

**Ю.В. Шерстенников,**  
кандидат фізико-математичних  
наук

**Т.М. Рудянова,**  
кандидат фізико-математичних  
наук

Дніпропетровська державна  
фінансова академія

*Проведено дослідження розвитку підприємств малого бізнесу із застосуванням економіко-математичної моделі трифакторної мультиплікативної виробничої функції, що описує залежність обсягу виробленої продукції від основних виробничих фондів, оборотних коштів й оплати праці. Встановлено, що обсяг виробленої продукції має позитивну динаміку для трьох розглянутих видів діяльності: промисловість, транспорт, будівництво.*

**Ключові слова:** виробнича функція, мале підприємство, основні виробничі фонди, оборотні кошти, фонд заробітної плати.

**Постановка проблеми.** Важливим фактором розвитку національної економіки України є ефективне функціонування підприємств малого і середнього бізнесу [1-3]. Для ефективного економічного розвитку різних галузей малого бізнесу необхідно використовувати різноманітні методи економіко-математичного моделювання, які дозволяють зробити аналіз та достовірний прогноз розвитку економіки в цілому та малого бізнесу зокрема. Існує великий клас методів, що базуються на застосуванні виробничих функцій і є узагальненням класичної виробничої функції Кобба-Дугласа. У даній роботі автори застосували трифакторну мультиплікативну виробничу функцію для аналізу розвитку галузей малого бізнесу Дніпропетровської області.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Зараз ведеться активна робота з розробки та застосування методів економіко-математичного аналізу діяльності малих і середніх підприємств [4-9]. Запропоновані методи дозволяють досліджувати динаміку розвитку підприємства за допомогою диференціальних рівнянь, що містять набір найбільш суттєвих змінних, які відображають

вплив як зовнішніх факторів (наприклад, динаміки інвестицій), так і внутрішніх характеристик підприємства (собівартість, фондодвидача й т.ін.). У цих моделях підприємство описується з використанням таких інтегрованих показників: приймаються гіпотези про монопродуктовість підприємства, а також незмінність та одиничність застосовуваної технології й т.ін. При цьому основними операційними поняттями є виробничі функції економічних об'єктів.

**Метою статті** є розробка економіко-математичної моделі розвитку підприємств малого бізнесу із застосуванням трифакторної мультиплікативної виробничої функції, що дозволяє розраховувати динаміку розвитку малих підприємств залежно від таких факторів, як: основні виробничі фонди, оборотні засоби та оплата праці.

Ставилося завдання: на підставі статистичних даних за 2000-2007 рр. для малих підприємств Дніпропетровської області побудувати модель, яка встановлює залежність обсягу виробленої продукції (обсягу реалізованої продукції) від залишкової вартості основних засобів та нематеріальних активів, від оборотних засобів та від оплати

праці, оцінити статистичну значущість моделі, обчислити основні економічні характеристики взаємозв'язку параметрів, зробити економіко-статистичний аналіз діяльності підприємств малого бізнесу за трьома видами діяльності: промисловість, транспорт, будівництво.

**Виклад основного матеріалу.** Метод багатофакторної виробничої функції є потужним інструментом дослідження галузей економіки країни або регіону. Об'єктом моделювання щодо використаної виробничої функції є процес виробництва продукції протягом 8 років на підприємствах малого бізнесу Дніпропетровської області. Обрана методика моделювання спирається на встановлення залежності обсягу виробленої продукції від таких чинників як: вартість основних фондів, оборотних засобів та вартості праці, які обрані як ті, що суттєво впливають на фактор, що розглядається. Виробнича функція дозволяє виконати детальний економічний аналіз діяльності підприємств, визначити їх економічну ефективність, оцінити ефективність використання матеріальних і трудових ресурсів, прогнозувати зростання виробництва й т. ін.

