Список рекомендованої літератури………………………………………. 39