Разом з тим слід відмітити, що спроби побудови агрегованої виробничої функцій для поставленої проблеми зустрічають серйозні труднощі, обумовлені особливостями перехідної економіки. Особливості перехідної економіки обумовлені тим, що вона, отримавши у спадок властивості планової економіки, має і свої власні, які відрізняють її як від планової, так і від ринкової. Тому, наприклад, у процесі реформ на фоні розглянутих обмежень, які накладаються ринковим попитом, залишаються ресурси, що ним незатребувані, але продовжують вимагати витрат на їх підтримку (зокрема, зайнятість, яка підтримується з метою зниження соціальної напруги). Крім того, сам перехідний процес може бути нерівноважним, оскільки виникають різного роду провали ринку (market fails) і/або провали уряду (state fails), коли держава не справляється з управлінням, а ефективні ринкові механізми саморегулювання ще не сформовані [2].

У роботі обрана модель типу Кобба-Дугласа для підприємств Дніпропетровської області:

$$Y_t = a_0 K^{a_1} Q^{a_2} L^{a_3}, \quad (1)$$

де  $Y_t$  - обсяг виробленої продукції / обсяг реалізованої продукції (робіт, послуг);

$K_t$  - основні засоби та нематеріальні активи (залишкова вартість);

$Q_t$  - оборотні активи;

$L_t$  - витрати на оплату праці.

Параметри моделі (1) визначаються на підставі річних середніх статистичних даних за 2000-2007 рр. за такими видами діяльності як промисловість, транспорт, будівництво [7].

Витрати на оплату праці  $L_t$  проіндексовані за ставкою дисконту 0,19, яка відповідає середньому рівню інфляції за обраний період. При цьому, автори виходили з припущення, що зв'язок між обсягами випуску продукції й обсягами засобів праці, предметів праці й живої праці є для даної виробничої системи закономірним і відносно стійким.

Виробнича функція типу (1) називається неокласичною, якщо вона задовольняє такі умови, яким можна дати економічну інтерпретацію:

- за відсутності одного із ресурсів виробництво є неможливим, тобто  $f(0, Q, 0) = f(K, 0, 0) = f(0, 0, L) = 0$ ;

- збільшення витрат будь-якого з ресурсів при незмінній кількості іншого призводить до зростання обсягу виробленої продукції/обсягу реалізованої продукції, тобто

$$- \frac{df}{dK} > 0, \frac{df}{dL} > 0, \frac{df}{dQ} > 0;$$

- зі збільшенням ресурсів швидкість зростання випуску уповільнюється, тобто

$$- \frac{d^2 f}{dK^2} < 0, \frac{d^2 f}{dL^2} < 0, \frac{d^2 f}{dQ^2} < 0;$$

- можна зберегти обсяг випуску постійним, заміщуючи деяку кількість одного фактора додатковим використанням іншого;

- функція є однорідною ступеня  $p$ . При  $p > 1$  із зростанням масштабу виробництва у  $t$  раз обсяг випуску зростає у  $t^p$  раз, тобто маємо зростання ефективності виробництва внаслідок збільшення його масштабів;

- функція є гладкою, тобто неперервною, і двічі диференційованою за аргументами  $K, L, Q$ ;

- при необмеженому збільшенні одного із ресурсів випуск необмежено зростає, тобто  $f(K, -\infty, -\infty) = f(-\infty, Q, -\infty) = f(-\infty, -\infty, L) = +\infty$ .

Функція Кобба-Дугласа (1) приводиться до лінійного виду шляхом логарифмування:

$$\ln Y_t = \ln a_0 + a_1 \ln K_t + a_2 \ln Q_t + a_3 \ln L_t. \quad (2)$$

З умови  $\sum_{i=1}^8 (\ln y_i - \ln \bar{Y})^2 \rightarrow \min$  одержимо наступні коефіцієнти:

- для промисловості:  $a_0 = 0,00009$ ,

-  $a_1 = 0,3095, a_2 = 0,196; a_3 = 1,335$ ;

- для транспорту:  $a_0 = 0,003, a_1 = 0,415; a_2 = 0,308; a_3 = 0,891$ ;

- для будівництва:  $a_0 = 0,0000001, a_1 = 0,382; a_2 = 0,195; a_3 = 1,91$ .

Тоді модель Кобба-Дугласа для малих підприємств Дніпропетровської області за різними видами діяльності відповідно матиме вигляд:

- для промисловості:

$$\hat{Y}_t = 0,00009 \times K_t^{0,3095} \times Q_t^{0,196} \times L_t^{1,335}; \quad (3)$$

- для транспорту:

$$\hat{Y}_t = 0,003 \times K_t^{0,415} \times Q_t^{0,308} \times L_t^{0,891}; \quad (4)$$

- для будівництва:

$$\hat{Y}_t = 0,0000001 \times K_t^{0,382} \times Q_t^{0,195} \times L_t^{1,91}. \quad (5)$$

Коли застосовується виробнича функція Кобба-Дугласа, тоді, як правило, вважається, що виконується закон (гіпотеза) спадної ефективності за ресурсами. Для функції Кобба-Дугласа  $Y = a_0 K^\alpha L^\beta$  це означає, що мають виконуватися нерівності:  $\alpha < 1$  і  $\beta < 1$ . При дослідженні економіки Сполучених Штатів у кризовий період Тинтер [10] встановив, що в цей період (1921–1941 рр.) для економіки США значення  $\beta = 2,13 > 1$ , тобто в кризовий період еластичність за працею може бути більше за одиницю. Для таких галузей малих підприємств Дніпропетровської області як промисловість і будівництво має місце саме така ситуація, тобто  $a_3 > 1$ .

Значення  $\hat{Y}_t$ , які обчислені з рівнянь (3), (4), (5) і статистичні значення  $Y$  [7] для промисловості, транспорту й будівництва проілюстровано на рис. 1-3.

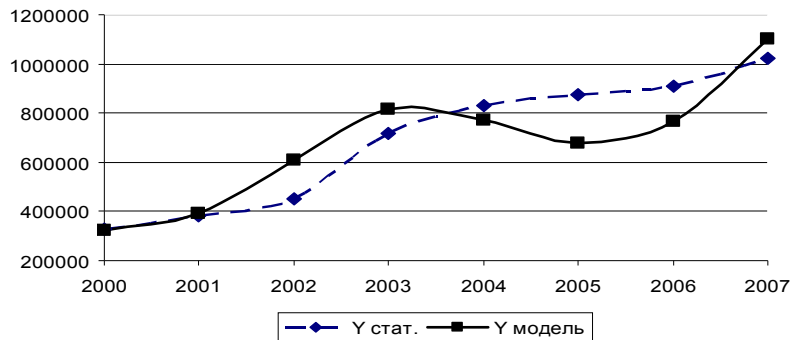


Рис.1. Обсяг випуску продукції промислових підприємств

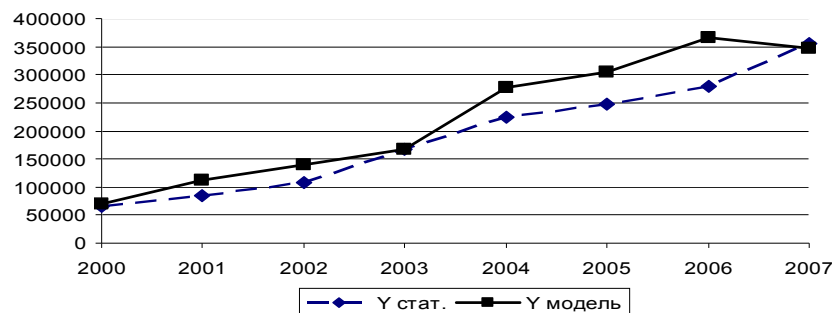


Рис.2. Обсяг випуску продукції транспортних підприємств

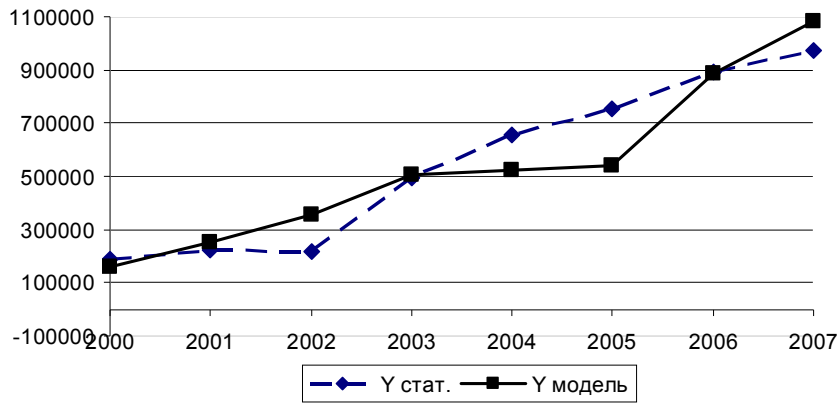


Рис.3. Обсяг випуску продукції будівничих підприємств

Протягом зазначеного періоду спостерігається зростання обсягів виробництва продукції. Оцінка адекватності побудованих нелінійних моделей реальним даним проводиться за величиною коефіцієнта детермінації, який дорівнює відповідно: для промисловості  $R^2 = 0,839$ ; для транспорту  $R^2 = 0,952$ ; для будівництва  $R^2 = 0,857$ .

Показник продуктивності праці (з 1 грн. витрат на оплату праці), яка визначена з рівняння Кобба-Дугласа, має вигляд:

$$\Pi_t = \frac{Y_t}{L_t} = a_0 K^{a_1} Q^{a_2} L^{a_3-1}$$

або

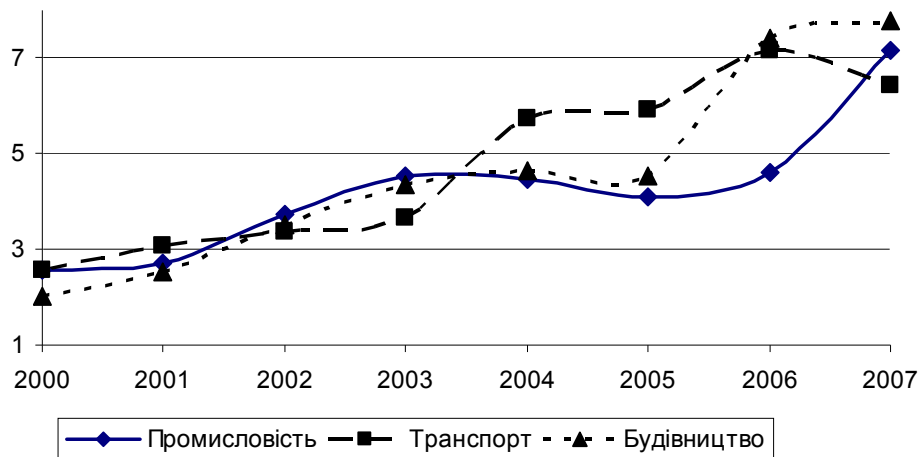


Рис.4. Динаміка показника продуктивності праці малих підприємств

Темпи зростання (зниження) показника продуктивності праці визначаємо за формулою:

$$T_{\Pi} = \frac{(\Pi_i - \Pi_{i-1})}{\Pi_{i-1}} \quad (9)$$

Відповідні значення проілюстровано на рис. 5.

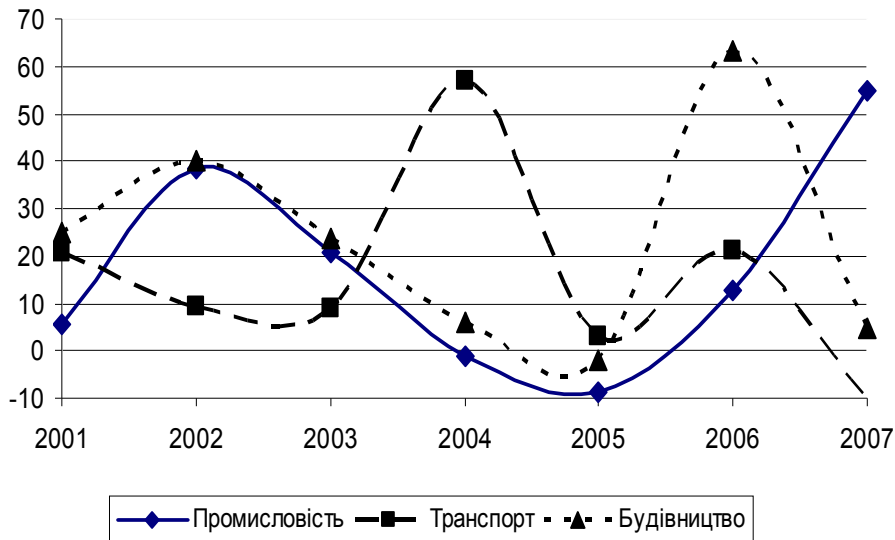


Рис.5. Темпи зміни показника продуктивності праці малих підприємств

Рівняння фондovіддачі має вигляд:

$$\Phi_{ot} = \frac{Y_t}{K_t} = a_0 K^{a_1-1} Q^{a_2} L^{a_3}, \quad (10)$$

або

- для промисловості:

$$\Phi_{ot} = 0,00009 \times K_t^{-0,69} \times Q_t^{0,196} \times L_t^{1,335}; \quad (11)$$

- для транспорту:

$$\Phi_{ot} = 0,003 \times K_t^{-0,59} \times Q_t^{0,308} \times L_t^{0,89}; \quad (12)$$

- для будівництва:

$$\Phi_{ot} = 0,00000001 \times K_t^{-0,62} \times Q_t^{0,195} \times L_t^{1,91}. \quad (13)$$

Відповідні значення проілюстровано на рис. 6.

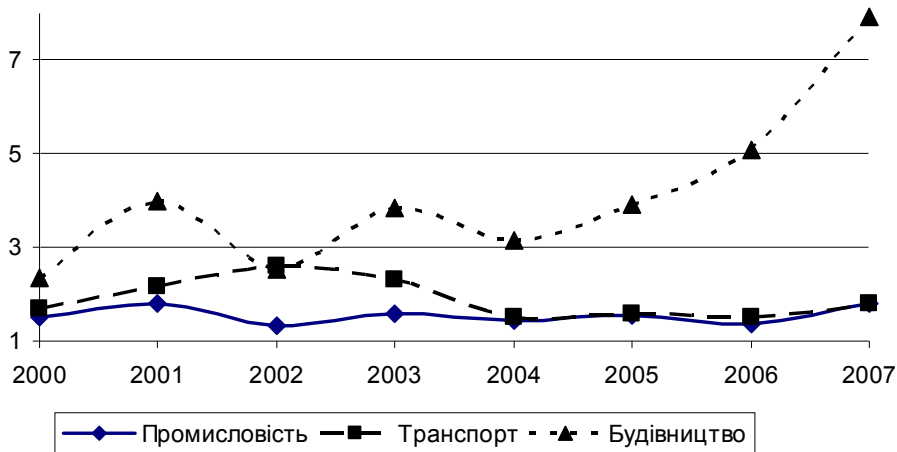


Рис.6. Динаміка показників фондovіддачі промислових підприємств

Темпи зростання (зниження) фондovіддачі визначаємо за формулою:

$$T_{\Phi o} = \frac{(\Phi_{oi} - \Phi_{oi-1})}{\Phi_{oi-1}}. \quad (14)$$

Відповідні значення проілюстровано на рис. 7.

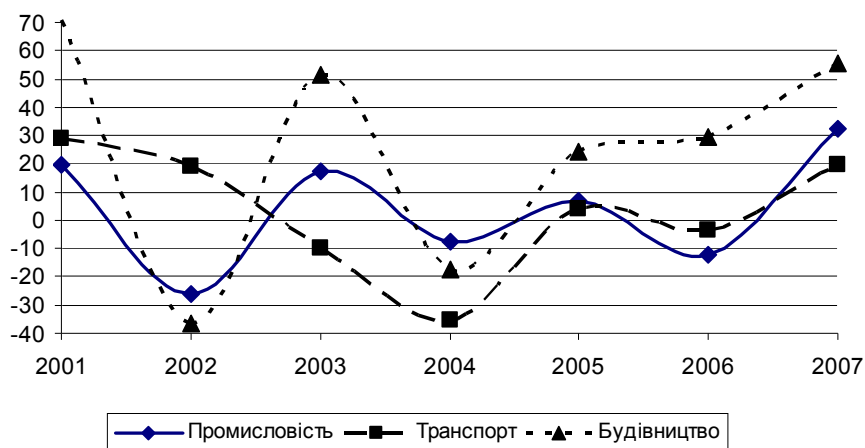


Рис.7. Темпи зміни показників фондівіддачі малих підприємств

Темпи зростання обсягу випуску валової продукції проілюстровано на рис. 8

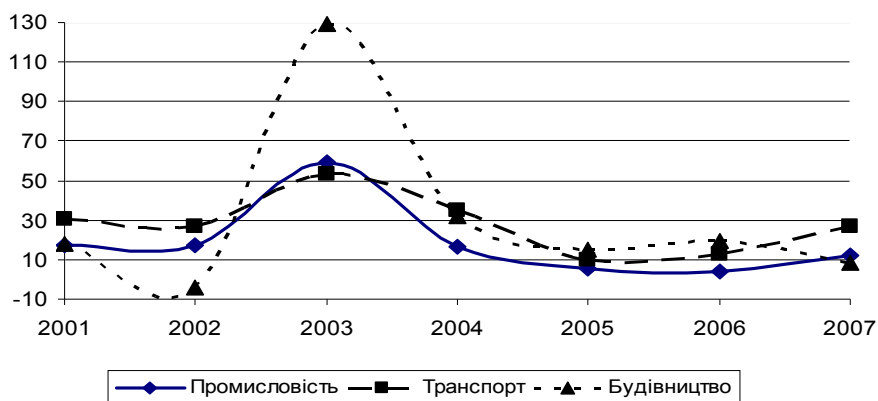


Рис.8. Темпи зміни обсягу випуску валової продукції малих підприємств

Темпи зростання витрат на оплату праці виробничого персоналу визначається за формулою:

$$T_{Li} = \frac{(L_i - L_{i-1})}{L_{i-1}} \quad (15)$$

Відповідні значення проілюстровано на рис. 9.

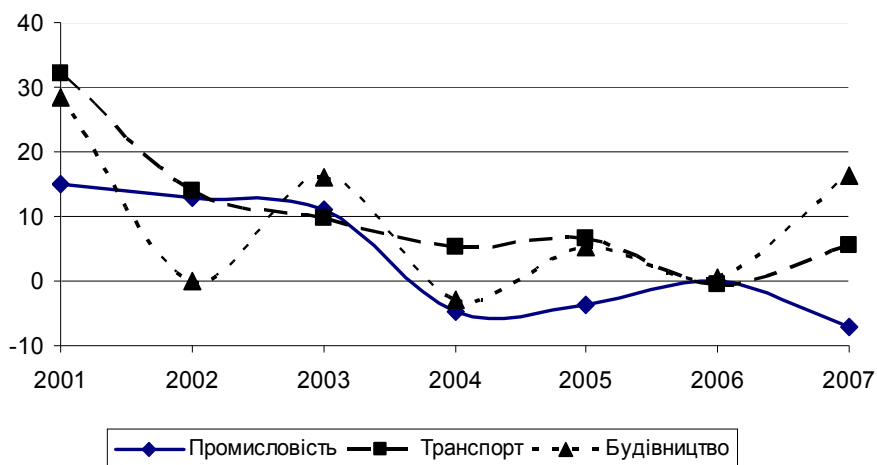


Рис.9. Темпи зміни витрат на оплату праці виробничого персоналу малих підприємств

На рис.10 проілюстровано динаміку показника фондоозброєності для досліджу-

ваних видів діяльності малих підприємств Дніпропетровської області.

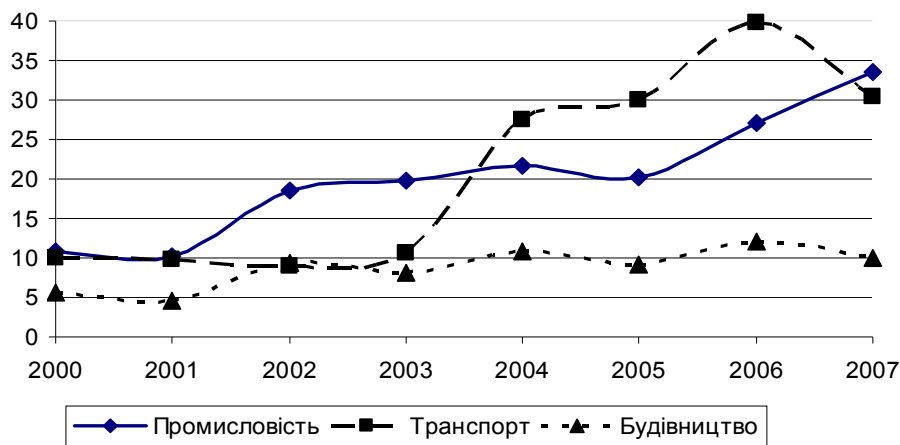


Рис.10. Динаміка показника фондоозброєності малих підприємств

Аналіз коефіцієнтів еластичності за моделлю (3)-(5) показує, що має місце тенденція розвитку підприємств малого й середнього бізнесу Дніпропетровської області, тому що

- для промисловості:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1,84 > 1;$$

- для транспорту:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1,614 > 1;$$

- для будівництва:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2,49 > 1.$$

При цьому зростання (або зменшення) витрат на оплату праці на 1% обумовлює збільшення (зменшення) обсягу виробленої продукції/обсягу реалізованої продукції на 1,335% - для промисловості, на 0,89% - для транспорту, на 1,91% - для будівництва.

У результаті збільшення на 1% основних засобів і нематеріальних активів (за рахунок додаткових капітальних вкладень) випуск продукції підвищиться на 0,3095% - для промисловості; на 0,415% - для транспорту; на 0,382% - для будівництва, що свідчить про впровадження у виробництво прогресивного обладнання, нових матеріалів і використання нових технологій.

Модель виробничої функції Кобба-Дугласа для малих підприємств Дніпропетровської області у вигляді (3)-(5) відображає залежність зміни обсягу виробленої продукції/обсягу реалізованої продукції від ефективності використання основних ресурсів виробництва при кореляційному відношенні  $\eta = 0,9998$  - для промисловості,  $\eta = 0,6484$  -

для транспорту,  $\eta = 0,9654$  - для будівництва.

У 2003 році ми спостерігаємо найбільш високий темп зростання обсягу виробленої продукції/обсягу реалізованої продукції за період, що розглядається: на 59,13% - для промисловості, на 53,2% - для транспорту, на 129,6% - для будівництва. Слід також визначити досить високі значення показників зростання продуктивності праці, що складають для промисловості - 20,61%, для транспорту - 8,76%, для будівництва - 23,636%.

Темпи зростання показників фондовіддачі у 2003 р. становлять для промисловості - 17,13%, для будівництва - 51,2%, але для транспорту - (-9,9)%.

Аналізуючи показники діяльності малих підприємств у 2007 р. слід відмітити високий темп зростання показника продуктивності праці на промислових підприємствах - 55,02%, але незначний ріст на підприємствах будівництва - 4,94%, та зниження темпів продуктивності праці на транспортних підприємствах у порівнянні з 2006 р.

Темпи зростання обсягів випуску валової продукції у 2007 р. для промислових підприємств складають 12,34%, для транспортних підприємств - 27,17% (що є вищими відповідних показників попереднього року), для будівничих підприємств - 8,45%.

Спостерігається значний темп зростання показників фондовіддачі промислових підприємств - 32,47%, транспортних підприємств - 19,82 та будівничих підпри-

емств – 55,3%. Фондоозброєність малих підприємств Дніпропетровської області у 2007 р. складає: у промисловості – 33,56 тис. грн., на транспорті – 30,36 тис. грн., у будівництві – 9,96 тис. грн.

**Висновки.** Проведене дослідження розвитку підприємств малого бізнесу із застосуванням розробленої економіко-математичної моделі трифакторної мультиплікативної виробничої функції залежності обсягу виробленої продукції залежно від таких факторів, як основні виробничі фонди, оборотні засоби та оплата праці дозволяють побачити, що спостерігається зростання економічного показника, який розглядається за трьома галузями: промисловість, транспорт, будівництво.

Аналіз функціонування малих підприємств Дніпропетровської області за розглянутий період показує, що зростання випуску продукції йшло як за рахунок збільшення масштабів виробництва, так і за рахунок використання таких шляхів розвитку, які є джерелом науково-технологічної складової, методів стимулювання працівників, певних досягнень науково-технічного прогресу. Проте стверджувати, що зазначені шляхи були достатньо ефективними, не доводиться, адже спостерігаються нерівномірні (стрибкоподібні) темпи зміни розрахованих показників протягом 2000-2007 рр.

Аналіз діяльності підприємств дозволяє стверджувати, що в 2007 р. діяльність малих підприємств за трьома галузями, які розглядаються, була відносно стабільною.

## ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА

1. *Воронкова А.Э., Козаченко А.В.* Государственная поддержка предприятий малого бизнеса в Украине // Вісник економічної науки України. – 2004. – № 2. – С. 48-51.
2. *Данилов-Данильян В.И., Хранович И.Л.* Производственные функции в условиях неопределенности // Экономика и математические методы. – 2007. – Т. 43. – № 1. – С. 16-26.
3. *Долгоруков Ю. А., Падерин И.Д., Ермократьева О.В.* Факторы, определяющие развитие малого бизнеса в Украине // Економіка промисловості. – 2005. – № 1. – С. 72-80.
4. *Долгоруков Ю., Кусман О.* Про розвиток малого підприємництва // Економіка України. – 2005. – № 12. – С. 11-18.
5. *Егорова Н.Е., Хачатрян С.Р.* Применение дифференциальных уравнений для анализа динамики развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс // Экономика и математические методы. – 2006. – № 1. – С. 50-67.
6. *Ищук С.О.* Методи визначення оптимальних виробничих програм за фінансовими критеріями розвитку підприємства // Економіка і прогнозування. – 2006. – № 4. – С. 123-132.
7. Статистичний збірник: територіальний аспект розвитку малих підприємств Дніпропетровської області у 2007 році. – Головне управління статистики у Дніпропетровській області.-Дніпропетровськ, 2008. – 133 с.
8. *Марюта А.Н., Редина Н.И., Долгоруков Ю.А.* Экономико-математические модели производств и управление их запасами: Монография. – Днепропетровск. – ДДФА, 2005. – 268 с.
9. *Шерстенников Ю.В.* Динамическая модель обновления производственных фондов малого предприятия // Економіка: проблеми теорії та практики. – 2007. – Вип. 226. – С. 507-514.
10. *Шерстенников Ю.В.* Ускоренная амортизация основных производственных фондов малого предприятия // Проблемы повышения эффективности функционирования предприятий различных форм собственности: Сб. науч. тр. НАН Украины. – Ин-т экономики пром-ти. – 2006. – С. 226-233.
11. *Шумська С.С.* Виробнича функція в економічному аналізі: теорія та практика використання // Економіка та прогнозування. – 2007. – № 2. – С. 138-153.